

Capitolo 5

Prove sperimentali: trattazione teorica

5.1 Flussi laminari e turbolenti

Un flusso viscoso può essere classificato come laminare o turbolento.

In un *flusso laminare*, influenzato sempre dagli sforzi di taglio, non ci sono significativi mescolamenti tra particelle di fluido attigue. Se una sostanza colorante viene iniettata nel fluido potrebbe non mescolarsi con le particelle e questo si verificherà anche per tempi relativamente lunghi. Un flusso laminare può essere dipendente dal tempo o può essere stazionario come mostrato in fig 5.1.

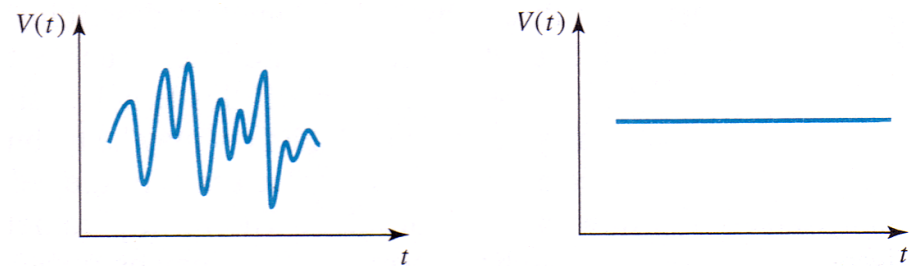


Figura 5.1: Variazione della velocità nel tempo per flussi laminari: (a) flusso non stazionario (b) flusso stazionario

In un *flusso turbolento*, il movimento del fluido è molto irregolare e velocità e pressione variano sia nelle coordinate spaziali che temporali. Le quantità fisiche, in questo caso, vengono spesso descritte da medie statistiche. In questo senso possiamo definire un flusso turbolento stazionario come un flusso nel quale le quantità fisiche medie non cambiano nel tempo.

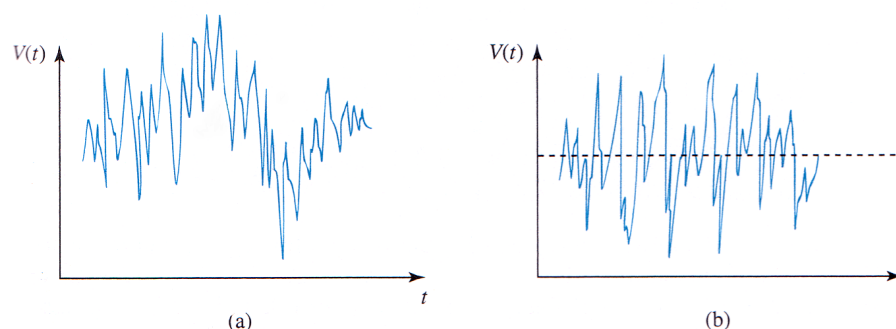


Figura 5.2: Variazione della velocità nel tempo per flussi turbolenti: (a) flusso non stazionario (b) flusso stazionario

La figura 5.2 mostra la misurazione della velocità istantanea in un flusso turbolento stazionario o non stazionario. Una sostanza colorante immessa in un flusso turbolento si miscela immediatamente perdendo la sua identità nel processo diffusivo.

Il motivo per cui un flusso può essere laminare o turbolento dipende dai piccoli disturbi di flusso o dalle perturbazioni alle componenti di velocità. Se un disturbo cresce un flusso laminare può diventare turbolento, se decresce il flusso rimane costante. I regimi di flusso dipendono da 3 parametri fisici.

Il primo parametro è la *lunghezza* L caratteristica del campo di applicazione del fluido. Se questa grandezza è sufficientemente grande i disturbi possono aumentare ed il flusso diventa turbolento.

Il secondo parametro è la *velocità* v definita come velocità media nel tempo; per valori sufficientemente elevati il flusso potrebbe diventare turbolento.

Il terzo parametro è la *viscosità cinematica* ν che se assume valori relativamente bassi potrebbe generare flussi turbolenti.

Le 3 grandezze fisiche possono essere raggruppate in un unico parametro adimensionale che serve come strumento per stimare il regime di flusso.

Questa quantità è il *numero di Reynolds* definito come:

$$Re = \frac{v L}{\nu} = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (5.1)$$

dove v ed L sono rispettivamente la velocità del fluido e la lunghezza caratteristica del flusso, ν è la viscosità cinematica, ρ è la densità e μ la viscosità.

Per esempio se un fluido scorre in una tubazione circolare la lunghezza caratteristica L sarà data dal diametro D del condotto, v dalla velocità media. Se il numero di Reynolds è relativamente piccolo il flusso è laminare altrimenti diventa turbolento. Per definire meglio tutto ciò si introduce il *numero di Reynolds critico* (Re_{crit}) che definisce il passaggio tra regime laminare e turbolento. Più precisamente:

$$\begin{aligned} Re < Re_{crit} & \quad \text{regime laminare} \\ Re > Re_{crit} & \quad \text{regime turbolento} \end{aligned}$$

In un flusso che scorre all'interno di tubazioni commerciali, con una certa rugosità superficiale, si ottiene:

$$Re_{crit} \cong 2100$$

Il valore del Re_{crit} può essere influenzato da vari fattori come vibrazioni o geometria dei sistemi.

Il flusso può anche essere alternato tra laminare e turbolento. Tale tipo di flusso viene chiamato *flusso intermittente* e si verifica quando il numero di Reynolds si avvicina al Re_{crit} .

In figura 5.3 si può osservare il profilo di velocità per questo tipo di flusso.

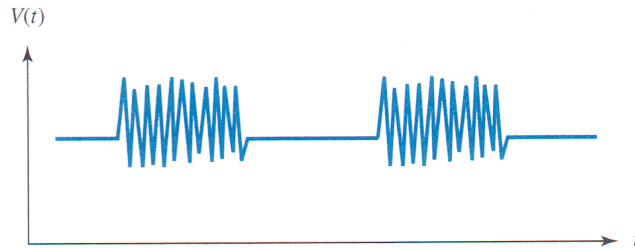


Figura 5.3: Variazione della velocità nel tempo per flussi intermittenti

5.2 Equazione dell'energia

Molti problemi che coinvolgono il movimento di fluidi richiedono che la prima legge della termodinamica, spesso definita come *equazione dell'energia*, sia usata per relazionare le grandezze in gioco. Si usa anche per esprimere pressioni e velocità quando l'equazione di Bernoulli non è applicabile come nel caso in cui gli effetti viscosi non possono essere trascurati, sia per moto in tubazione sia per moto in canale.

L'equazione dell'energia per un generico volume di controllo può essere scritta nella seguente forma:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{v.c.} e \rho dV \quad (5.2)$$

dove l'energia specifica e include l'energia cinetica $\frac{v^2}{2}$, l'energia potenziale gz e l'energia interna $\tilde{u}$:

$$e = \frac{v^2}{2} + gz + \tilde{u} \quad (5.3)$$

Il termine $\dot{Q}$ è un flusso termico ossia rappresenta la quantità di energia trasferita attraverso la superficie di controllo dovuta ad una differenza di temperatura (da non confondere con la portata di flusso volumetrica Q).

Il termine $\dot{W}$ rappresenta la quantità di lavoro e verrà discusso in dettaglio nel paragrafo successivo. Non consideriamo altre forme di energia quali quella dovuta ai campi magnetici od elettrici o quella dovuta a reazioni chimiche.

