

# METODO AI VOLUMI FINITI

1

III A

Metodo numerico che utilizza le equazioni di conservazione in forma integrale e ne crea una forma discretizzata tramite suddivisione del dominio computazionale in una serie finita di VOLUMI DI CONTROLLO (CV) contigui.

Le eq. di conservazione sono quindi applicate a ciascun CV, al cui centroide si trova il punto griglia (o NODO COMPUTAZIONALE) rispetto al quale vanno espressi i valori delle variabili in gioco.

Questo implica che se vogliamo proiettare i valori delle varie variabili sulle facce del CV dobbiamo interpolare.

## VANTAGGI DEL M.V.F.

- si adatta a domini di qualsiasi forma perché consente di generare qualsivoglia tipo di griglia.

La griglia definisce solo i contorni (ovvero le facce) del CV e quindi non c'è bisogno di associarlo ad un particolare sistema di riferimento.

- il metodo è conservativo per costruzione, basta che gli integrali di superficie (che rappresentano eventuali termini convettivi e/o flussi diffusivi presenti nell'equazione di conservazione) siano gli stessi per

i CV che condizionano un contorno (i.e. una faccia).

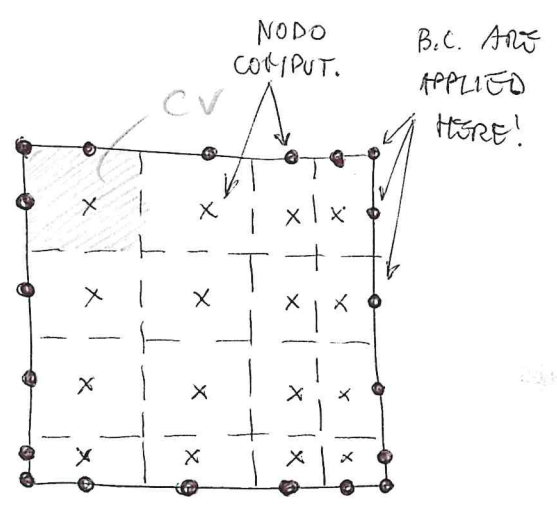
- Il metodo è facile da implementare e ciascuno dei termini che si deve approssimare ha un proprio significato fisico.

### SVANTAGGIO DEL M.V.F.

- lo svantaggio principale è che è complicato (molto più che con le F.D.) implementare metodi numerici di ordine superiore al secondo in problemi 3D. Ciò è dovuto al fatto che vi sono 2 livelli di approssimazione: INTERPOLAZIONE + INTEGRAZIONE

### GENERAZIONE DEI VOLUMI FINITI

Per semplicità faremo riferimento ad una griglia Cartesiana.



Esempio di griglia FV:  
 prima definisco i CV e poi disegno i nodi comput. al centro di ciascun CV

Possibile alternativa: prima definisco la distribuzione (3  
me dei nodi e poi ci costruisco i CV intorno. In  
 questo secondo caso, è più accurato approssimare le  
 derivate tramite uno schema CDS perché lo faccio  
 e' a metà strada fra 2 punti/nodi.

Lo svantaggio è che il valore nodale rappresenta  
 il valor medio valutato sul volume del CV in maniera  
 meno precisa, in quanto il nodo è nel centroide  
 del CV, NON nel centro.

Punto di partenza sono le equazioni di conservazione  
 scritte in forma integrale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{CV} \phi dV}_{\text{Accumulo di } \phi} + \underbrace{\int_{CS} \vec{n} \cdot \vec{F}_\phi dS}_{\substack{\text{Flusso di } \phi \\ \text{attraverso una} \\ \text{faccia del CV}}} = \underbrace{\int_{CV} P_\phi dV}_{\substack{\text{Produzione di } \phi \\ \text{internamente} \\ \text{al volume del CV}} \quad (*)$$