Utilizzando la definizione di derivata sostanziale:

$$\frac{D(e\rho)}{Dt} = \frac{d(e\rho)}{dt} + e\rho \frac{dv}{dx} \quad (5.4)$$

ed applicando il teorema di Gauss-Green, l'Eq. 5.2 diventa:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} e \rho dV + \int_{s.c.} \rho e \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (5.5)$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ versore normale all'elementino d'area dA sulla superficie di controllo. Per convenzione, $\hat{\mathbf{n}}$ è diretto esternamente rispetto al volume di controllo, come mostrato in figura 5.4. Questa può essere espressa semplificata per un ristretto tipo di flussi.

5.2.1 Quantità di lavoro

La quantità di lavoro $\dot{W}$ è dovuta all'azione di una forza esterna agente sul volume di controllo occupato dal sistema che lo muove per una determinata distanza. $\dot{W}$ è quindi dato dal seguente prodotto vettoriale:

$$\dot{W} = - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_I \quad (5.6)$$

dove $\mathbf{F}$ è la forza agente e $\mathbf{v}_I$ è la velocità rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Per convenzione si assume negativo il lavoro compiuto sul sistema.

Se la forza deriva dall'azione di uno sforzo di taglio non uniforme sulla superficie di controllo ($dF = \tau dA$), possiamo integrare ottenendo:

$$\dot{W} = - \int_{s.c.} \tau \cdot \mathbf{v}_I dA \quad (5.7)$$

dove τ è il vettore sforzo di taglio agente sull'elemento di area dA (figura 5.4).

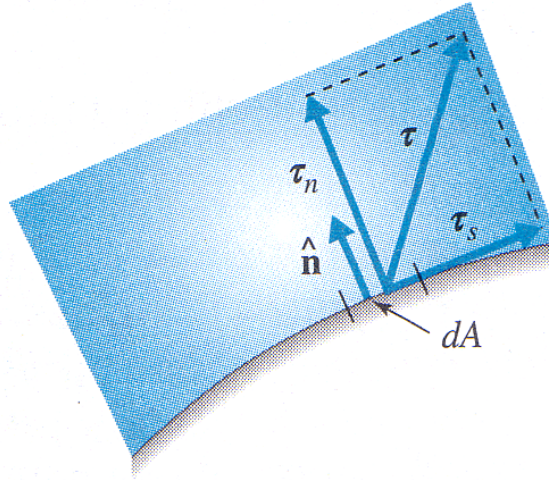


Figura 5.4: Superficie di controllo

Per volumi di controllo in movimento ed in rotazione dobbiamo valutarne la velocità rispetto ad un sistema di riferimento fisso:

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (5.8)$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità relativa osservata da un sistema di riferimento solidale al volume di controllo, $\dot{\mathbf{S}}$ è il vettore velocità del volume di controllo, $\boldsymbol{\Omega}$ ed $\mathbf{r}$

sono rispettivamente la velocità angolare ed il vettore posizione del volume di controllo rispetto all'osservatore fisso (figura 5.5).

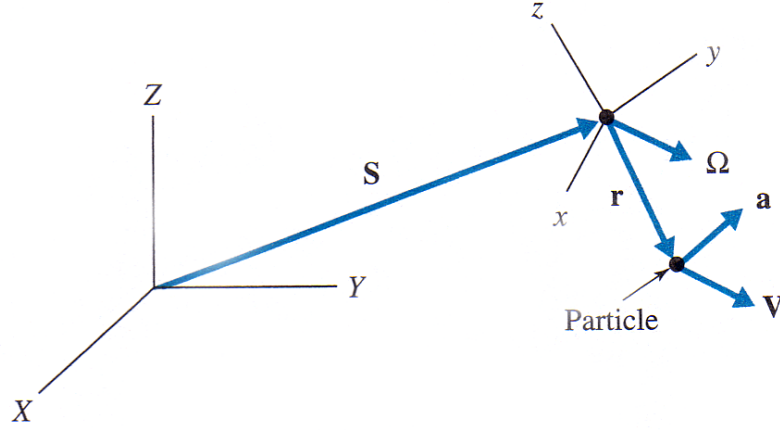


Figura 5.5: Sistema di riferimento del volume di controllo in movimento

Possiamo adesso scrivere la quantità di lavoro come:

$$\dot{W} = - \int \tau \cdot \mathbf{v} dA + \dot{W}_I \quad (5.9)$$

dove $\dot{W}_I$ è la quantità di lavoro inerziale, data da:

$$\dot{W}_I = - \int_{s.c.} \tau \cdot (\dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dA \quad (5.10)$$

Esprimiamo il vettore sforzo di taglio come la somma di una componente normale ed una parallela alla superficie del volume di controllo:

$$\tau = -p \hat{\mathbf{n}} + \tau_{\mathbf{s}} \quad (5.11)$$

La componente normale $(-p \hat{\mathbf{n}})$ è dovuta all'azione sulla superficie di controllo della pressione p esterna (assunta positiva in una compressione). Quindi:

$$\dot{W} = \int_{s.c.} p \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dA - \int_{s.c.} \tau_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} dA + \dot{W}_I \quad (5.12)$$

La componente parallela $\tau_{\mathbf{s}}$ consiste di 2 parti. Una parte è dovuta al *lavoro di rotazione* $\dot{W}_s$ generato dalla rotazione della superficie di controllo attorno ad un asse che la taglia; l'altra è dovuta al *lavoro di taglio* $\dot{W}_{shear}$ risultante dal movimento dei confini del volume di controllo.

La quantità di lavoro diventa pertanto:

$$\dot{W} = \int_{v.c.} p \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dA + \dot{W}_s + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_I \quad (5.13)$$

Ricapitolando:

- $\int p \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dA$ quantità di lavoro risultante dalla forza applicata al volume di controllo;
- $\dot{W}_s$ quantità di lavoro risultante dalla rotazione della superficie di controllo attorno ad un asse che la taglia;
- $\dot{W}_{shear}$ quantità di lavoro dovuta all'azione del taglio al muoversi dei confini;
- $\dot{W}_I$ quantità di lavoro che scorre quando il volume di controllo si muove rispetto ad un punto fisso.

I termini $\dot{W}_{shear}$ e $\dot{W}_I$ si incontrano raramente e quindi verranno esclusi nel prosieguo dalla trattazione.

5.2.2 Equazione dell'energia: forma generale

Quando la quantità di lavoro dell'Eq. 5.13 è sostituita nell'Eq. 5.5 (nell'ipotesi $\dot{W}_{shear} = \dot{W}_I = 0$) si ottiene l'equazione dell'energia nella forma:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} e \rho dV + \int_{s.c.} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dA \quad (5.14)$$

Esprimendo l'energia specifica tramite l'Eq. 5.3 si ricava:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \left(\frac{v_I^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \rho dV + \int_{s.c.} \left(\frac{v_I^2}{2} + gz\tilde{u} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (5.15)$$

L'equazione dell'energia scritta così in forma generale è usata in problemi di analisi dei flussi che possono essere dipendenti dal tempo e caratterizzati da profili di velocità non uniformi. Tale equazione può essere semplificata nel caso di flussi stazionari e profili uniformi. A tal fine introduciamo la nozione di *perdite*.

Nei flussi turbolenti, forme di energia utile (cinetica e potenziale) sono convertite in forme inutilizzabili di energia (interna e perdite di calore).

Ipotizzando costante la temperatura del volume di controllo (processo isoterma), l'energia interna non cambia e le perdite sono bilanciate dalle cessioni di calore attraverso la superficie di controllo.

Questa cessione di calore può avvenire per convezione, conduzione o irraggiamento attraverso la superficie di controllo. La somma di questi effetti è chiamata $\dot{Q}$. Definiamo perdite la somma di tutti i tipi di energia inutilizzabili:

$$perdite = -\dot{Q} + \frac{d}{dt} \int_{s.c.} \tilde{u} \rho dV + \int_{s.c.} \tilde{u} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (5.16)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione come:

$$\begin{aligned} -\dot{W}_s = & \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \left(\frac{v_I^2}{2} + gz \right) \rho dV \\ & + \int_{s.c.} \left(\frac{v_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + perdite \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le perdite sono dovute a 2 effetti principali:

- viscosità che causa attriti interni associati ad incremento dell'energia interna o cessione di calore;
- complessità della geometria, che genera moti secondari (ad esempio separazione di flusso) richiedendo energia utile per contrastare la dissipazione viscosa e mantenere i moti generativi.

In un condotto le perdite dovute ad effetti viscosi sono distribuite lungo l'intera lunghezza mentre le perdite dovute a cambiamenti di geometria (valvole, allargamenti, restringimenti ...) sono concentrate in prossimità del cambiamento stesso. Il calcolo analitico delle perdite è piuttosto difficoltoso particolarmente quando il flusso è turbolento: perciò, la determinazione delle perdite è generalmente basata su formule empiriche.

5.2.3 Flusso stazionario uniforme

Consideriamo un flusso stazionario, caratterizzato da un'unica sezione di ingresso e da un'unica sezione di uscita e assumiamo che il profilo di velocità in corrispondenza di tali sezioni sia uniforme. Assumiamo anche $\dot{W}_{shear} = \dot{W}_I = 0$ con $v_I = v$.

Per tale flusso il termine $(v^2/2 + gz + p/\rho)$ nell'Eq. 5.17 è costante attraverso la sezione perchè v è costante (in base all'ipotesi di profilo uniforme) e la somma $p/\rho + gz$ è costante se le linee di flusso in ogni sezione sono parallele.

L'equazione dell'energia semplificata risulta essere:

$$-\dot{W}_s = \rho_2 v_2 A_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \rho_1 v_1 A_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + perdite \quad (5.18)$$

dove gli indici 1 e 2 sono riferiti rispettivamente alle sezioni di ingresso ed uscita.

La portata massica è data da $\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$ per continuità. Dividendo tutto per $\dot{m}$ abbiamo:

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + g(z_2 - z_1) + h_L \quad (5.19)$$

dove abbiamo introdotto le *altezze cinetiche perse* h_L definite come:

$$h_L = (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (5.20)$$

Tale quantità è spesso espressa in funzione del *numero di altezze cinetiche perse* K :

$$h_L = K \frac{v^2}{2g} \quad (5.21)$$

dove v può essere v_1 o v_2 . Le altezze cinetiche perse hanno dimensione di una lunghezza. Se le perdite sono trascurabili e se non c'è lavoro di taglio, l'equazione dell'energia diventa:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 \quad (5.22)$$

Si osservi che l'equazione dell'energia si riduce ad una forma identica all'equazione di Bernoulli quando $\rho_2 = \rho_1$ (densità costante). Ricordiamo che l'equazione di Bernoulli è applicabile lungo una linea di flusso mentre l'equazione dell'energia tra 2 sezioni di flusso. Non c'è da meravigliarsi che ambedue forniscano risultati identici da condizioni analoghe perchè la velocità attraverso una sezione trasversale è costante così come la somma delle cadute di pressione.

L'equazione dell'energia può essere applicata a qualsiasi flusso stazionario uniforme con unica sezione di ingresso ed uscita.

5.3 Flussi laminari in tubazioni

In questo paragrafo verranno studiati gli effetti della viscosità su un fluido incomprimibile che scorre in tubazione. I flussi in tubazioni circolari sono indubbiamente i più comuni flussi interni: si possono incontrare nelle vene e nelle arterie del corpo, nel sistema di approvvigionamento d'acqua di una città, nei sistemi per il trasporto di fluidi delle industrie e perfino nelle stampanti a getto d'inchiostro.

Ricordiamo che gli effetti viscosi di un fluido possono essere quantificati tramite il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (5.23)$$

Il numero di Reynolds risulta essere il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi. Quando questo rapporto diventa grande, le forze inerziali possono prevalere sulle forze viscosi. Ciò accade, per esempio, quando si verificano cambiamenti geometrici improvvisi; per tubazioni relativamente lunghe o canali aperti questo non si verifica. Quando la superficie interna dei condotti è relativamente ampia gli effetti viscosi diventano importanti e devono essere tenuti in considerazione. Per un numero di Reynolds sufficientemente basso ($Re < 2100$) si ottiene un flusso laminare mentre per valori relativamente alti si ottiene un flusso turbolento.

5.3.1 Approccio elementare

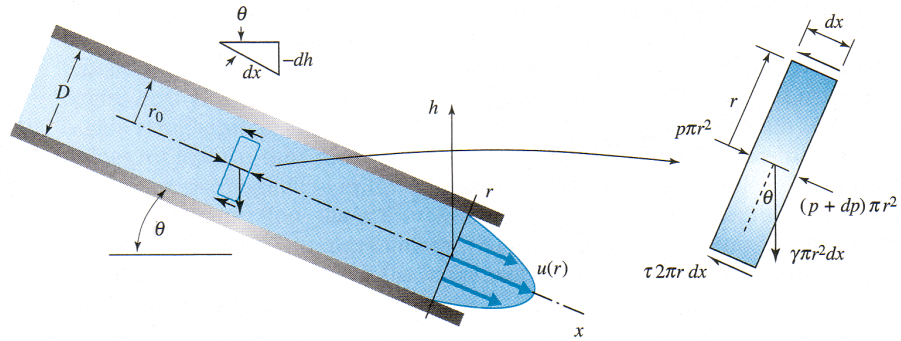


Figura 5.6: Flusso sviluppato in una tubazione circolare

Consideriamo un volumetto elementare di fluido come mostrato in figura 5.6. Questo può essere considerato sia come un volume di controllo infinitesimo attraverso il quale il fluido scorre, sia come una massa infinitesima di fluido sulla quale agiscono delle forze. Se viene considerato come un volume di controllo, è possibile applicare l'equazione della quantità di moto mentre se viene considerato come una massa di fluido è possibile applicare la seconda legge di Newton. Se il profilo di velocità è uniforme in direzione x , il flusso di quantità di moto entrante è uguale al flusso di quantità di moto uscente, la massa di fluido non subisce accelerazione e la forza risultante è zero.

Il conseguente bilancio delle forze in direzione x risulta essere:

$$p \pi r^2 - (p + dp) \pi r^2 - \tau 2 \pi r dr + \gamma \pi r^2 dx \sin \vartheta = 0 \quad (5.24)$$

che può venir semplificato ottenendo:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{dx}(\mathcal{P}) \quad (5.25)$$

dove $\mathcal{P} = p + \gamma h$ con $\gamma = \rho g$ e dove abbiamo usato $\sin \vartheta = -dh/dx$ e la direzione verticale è stata indicata con h . Da notare che l'Eq. 5.25 può essere applicata sia a flussi laminari che turbolenti. Lo sforzo di taglio in flussi laminari è espresso in funzione del gradiente di velocità e della viscosità:

$$-\mu \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{d}{dx}(\mathcal{P}) \quad (5.26)$$

Nel caso di flusso completamente sviluppato, $u_x = u_x(r)$: possiamo concludere che $d/dx = \mathcal{P}$ risulta costante e non dipende da x . Dalle leggi sulla statica dei fluidi se $\mathcal{P}$ non dipende da x non c'è accelerazione radiale. L'Eq. 5.26 può essere integrata per dare il profilo di velocità:

$$u(r) = -\frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dx}(\mathcal{P}) + A \quad (5.27)$$

dove A è la costante di integrazione calcolabile usando le condizioni al contorno $u = 0$ quando $r = r_0$. Si ottiene:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{d(\mathcal{P})}{dx} (r_0^2 - r^2) \quad (5.28)$$

Il profilo di velocità ha pertanto un andamento parabolico. Questo tipo di flusso viene chiamato *flusso di Poiseuille*, dal nome di Jean L. Poiseuille (1799-1869).