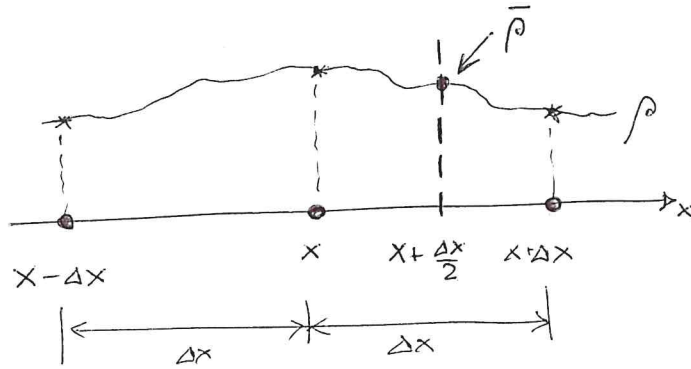
Supponiamo che  $\phi$  sia la massa di fluido contenuta  
 in un CV. Allora, l'equazione (\*) diventa l'equazione  
 di conservazione della massa nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dx + \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx = 0 \quad [A]$$

con  $P_\phi = 0!$

In questa equazione:  $\rho = \rho(x, t)$

4



Definiamo  $\bar{\rho} \triangleq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \rho dx \Rightarrow \int_x^{x+\Delta x} \rho dx = \Delta x \cdot \bar{\rho} \quad [B]$

Se applichiamo la [B] alla [A] avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta x \cdot \bar{\rho}) + \left( \underbrace{[\rho u]_{x+\Delta x}}_{\text{Flusso di massa uscente dal CV}} - \underbrace{[\rho u]_x}_{\text{Flusso di massa entrante nel CV}} \right) = 0$$

⇓

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x} \left( [\rho u]_{x+\Delta x} - [\rho u]_x \right)}$$

↑  
Variazione media di massa nel CV

In 2D, ovvero se  $\rho = \rho(x, y, t)$ , avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \rho dx dy + \iint \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dx dy = 0$$

Definendo :  $\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint \rho \, dx \, dy$

avremo :  $\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \Delta x \Delta y) + \int_{cs} \underbrace{\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}}_{\text{Flusso di massa}} = 0$



$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{cs} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

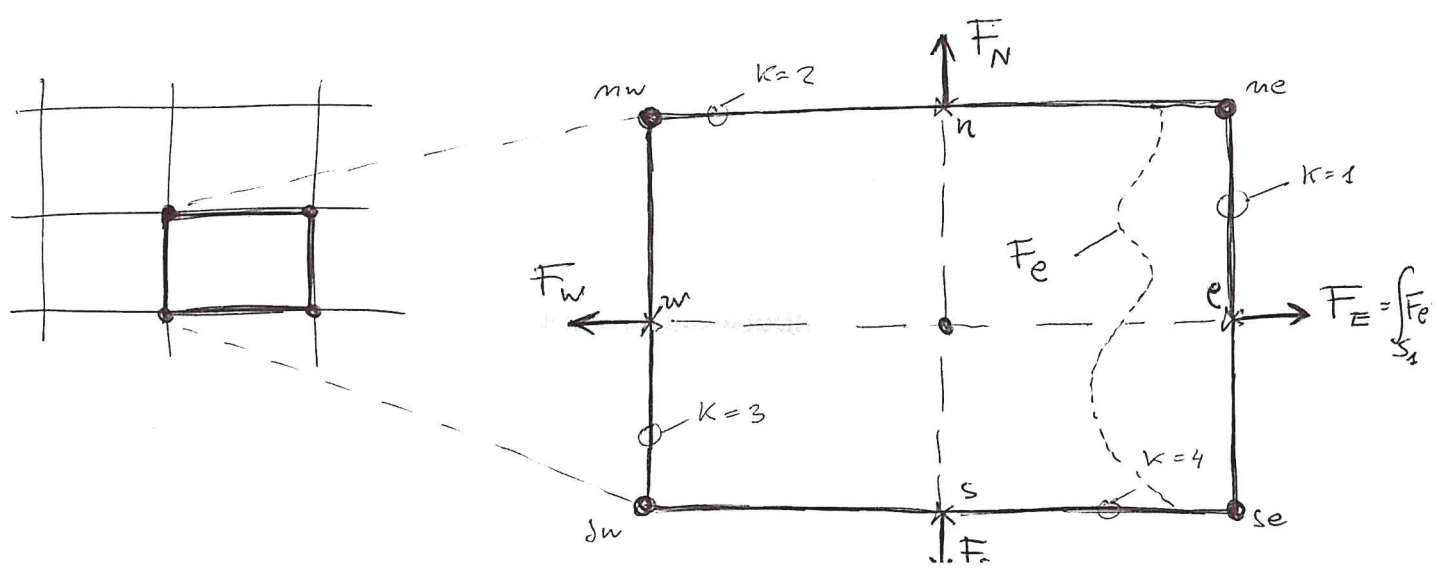
Definiamo anche  $\rho \vec{u} = \vec{F} \Rightarrow \int_{cs} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{cs} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Questo integrale è approssimabile come una sommatoria :

$$\int_{cs} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^N \left( \int_{S_k} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right)$$

con  $S_k =$  generica faccia del CV

$N =$  numero di facce del CV ( $N=4$  in 2D,  $N=6$  in 3D)



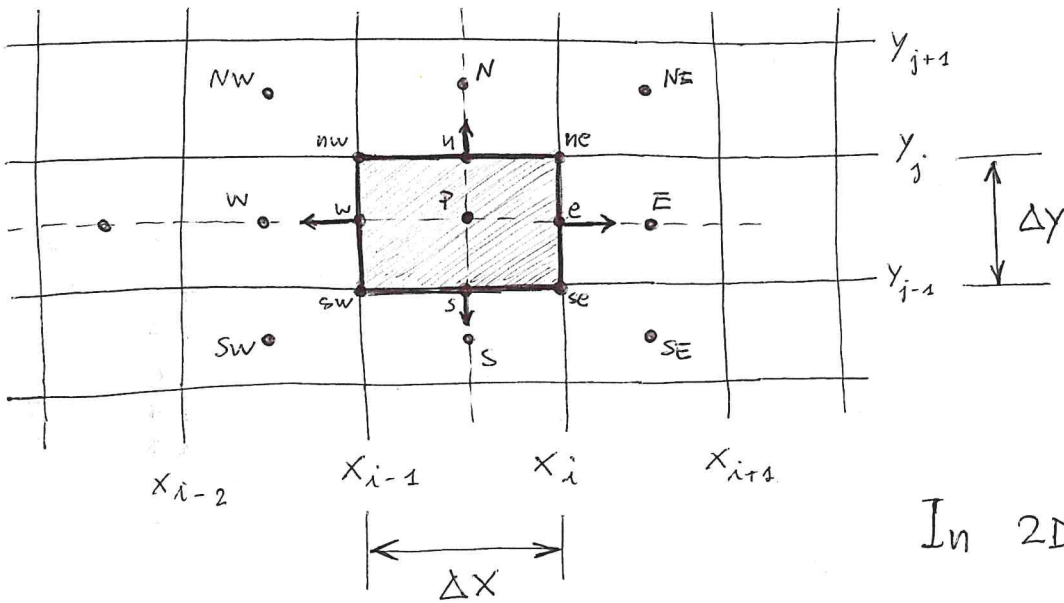
Ord :

$$F_E = \int_{S_1} F_e dS_1 \quad \text{SULLA FACCIA "e" } [S_1 = S_e]$$

PROBLEMA: come effettuare l'integrale appena scritto?

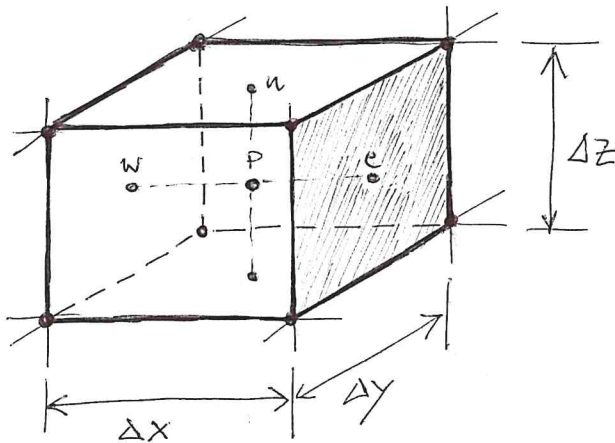
• APPROSSIMAZIONE DEGLI INTEGRALI DI SUPERFICIE

• MIDPOINT RULE :  $\int_{S_e} F_e dS_e \approx \bar{F}_e \cdot S_e$  con  $\bar{F}_e =$  valore di  $F_e$  nel punto centrale della faccia e con  $S_e =$  area della faccia.