5.3.2 Grandezze fluidodinamiche

Per un flusso laminare completamente sviluppato in tubazione circolare, il profilo di velocità risulta essere dato dall'Eq. 5.28. La velocità media risulta:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{r_0} u(r) 2 \pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{1}{4\mu} \frac{d(\mathcal{P})}{dx} (r_0^2 - r^2) r dr \\ &= -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{d(\mathcal{P})}{dx} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Esprimendo le perdite di carico Δp in termini di velocità media ricaviamo, per una tubazione orizzontale, che:

$$\Delta p = \frac{8 \mu \langle v \rangle L}{r_0^2} \quad (5.30)$$

dove abbiamo utilizzato $\Delta p/L = -dp/dx$ costante. Le perdite di carico sono positive mentre il gradiente di pressione (calcolato come differenza fra valore di pressione finale ed iniziale) è negativo. La massima velocità si ottiene in corrispondenza di $r = 0$:

$$u_{max} = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{d(P)}{dx} = 2 \langle v \rangle \quad (5.31)$$

Lo sforzo di taglio risulta essere:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{d(P)}{dx} \quad (5.32)$$

Quando $\tau = \tau_0$ per $r = r_0$, le perdite di carico su una tubazione orizzontale di lunghezza L sono:

$$\Delta p = \frac{2 \tau_0 L}{r_0} \quad (5.33)$$

dove $-\Delta p/L = dp/dx$. Introduciamo ora il *fattore d'attrito* f , una grandezza di notevole interesse nei flussi in tubazione :

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8} \rho \langle v \rangle^2} \quad (5.34)$$

Sostituendo l'Eq. 5.34 nell'Eq. 5.33 si ricava:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = h_L = \frac{1}{2} \frac{f \langle v \rangle^2 L}{D} \quad (5.35)$$

Questa espressione viene chiamata *equazione di Darcy-Weisbach* dal nome di Henri P.G.Darcy (1803-1858) e Julius Weisbach (1806-1871).

Unendo l'Eq. 5.30 e l'Eq. 5.35 si ottiene che:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (5.36)$$

per flussi laminari in tubazione.

Sostituendo l'Eq. 5.36 nell'Eq. 5.35 si ricava che:

$$h_L = \frac{32 \mu < v > L}{\gamma D^2} \quad (5.37)$$

Le altezze cinetiche perse sono pertanto direttamente proporzionali alla velocità media (e quindi anche alla portata): questo risultato può essere generalizzato a flussi laminari sviluppati in condotti di qualsiasi forma.

Oltre alla formulazione di Darcy-Weisbach, esiste anche il *fattore d'attrito di Fanning* espresso come:

$$f_F = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho v^2} \quad (5.38)$$

Esiste quindi una relazione che lega le due espressioni

$$f_F = \frac{1}{4} f = \frac{16}{Re} \quad (5.39)$$

La formulazione di Fanning risulta quindi essere equivalente a quella di Darcy-Weisbach: per passare da una forma all'altra si utilizza l'Eq. 5.39.

5.4 Flussi turbolenti in tubazione

5.4.1 Perdite distribuite in flussi sviluppati

Nei flussi in tubazione la quantità di maggiore interesse è rappresentata dalle altezze cinetiche perse che, se note, permettono di calcolare le perdite di pressione. L'equazione dell'energia dice che:

$$h_L = \frac{\Delta(p + \gamma h)}{\gamma} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{\rho g} \quad (5.40)$$

Le altezze perse per attrito in un flusso completamente sviluppato sono funzione del fattore d'attrito e ricavabili dall'equazione di Darcy-Weisbach, (Eq. 5.35), ottenendo:

$$h_L = \frac{1}{2} \frac{f v^2 L}{g D} \quad (5.41)$$

Noto il fattore d'attrito possiamo ricavare le altezze cinetiche perse e quindi le perdite di carico.

Il fattore d'attrito dipende da varie grandezze che influiscono sul flusso cioè:

$$f = f(\rho, \mu, v, D, k)$$

dove k è la rugosità media alla parete. L'analisi dimensionale (teorema di Buckingham) ci permette di ottenere:

$$f = f\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{k}{D}\right)$$

dove k/D è la *rugosità relativa* ε .

Esperimenti che mettono in relazione il fattore d'attrito con il numero di Reynolds sono stati fatti per flussi completamente sviluppati in un ampio range di rugosità superficiali. I risultati ottenuti sono presentati nella figura 5.7 che viene comunemente chiamato *diagramma di Moody* dal nome di Lewis F. Moody (1880-1953). Ci sono diversi aspetti del diagramma che possono essere osservati:

- per una data rugosità superficiale k , misurata attraverso la rugosità relativa ε , il fattore d'attrito risulta pressochè costante in un range abbastanza ampio di Re : questa zona si definisce regime completamente turbolento. La rugosità media k ha dimensione maggiore rispetto allo strato viscoso di parete, avente spessore δ_v , e gli effetti viscosi risultano poco significativi. La resistenza al flusso è prodotta principalmente dalla resistenza aerodinamica degli elementi di rugosità che sporgono nel flusso;
- per valori relativamente piccoli di rugosità relativa ε , (attorno al valore di soglia $Re=2100$), a decrementi di Re corrispondono aumenti nel valore del fattore d'attrito nella zona di transizione. Lo spessore dello strato viscoso è leggermente maggiore della dimensione media degli elementi di rugosità, i quali producono piccoli effetti sul flusso generale;
- per numeri di Re più piccoli di 2100 si ha regione di flusso laminare. La zona di transizione si frappone fra la zona di flusso in regime laminare e quella di flusso in regime turbolento: in essa può verificarsi un regime di flusso oscillatorio dovuto all'alternarsi dei due distinti flussi;
- i valori di k nel diagramma di Moody sono calcolati per tubi nuovi. Con l'età il tubo si corrode e si incrosta: cambia sia la rugosità che il diametro facendo quindi aumentare il fattore d'attrito.

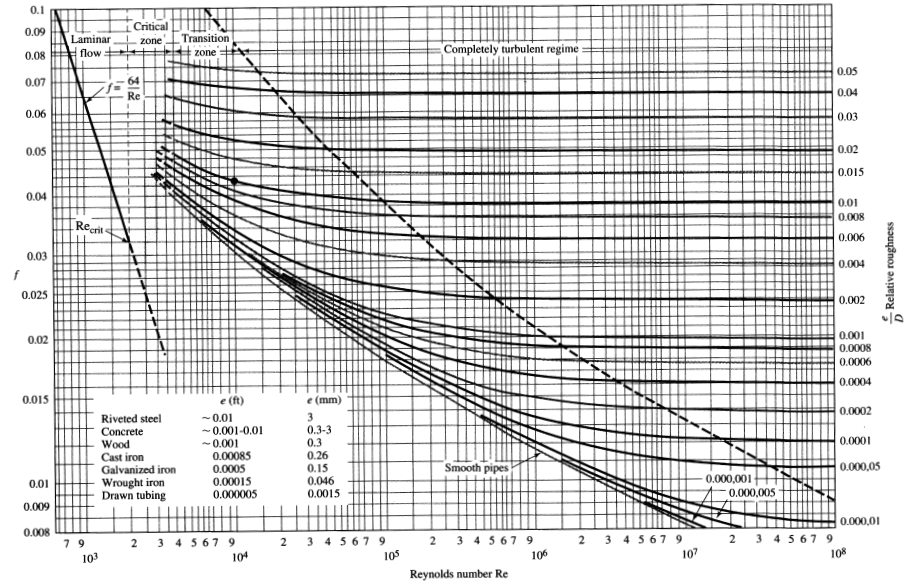


Figura 5.7: Diagramma di Moody

Le seguenti equazioni empiriche sono state ricavate a partire dal diagramma di Moody per $Re > 4000$.