In 2D :  $S_e = \Delta y$

In 3D :  $S_e = \Delta y \cdot \Delta z$



$$\begin{aligned} \text{In 2D : } \int_{S_e} F_e dS_e &\approx \\ &\approx \int_0^{\Delta y} F_e dy \approx F_e\left(\frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta y \end{aligned}$$

APPROSSIMAZIONE DEL II° ORDINE

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f(c) \\ c = \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad (*)$$

ERRORE DI TRONCAMENTO :  $\frac{f''(c) \cdot (b-a)^3}{24} \Rightarrow \frac{F_e''\left(\frac{\Delta y}{2}\right) \cdot (\Delta y)^3}{24}$

• TRAPEZOID RULE :  $\int_{S_e} F_e dS_e \cong \frac{S_e}{2} \cdot [F_{ne} + F_{se}]$

com  $F_{ne}$ ,  $F_{se}$  = valore di  $F$  sui due vertici (ne, se) della faccia in esame.

In 2D :  $\int_{S_e} F_e dS_e \cong \frac{\Delta Y}{2} \cdot [F_{ne} + F_{se}] + \mathcal{O}(\Delta Y^3)$

$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot (f(a) + f(b))}_{T}$  ERRORE DI TRONC. ERRORE DI TRONCAMENTO  
 $- \frac{f''(c)(b-a)^3}{12} \Rightarrow \frac{F_e''(\frac{\Delta Y}{2})(\Delta Y)^3}{12}$

Questo metodo di approssimazione dell' integrale di superficie è accurato al II° ORDINE nello spazio.

• SIMPSON'S RULE :  $\int_{S_e} F_e dS_e \cong \frac{S_e}{6} (F_{ne} + 4F_e + F_{se})$

In 2D :  $\int_{S_e} F_e dS_e \cong \frac{\Delta Y}{6} \cdot [F_{ne} + 4F_e + F_{se}] + \mathcal{O}(\Delta Y^5)$

$\int_a^b f(x) dx = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}T = S$  ERRORE DI TRONCAMENTO  
 $- \frac{f''''(c)(b-a)^5}{90} \Rightarrow \frac{F_e''''(\frac{\Delta Y}{2})(\Delta Y)^5}{90}$  ERRORE DI TRONCAMENTO

Questo metodo di approssimazione è accurato al IV° ordine nello spazio.

L' approssimazione dell' integrale richiede l' utilizzo di valori della funzione da integrare sulla faccia della cella. Poiché tipicamente i valori noti sono quelli sui centri delle (ovvero sul centro del CV), è necessario interpolare.

Servizi quindi uno schema di interpolazione accurato  $\angle 8$   
 al II° ordine da accoppiare a midpoint rule o trapezoid  
 rule, mentre serve uno schema accurato al IV° ordine per  
 mantenere/preservare l'ordine garantito dalla Simpson's rule.

• GENERALIZZAZIONE DI TRAPEZOID RULE E SIMPSON RULE

✓ TRAPEZOID RULE

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{N} \quad ; \quad x_0 = a \quad ; \quad x_n = b$$

Se  $N=1$  allora :  $h = b-a$  ,  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$

$$e : \int_a^b f dx \approx \frac{b-a}{2} \left[ f(x_0=a) + f(x_n=b) \right] \quad \text{c.v.d.}$$



$$\int_{S_e} F_e dS_e = \int_0^{\Delta y} F_e dy \approx \frac{\Delta y}{2} (F_{se} + F_{ne}) \quad \text{c.v.d.}$$

Se  $N=2$  allora :  $h = \frac{b-a}{2}$

$$e : \int_a^b f dx \approx \frac{b-a}{2} \left[ \frac{1}{2} f(x_0=a) + f(x_1 = \frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2} f(x_n=b) \right]$$



$$\int_{S_e} F_e dS_e = \int_0^{\Delta y} F_e dy \approx \frac{\Delta y}{4} (F_{se} + 2F_e + F_{ne}) \quad \text{c.v.d.}$$

# V SIMPSON RULE

19

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{2}{3} f(x_2) + \frac{4}{3} f(x_3) + \dots + \frac{2}{3} f(x_{N-2}) + \frac{4}{3} f(x_{N-1}) + \frac{1}{3} f(x_N) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{N} \quad ; \quad x_0 = a \quad ; \quad x_N = b$$