Flusso in tubi lisci:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,86 \ln Re \sqrt{f} - 0,8 \quad (5.42)$$

Zona completamente sviluppata:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \frac{k}{3,7 D} \quad (5.43)$$

Zona di transizione:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \left(\frac{k}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (5.44)$$

L'equazione nella zona di transizione (Eq. 5.44), che unisce l'equazione per tubi lisci con l'equazione per regimi completamente turbolenti, è conosciuta come *equazione di Colebrook*. L'Eq. 5.42 è uguale all'equazione di Colebrook se $k=0$ e all'Eq. 5.43 se $Re = \infty$.

Si possono identificare 3 categorie di problemi per flussi turbolenti completamente sviluppati in tubazioni di lunghezza L :

Categoria	Dati Noti	Incognite
1	Q, D, k, ν	h_L
2	D, k, ν, h_L	Q
3	Q, k, ν, h_L	D

Tabella 5.1: Tipologie di problemi che si possono incontrare nella risoluzione di flussi turbolenti

La categoria 1 non richiede procedure iterative quando si usa il diagramma di Moody. Le categorie 2 e 3 richiedono un processo iterativo per tentativi usando il diagramma di Moody. Un'alternativa per evitare l'uso di processi iterativi per tentativi è l'utilizzo di formule empiriche. Probabilmente le migliori sono quelle presentate da Swamee e Jain (1976) per flussi in tubazione; espressioni esplicite che forniscono un valore approssimato per ogni categoria sopra descritta. Le formule risultano essere:

$$h_L = 1,07 \frac{Q^2 L}{g D^5} \left\{ \ln \left[\frac{k}{3,7D} + 4,62 \left(\frac{\nu D}{Q} \right)^{0,9} \right] \right\}^{-2} \quad (5.45)$$

per $10^{-6} < k/D < 10^{-2}$ e $3 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^8$

$$Q = -0,965 \left(\frac{g D^5 h_L}{L} \right)^{0,5} \ln \left[\frac{k}{3,7D} + \left(\frac{3,17 \nu^2 L}{g D^3 h_L} \right)^{0,5} \right] \quad (5.46)$$

per $Re > 2100$

$$D = 0,66 \left[k^{1,25} \left(\frac{L Q^2}{g h_L} \right)^{4,75} + \nu Q^{9,4} \left(\frac{L}{g h_L} \right)^{5,2} \right]^{0,04} \quad (5.47)$$

per $10^{-6} < k/D < 10^{-2}$ e $5 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^8$

L'Eq. 5.46 fornisce soluzioni identiche a quelle ricavabili dal diagramma di Moody mentre l'Eq. 5.45 e l'Eq. 5.47 forniscono un'approssimazione del 2 % rispetto al diagramma stesso; queste tolleranze sono accettabili per i calcoli ingegneristici. E' importante sottolineare che il diagramma di Moody è basato su dati sperimentali e quindi la sua precisione presenta tolleranze del $\pm 5\%$.

5.4.2 Perdite concentrate in flussi sviluppati

Sappiamo come calcolare le perdite distribuite per flusso in tubazione ma nel caso di valvole, gomiti, allargamenti, restringimenti, ingressi, uscite, curvature ecc. possono esservi perdite aggiuntive chiamate *perdite concentrate*.

Ognuno di questi elementi modifica in modulo e/o direzione il vettore velocità: il risultato è una perdita di carico. In generale se il flusso avviene gradualmente (i.e. no fenomeni di separazione del flusso) le perdite sono trascurabili; perdite relativamente grandi sono associate ad allargamenti o restringimenti improvvisi, in corrispondenza dei quali si può verificare la separazione della vena fluida. Le perdite concentrate, espresse in funzione del coefficiente di perdita K_f , si definiscono:

$$h_L = \frac{1}{2} \frac{K_f v^2}{g} \quad (5.48)$$

I valori di K_f sono stati calcolati sperimentalmente per vari elementi delle tubazioni e a seconda dei diversi tipi di variazioni nella geometria. Nel caso di improvviso allargamento di sezione (dall'area A_1 all'area A_2) le perdite possono essere calcolate tramite la seguente formula:

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \quad (5.49)$$

Quindi, per un allargamento improvviso:

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Se A_2 è estremamente grande, allora $K_f = 1$ ed il risultato evidente è che l'intera energia cinetica viene persa. I coefficienti di perdita per i vari elementi e per le varie geometrie sono rappresentati nella figura 5.8.

Spesso è più pratico esprimere il coefficiente di perdita K_f come lunghezza equivalente L_e di tubazione. Questo viene fatto eguagliando l'Eq. 5.48 e l'Eq. 5.41:

$$\frac{1}{2} \frac{K_f v^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{f v^2 L_e}{g D} \quad (5.50)$$

Si ottiene così:

$$L_e = K_f \frac{D}{f} \quad (5.51)$$

Nominal Loss Coefficients K (Turbulent Flow)							
Type of fitting		Screwed			Flanged		
Diameter		2.5 cm	5 in.	10 cm	5 cm	10 cm	20 cm
Globe valve	(fully open)	8.2	6.9	5.7	8.5	6.0	5.8
	(half open)	20	17	14	21	15	14
	(one-quarter open)	57	48	40	60	42	41
Angle valve	(fully open)	4.7	2.0	1.0	2.4	2.0	2.0
Swing check valve	(fully open)	2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
Gate valve	(fully open)	0.24	0.16	0.11	0.35	0.16	0.07
Return bend		1.5	.95	.64	0.35	0.30	0.25
Tee (branch)		1.8	1.4	1.1	0.80	0.64	0.58
Tee (line)		0.9	0.9	0.9	0.19	0.14	0.10
Standard elbow		1.5	0.95	0.64	0.39	0.30	0.26
Long sweep elbow		0.72	0.41	0.23	0.30	0.19	0.15
45° elbow		0.32	0.30	0.29			
Square-edged entrance				0.5			
Reentrant entrance				0.8			
Well-rounded entrance				0.03			
Pipe exit				1.0			
Sudden contraction ^b		Area ratio					
		2:1		0.25			
		5:1		0.41			
		10:1		0.46			
Orifice plate		Area ratio A/A_0					
		1.5:1		0.85			
		2:1		3.4			
		4:1		29			
		$\geq 6:1$		$2.78 \left(\frac{A}{A_0} - 0.6 \right)^2$			
Sudden enlargement ^c				$\left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$			
90° miter bend (without vanes)				1.1			
	(with vanes)			0.2			
General contraction		(30° included angle)			0.02		
		(70° included angle)			0.07		

Figura 5.8: Coefficienti di perdita K_f per flussi turbolenti tratti da “Mechanics of fluids” di M.C. Potter, D.C. Wiggert

Perdite di carico concentrate nelle valvole

Per quanto riguarda le valvole è preferibile riferirsi ai coefficienti di portata K_v piuttosto che ai coefficienti di perdita K_f in quanto garantiscono una maggiore precisione di calcolo.

Questi valori si possono trovare sui cataloghi delle valvole e si usano applicando la relazione:

$$\Delta p = 101325 \rho_r \left(\frac{Q^2}{K_v^2} \right) \quad (5.52)$$

con

Δp = perdite di carico in Pa;

K_v = coefficiente di portata;

ρ_r = densità rispetto all'acqua;

Q = portata in m^3/h .

Il coefficiente di portata K_v rappresenta quindi la portata di acqua in m^3/h alla temperatura di $20^\circ C$ che passando attraverso la valvola crea una perdita di carico di 1 bar (ossia 101325 Pa).

Perdite di carico per innalzamento

Le perdite di carico per innalzamento sono dovute alla forza che si deve imprimere al fluido per farlo risalire contrastando la forza gravitazionale. Per questo tipo di perdite si utilizza la relazione:

$$\Delta p = \rho g \Delta h \quad (5.53)$$

E' utile fare una considerazione circa l'ordine di grandezza delle perdite concentrate. In sistemi di tubazioni di media lunghezza (circa 100 diametri) le perdite concentrate sono dello stesso ordine di grandezza delle perdite distribuite; per lunghezze minori sono sostanzialmente maggiori mentre per tubazioni molto lunghe (1000 diametri) sono normalmente trascurabili.

5.5 Perdite di carico nei sistemi di tubazioni

E' conveniente esprimere le perdite per attrito negli elementi di tubazione nella forma esponenziale:

$$h_L = R Q^\beta \quad (5.54)$$

nella quale h_L è l'altezza persa oltre la lunghezza L del tubo, R è il coefficiente di resistenza, Q è la portata volumetrica trasmessa e β è l'esponente ($\beta=2$ per

la convenzione di Chazy-Manning).

In generale, il coefficiente di resistenza è funzione della rugosità della tubazione k , del numero di Reynolds, della lunghezza L e del diametro D della tubazione a seconda della formulazione utilizzata per rappresentarlo.

In particolare la relazione di Darcy-Weisbach (Eq. 5.41) può essere sostituita nell'Eq. 5.54. Quando $\beta = 2$ l'espressione di R risulta essere:

$$R = \frac{f L}{2 g D A^2} = \frac{8 f L}{g \pi^2 D^5} \quad (5.55)$$

dove f è il fattore d'attrito. Il diagramma di Moody (figura 5.7) fornisce una chiara rappresentazione della variazione di f in un ampio range di numeri di Reynolds e per diversi valori di rugosità relativa.

Per l'analisi delle reti di tubazioni, è conveniente esprimere f usando formule empiriche nelle quali il fattore d'attrito può essere ottenuto direttamente in funzione del numero di Reynolds e della rugosità relativa. In letteratura esiste un consistente numero di tali relazioni, le quali risultano essere sufficientemente precise per i calcoli di tipo ingegneristico. In particolare la formula di Swamee e Jain (1976), descritta nel paragrafo 5.4.1 risulta fornire soluzioni molto prossime a quelle fornite dalla relazione di Colebrook (Eq. 5.44).

La formula del fattore d'attrito sviluppata da Swamee e Jain è:

$$f = 1,325 \left\{ \ln \left[0,27 \left(\frac{k}{D} \right) + 5,74 \left(\frac{1}{Re} \right)^{0,9} \right] \right\}^{-2} \quad (5.56)$$

Combinando l'Eq. 5.55 e l'Eq. 5.56 troviamo la seguente espressione per il coefficiente di resistenza:

$$R = 1,07 \left(\frac{L}{g D^5} \right) \left\{ \ln \left[0,27 \left(\frac{k}{D} \right) + 5,74 \left(\frac{1}{Re} \right)^{0,9} \right] \right\}^{-2} \quad (5.57)$$

L'Eq. 5.56 e l'Eq. 5.57 sono valide negli intervalli $10^{-8} < k/D < 10^{-2}$ e $5 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^8$. Per regimi di flusso in cui Re ha un effetto trascurabile sul valore di f , deve risultare:

$$Re < \frac{200 D}{k \sqrt{f}} \quad (5.58)$$

Per valori di Re maggiori, il fattore d'attrito è una funzione solo di k/D secondo la relazione:

$$f = 1,325 \left\{ \ln \left[0,27 \left(\frac{k}{D} \right) \right] \right\}^{0,9} \quad (5.59)$$

Due espressioni alternative per le perdite nelle tubazioni, che hanno trovato largo impiego, sono le formule di Hazem-Williams e Chazy-Manning.

Per flussi d'acqua, il valore di R nell'Eq. 5.54 previsto dalla relazione di Hazem-Williams è:

$$R = \frac{K_1 L}{C^\beta D^m} \quad (5.60)$$

nella quale gli esponenti sono $\beta = 1,85$, $m = 4,87$. C è il *coefficiente di Hazem-Williams*, che dipende solo dalla rugosità. La costante K_1 dipende dal sistema di misura: per il SI, $K_1 = 10,59$ mentre per il sistema di misura Inglese, $K_1 = 4,72$.

L'equazione di Chazy-Manning è più comunemente associata a flussi in canali aperti. Per un tubo circolare l'espressione di R risulta:

$$R = \frac{10,29 n^2 L}{K_2 D^{5,33}} \quad (5.61)$$

dove n è il *coefficiente di rugosità di Manning*. $K_2 = 1$ per il SI, $K_2 = 2,22$ per il sistema di misura Inglese.

Un vantaggio nell'usare l'Eq. 5.60 o l'Eq. 5.61 invece dell'Eq. 5.57 è che C ed n dipendono solo dalla rugosità, e non anche dal numero di Reynolds. Comunque l'Eq. 5.57 è consigliata perchè rappresenta con più precisione le perdite per attrito nelle tubazioni. Si noti che le relazioni di Hazem-Williams e Chazy-Manning sono dimensionalmente non omogenee¹ mentre l'equazione di Swamee e Jain (in cui i due parametri k/D e Re influenzano le perdite) è dimensionalmente omogenea.

Le limitazioni delle formule di Hazem-Williams e Chazy-Manning sono qui di seguito esposte. Cominciamo con l'Eq. 5.54: le altezze cinetiche perse h_L calcolate in base al coefficiente di resistenza di Darcy-Wiesbach (Eq. 5.55) con $\beta = 2$ possono essere uguagliate alle altezze cinetiche perse, calcolate in base al coefficiente di Hazem-Williams (Eq. 5.60) con $\beta = 1,85$.

Introducendo il numero di Reynolds per eliminare Q e risolvendo per il fattore d'attrito f si ottiene:

$$f = \frac{1,28 g K_1}{C^{1,85} D^{0,02} (Re \nu)^{0,15}} \quad (5.62)$$

¹In un'equazione dimensionalmente non omogenea le costanti hanno unità di misura assegnata mentre in un'equazione dimensionalmente omogenea le costanti sono adimensionali

Con unità di misura del SI e nel caso di flusso di acqua a 20°C , l'Eq. 5.62 si riduce a:

$$f = \frac{1056}{C^{1,85} D^{0,02} Re^{0,15}} \quad (5.63)$$

Si noti che f è debolmente dipendente da D in questa equazione (esponente molto basso). In modo simile, l'Eq. 5.61 può essere sostituita nell'Eq. 5.54 con $\beta = 2$ ed eguagliata ad h_L basata sulla formulazione di Darcy-Weisbach. Si ottiene:

$$f = \frac{124,5 n^2}{D^{0,33}} \quad (5.64)$$

Una comparazione tra la formula originale di Colebrook (Eq. 5.44) la formula di Swamee-Jain (Eq. 5.56) e le espressioni equivalenti per i coefficienti di Hazem-Williams e Chazy-Manning (Eq. 5.63 ed Eq. 5.64 rispettivamente) è mostrata in figura 5.9 per un tubo di calcestruzzo avente diametro di 1 m riempito d'acqua ($C = 130$, $n = 0,012$, $k/D = 0,00015$). E' evidente che le relazioni di Hazem-Williams e Chazy-Manning sono valide all'interno di un range limitato di Re e l'Eq. 5.56 fornisce una più versatile ed accurata stima delle perdite di carico nelle tubazioni.