Se  $N=2$  allora :  $h = \frac{b-a}{2}$  ;  $x_2 = \dots = x_{N-1} = 0$

$$e : \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[ \frac{1}{3} f(x_0=a) + \frac{4}{3} f(x_1 = \frac{a+b}{2}) + \frac{1}{3} f(x_N=b) \right]$$

$$\approx \frac{b-a}{6} \left[ f(x_0=a) + 4 f(x_1 = \frac{a+b}{2}) + f(x_N=b) \right]$$



$$\int_{S_e} F_e dS_e = \int_0^{\Delta y} F_e dS_e = \frac{\Delta y}{6} [F_{se} + 4F_e + F_{ne}] \text{ c.v.d.}$$

## • APPROSSIMAZIONE DEGLI INTEGRALI DI VOLUME

- MIDPOINT RULE :  $\int_{CV} P_\rho dV \approx \bar{P}_\rho \cdot V$  con  $\bar{P}_\rho =$  valore di  $P_\rho$  nel centro del CV e con  $V =$  volume del CV.

In 2D:  $V = \Delta x \Delta y$  , In 3D:  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$

La midpoint rule fornisce un'approssimazione esatta 10 dell'integrale se  $P_\phi$  è costante o varia linearmente nel CV. Altrimenti è accurata al II° ORDINE.

Non è richiesta interpolazione perché si usa il valore della variabile nel centro del CV.

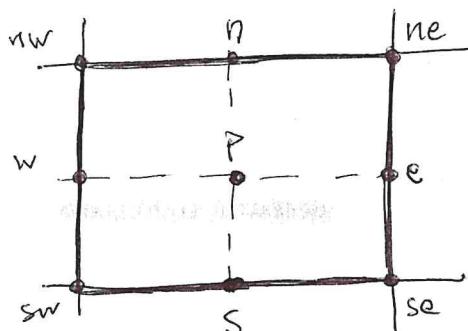
Approssimazioni dell'integrale di volume di ordine più elevato richiedono valori di  $P_\phi$  non solo nel centro del CV ma anche in altri punti e si rende quindi necessaria l'interpolazione!

### • BI-QUADRATIC SHAPE FUNCTION (in 2D)

Sfruttiamo il fatto che in 2D l'integrale di volume è in realtà un integrale d'area:

$$P_\phi(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2 \quad (*)$$

I nove coefficienti  $a_0, \dots, a_8$  si ottengono facendo un fitting della (\*) coi valori di  $P_\phi$  sui seguenti punti nel CV:



Utilizzando il metodo FV su griglia 2D Cartesiana 11  
 ma, l'integrale diventa:

$$\int_{cv} P_{\phi} dV \cong \Delta x \Delta y \left[ a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta x)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta x \Delta y)^2 \right]$$

$$a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$$

Questa approssimazione è accurata al IV° ORDINE.

Per griglia Cartesiana uniforme si trova:

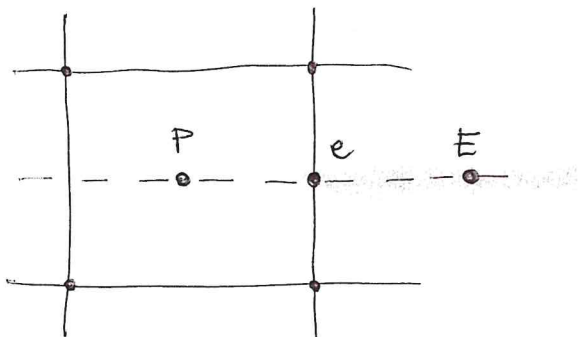
$$\int_{cv} P_{\phi} dV \cong \frac{\Delta x \Delta y}{36} \left[ 16 P_{\phi}|_P + 4(P_{\phi}|_s + P_{\phi}|_n + P_{\phi}|_w + P_{\phi}|_e) + (P_{\phi}|_{se} + P_{\phi}|_{sw} + P_{\phi}|_{ne} + P_{\phi}|_{nw}) \right]$$

Valore di  $P_{\phi}$  nel centro del CV

Valori di  $P_{\phi}$  sui vertici del CV o nel centro delle facce → richiedono interp.!