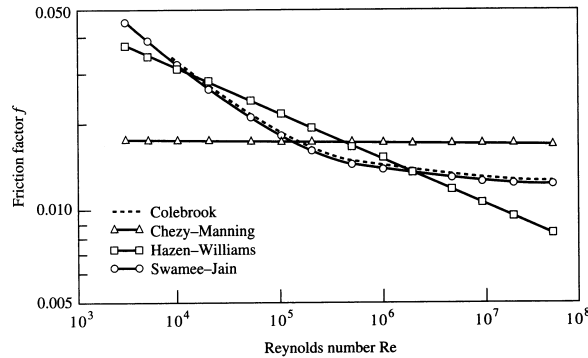


Figura 5.9: Comparazione della formula di Colebrook con le formule approssimate

5.5.1 Tubazioni in serie

Consideriamo il sistema di condotti in serie mostrato in figura 5.10. Esso consiste in N elementi di tubazione ed un numero specifico di componenti con perdite di carico concentrate associate ad ciascun elemento di tubo. La singola perdita di carico concentrata, descritta nel paragrafo 5.4.2, è uguale a $h_L = K_f v^2/2g$. E' conveniente esprimere le perdite concentrate in termini di

portata piuttosto che velocità: si ottiene $h_L = K_f Q^2 / 2gA^2$. Le perdite di carico concentrate per le valvole in termini di altezze cinetiche perse risultano essere $h_L = 101325 Q^2 / g K_v^2$ mentre le perdite per innalzamento sono espresse in termini di dislivello Δh_{inn} . In molte situazioni è conveniente trascurare il termine di energia cinetica in entrata ed uscita: potrebbe essere significativo solo se le velocità risultano particolarmente elevate.

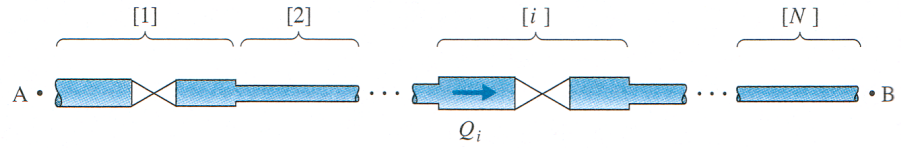


Figura 5.10: Sistema di tubazioni in serie

Assumendo che l'esponente nell'Eq. 5.54 sia $\beta = 2$, l'equazione dell'energia calcolata tra le sezioni A e B di figura 5.10 è:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z \right)_B &= \left(R_1 + \frac{101325}{g \sum K_v^2} + \frac{\sum K_f}{2g A_1^2} \right) Q_1^2 + \dots \\ &\dots + \left(R_N + \frac{101325}{g \sum K_v^2} + \frac{\sum K_f}{2g A_N^2} \right) Q_N^2 + \Delta h_{inn} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(R_i + \frac{101325}{g \sum K_v^2} + \frac{\sum K_f}{2g A_i^2} \right) Q_i^2 + \Delta h_{inn} \end{aligned} \quad (5.65)$$

nella quale:

- R_i è il coefficiente di resistenza per la tubazione i-esima;
- K_f è il coefficiente di perdita;
- K_v è il coefficiente di portata.

L'equazione di continuità per un sistema di tubazioni in serie stabilisce che la portata in ogni elemento sia uguale:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N = Q$$

Sostituendo Q_i con Q l'Eq. 5.65 diventa:

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B = \left[\sum_{i=1}^N \left(R_i + \frac{101325}{g \sum K_v^2} + \frac{\sum K_f}{2 g A_i^2} \right) \right] Q^2 + \Delta h_{inn} \quad (5.66)$$

Si può quindi osservare che nei sistemi di tubazioni in serie le perdite di carico totali sono la sommatoria delle perdite di carico distribuite, concentrate e per innalzamento.

5.6 Bilancio di massa: altezza di equilibrio

Se consideriamo un serbatoio cilindrico, inizialmente vuoto, nel quale fluisce una certa portata Q_{in} , il livello di fluido tenderà ad aumentare fino a quando la portata in uscita Q_{out} non sarà uguale a quella in ingresso. Una volta ottenuta l'uguaglianza tra le due portate, il sistema risulterà in equilibrio ed il livello di fluido presente nel serbatoio resterà costante, prendendo il nome di *altezza di equilibrio*.

Per determinare tale valore, consideriamo un fluido Newtoniano, cioè con viscosità μ indipendente dallo sforzo di taglio τ , ed incomprimibile ($\rho = \text{costante}$) ed impostiamo il bilancio di massa per un volume di controllo equivalente al serbatoio. Risulta:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (5.67)$$

che all'equilibrio, quando cioè è nulla la variazione nel tempo del volume di fluido all'interno del serbatoio ($dV/dt = 0$) fornisce:

$$Q_{in} = Q_{out} \quad (5.68)$$

La portata in uscita può essere espressa in funzione della velocità media (v_{out}) e dell'area (A_{out}) all'uscita :

$$Q_{out} = v_{out} A_{out} \quad (5.69)$$

da cui:

$$v_{out} = Q_{in} / A_{out} \quad (5.70)$$

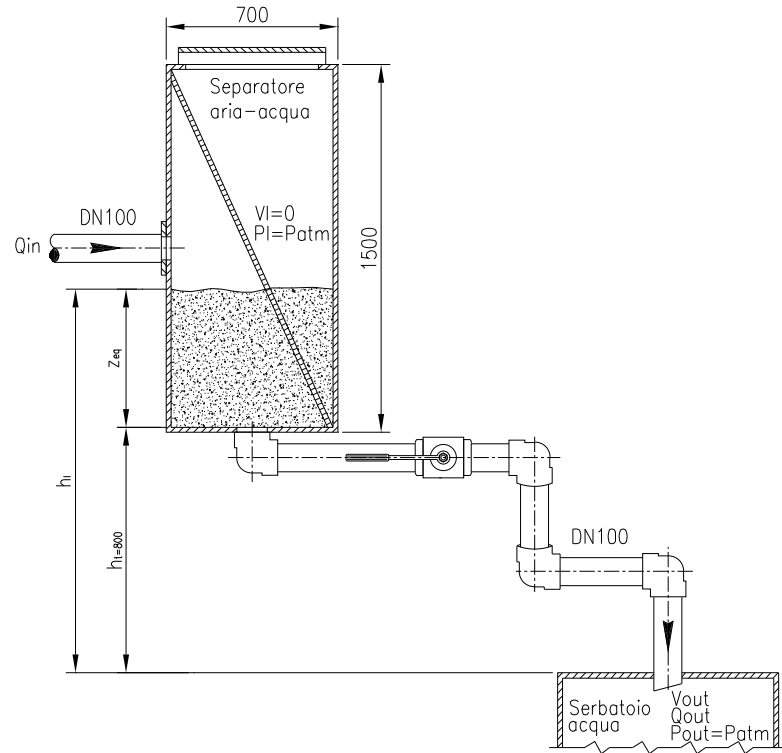


Figura 5.11: Dettaglio separatore per il calcolo dell'altezza di equilibrio

Osservando la figura 5.11 ed applicando l'equazione di Bernoulli tra il pelo libero (indicato con pedice *l*) nel serbatoio e la sezione di uscita della tubazione di scarico (indicata con pedice *out*) si ricava:

$$\frac{p_{out} - p_l}{\rho} + \frac{v_{out}^2 - v_l^2}{2} + g(h_l - h_{out}) = 2f v_{out}^2 \frac{L}{D_{out}} + n_g \left(\frac{1}{2} k_c v_{out}^2 \right) \quad (5.71)$$

Come si può vedere nell'applicare il teorema abbiamo preso in considerazione anche le perdite di carico distribuite lungo la tubazione e le concentrate (nei gomiti dello scarico). La pressione sulla sezione di ingresso ed uscita è pari alla pressione atmosferica, la velocità del fluido sul pelo libero del fluido si può ipotizzare nulla e l'altezza di uscita è pari a zero perchè presa come riferimento. In base a tali ipotesi si può quindi esprimere l'altezza del fluido h_l come:

$$h_l = \frac{v_{out}^2}{2g} \left(1 + n_g k_c + 4 \frac{f L}{D_{out}} \right) \quad (5.72)$$

dove L e D sono rispettivamente la lunghezza ed il diametro della tubazione di scarico, k_c è il numero di altezze cinetiche perse nei gomiti, n_g è il numero di

gomiti ed f è il fattore d'attrito esprimibile tramite la *formula di Blasius* come:

$$\begin{aligned} f &= 0,079 Re^{-\frac{1}{4}} && \text{tubi lisci} \\ f &= 0,04 Re^{-0,16} && \text{tubi commerciali} \end{aligned}$$

con

$$Re = \frac{\rho v_{out} D_{out}}{\mu} \quad (5.73)$$

L'altezza di equilibrio nel separatore, come risulta anche dalla figura 5.11, si esprime quindi come:

$$z_{eq} = h_l - h_t = \left[\frac{v_{out}^2}{2g} \left(1 + n_g k_c + 4 \frac{f L}{D_{out}} \right) \right] - h_t \quad (5.74)$$

dove h_t è la differenza di quota tra l'uscita del separatore e lo scarico nel serbatoio. Come si può osservare l'altezza di equilibrio è direttamente proporzionale al quadrato della velocità di uscita (ossia al quadrato della portata) ed inversamente proporzionale al diametro della tubazione in uscita. A parità di portata quindi tubazioni con diametro maggiore avranno altezze di equilibrio minori. Le perdite di carico distribuite e concentrate non sono trascurabili in quanto si oppongono al passaggio del flusso andando ad influire in maniera determinante sul calcolo accurato dell'altezza di equilibrio.

Vediamo ora come ricavare il tempo di svuotamento del serbatoio nell'ipotesi di $Q_{in} = \text{costante}$. Il bilancio di massa descritto dall'Eq. 5.67, sapendo che $dV = A dh$, può essere riscritto nella forma:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (5.75)$$

ove si è posto $V = A h$ con A = area della sezione circolare del serbatoio. Utilizzando l'Eq. 5.69 si ottiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{in}}{A} - \frac{v_{out} A_{out}}{A} \quad (5.76)$$

che riscritta risulta essere:

$$dt = \frac{dh}{\alpha - \beta \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} h(t)} \quad (5.77)$$

dove

$$\alpha = \frac{Q_{in}}{A} \quad \beta = \frac{A_{out}}{A}$$

mentre dall'Eq. 5.72

$$v_{out} = \sqrt{\frac{2g}{\gamma} h(t)}$$

con

$$\gamma = \left(1 + n_g k_c + 4 \frac{f L}{D_{out}}\right)$$

Integrando fra t e $t + \Delta t$ l'Eq. 5.77 si ottiene:

$$\Delta t = \frac{2}{\beta'} \left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(t + \Delta t)} \right) - \frac{2\alpha}{\beta'^2} \ln \left(\frac{\alpha - \beta' \sqrt{h(t + \Delta t)}}{\alpha - \beta' \sqrt{h(t)}} \right) \quad (5.78)$$

dove

$$\beta' = \beta \sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$$

Operativamente, è preferibile agire tramite discretizzazione dell'Eq. 5.77 che tra t e $t + \Delta t$ fornisce:

$$\Delta t = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\alpha - \beta(v_{out}(t + \Delta t) - v_{out}(t))} \quad (5.79)$$

Quando $t = 0$ si ha $h(t = 0) = z_{eq}$ e $v_{out}(t = 0) = v_{out}(z_{eq})$.

Siccome la velocità v_{out} non ha andamento lineare, utilizzando l'Eq. 5.74 si riesce ad ottenere una mappatura di v_{out} al variare di $h(t)$. Il tempo totale di svuotamento sarà dato da:

$$T = \sum_{i=1}^N \Delta t = \sum_{i=1}^N \left[\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\alpha - \beta(v_{out}(t + \Delta t) - v_{out}(t))} \right] \quad (5.80)$$

con N numero degli intervalli considerati.

5.7 Diametro ottimo pipeline

Per trasportare una certa portata di fluido in una tubazione bisogna spendere una certa quantità di potenza che varia al variare della forza viscosa agente sulle pareti del tubo ed al variare del diametro della tubazione. Siccome il costo delle tubazioni è direttamente proporzionale al diametro si definisce *diametro ottimo* quello che permette di minimizzare i costi per unità di portata di fluido trasportato.

Sulla base di un semplice conto economico si ricavano i valori desiderati che verranno confrontati con le effettive condizioni di lavoro. Il costo delle tubazioni si può esprimere nella forma:

$$C_T = k_T D L \quad (5.81)$$

dove $k_T D$ è il costo per metro di tubo (proporzionale al diametro) mentre L è la lunghezza della tubazione. Il costo C_T è un costo complessivo in quanto comprende i costi di costruzione ed i costi dei componenti della linea. A questi va aggiunto il costo della stazione di pompaggio che risulta essere proporzionale alla potenza installata secondo l'espressione:

$$C_P = k_P P \quad (5.82)$$

dove k_P è il costo per Watt installato.

Se l'impianto è destinato a funzionare per un determinato numero di anni N , il costo totale di investimento per anno d'esercizio risulta:

$$C_I = \frac{k_T D L + k_P P}{N} \quad (5.83)$$

Il costo di pompaggio per anno di funzionamento C_E è uguale alla potenza spesa per le ore di funzionamento annuali H per il costo orario della potenza elettrica k_E :

$$C_E = k_E P H \quad (5.84)$$

La potenza della pompa installata si esprime come:

$$P = \frac{\Delta p Q}{\eta} \quad (5.85)$$

con Q portata volumetrica e η efficienza della pompa.

Consideriamo, per semplificare il ragionamento ed i calcoli, che le tubazioni siano lisce e quindi per moto turbolento:

$$\Delta p = \frac{2 f \rho v^2 L}{D} \quad (5.86)$$

dove il fattore d'attrito risulta essere:

$$f = 0,079 Re^{-\frac{1}{4}} \quad (5.87)$$

Il costo totale per anno risulta quindi essere:

$$\begin{aligned} C_{TOT} &= C_I + C_E = \frac{k_T D L}{N} + \frac{k_P P}{N} + k_E P H \\ &= \frac{k_T D L}{N} + P \left(\frac{k_P}{N} + k_E H \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Se poniamo:

$$\lambda_1 = \frac{k_T}{N} \quad \lambda_2 = \frac{k_P}{N} + k_E H$$

ed utilizziamo l'Eq. 5.85, l'Eq. 5.86, l'Eq. 5.87 otteniamo:

$$C_{TOT} = \lambda_1 D L + \frac{0,24 \lambda_2 L}{\eta} \left(\frac{\rho^{0,75} \mu^{0,25} Q^{2,75}}{Q^{2,75}} \right) \quad (5.89)$$

Il diametro ottimo che permette di minimizzare i costi totali si ottiene ponendo $dC_{TOT}/dD = 0$. Il risultato ottenuto è:

$$D_{opt} = \left(\frac{1,14 \lambda_2}{\lambda_1 \eta} \rho^{0,75} \mu^{0,25} Q^{2,75} \right)^{-\frac{1}{5,75}} \quad (5.90)$$

Da questa espressione si può ricavare anche la velocità ottima. Infatti sapendo che $v_{opt} = 4 Q / \pi D_{opt}^2$ si ottiene:

$$v_{opt} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\lambda_1 \eta}{1,14 \lambda_2} \right)^{\frac{1}{2,75}} \frac{D^{\frac{1}{11}}}{\rho^{\frac{3}{11}} \mu^{\frac{1}{11}}} \quad (5.91)$$