## PRATICHE DI INTERPOLAZIONE

### INTERPOLAZIONE LINEARE:



$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e)$$

$$\text{con } \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

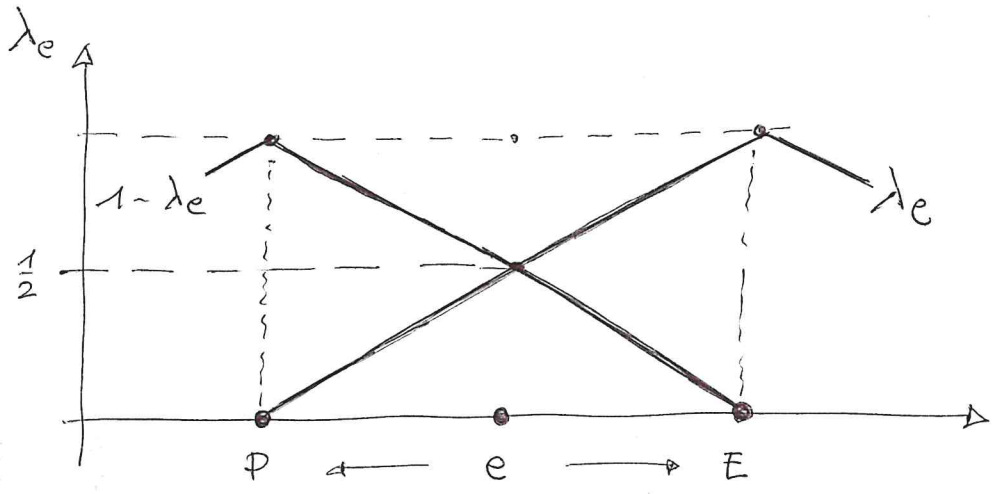
Espressione accurata al II° ordine!

Cominciando dall'interpolazione lineare (1D) con FV

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) + \underbrace{\frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P}_{\text{Leading truncation error}} + \text{h.o.t.}$$

⊗ Leading truncation error  $\propto (\Delta x^2)$

WARNING: può produrre oscillazioni spurie nella soluzione



DIMOSTRAZIONE DI ⊗ :

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \text{h.o.t.}$$

$$\phi_E = \phi_P + (x_E - x_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_E - x_P)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \text{h.o.t.}$$

⇓

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \cong \frac{\phi_e - \phi_P}{x_e - x_P} - \frac{(x_e - x_P)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \cong \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} - \frac{(x_E - x_P)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P$$

⇓

$$\frac{\phi_e - \phi_P}{x_e - x_P} - \frac{(x_e - x_P)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} - \frac{(x_E - x_P)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P$$

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{X_E - X_P} \cdot (X_e - X_P) + \phi_P + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_P \left( \frac{X_e - X_P}{2} - \frac{X_E - X_P}{2} \right) (X_e - X_P) \\ &= \underbrace{\phi_E \cdot \frac{X_e - X_P}{X_E - X_P}}_{\lambda_e} + \underbrace{\phi_P \left( 1 - \frac{X_e - X_P}{X_E - X_P} \right)}_{1 - \lambda_e} + \underbrace{\frac{(X_e - X_P)(X_e - X_E)}{2}}_{\text{leading term in truncation error}} \end{aligned}$$

Tramite interpolazione lineare e - se possibile - dare un' approssimazione del gradiente di  $\phi$ , che torna utile per valutare flussi di tipo diffusivo:

$$\phi_E = \phi_e - (X_E - X_e) \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e + \frac{(X_E - X_e)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_e - \frac{(X_E - X_e)^3}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_e$$

$$\phi_P = \phi_e + (X_P - X_e) \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e + \frac{(X_P - X_e)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_e + \frac{(X_P - X_e)^3}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_e$$



$$\begin{aligned} \phi_E - \phi_P &\cong (X_E - X_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e + \frac{-(X_P - X_e)^2 + (X_E - X_e)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_e \\ &\quad - \frac{(X_P - X_e)^3 + (X_E - X_e)^3}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_e \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{X_E - X_P} + \frac{(X_P - X_e)^2 - (X_E - X_e)^2}{2(X_E - X_P)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_e - \frac{(X_e - X_P)^3 + (X_E - X_e)^3}{6(X_E - X_P)} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_e$$

Si trova:

NOT UNCONDITIONALLY STABLE!

14

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \cong \frac{\phi_E - \phi_P}{X_E - X_P}$$

Valore se  $\phi$  varia linearmente tra P ed E ovviamente!

Con:

ERRORE  
DI  
TRONCATAMENTO

$$\epsilon_T = \frac{(X_e - X_P)^2 - (X_E - X_e)^2}{2(X_E - X_P)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_e - \frac{(X_e - X_P)^3 + (X_E - X_e)^3}{6(X_E - X_P)} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_e + \text{h.o.t.}$$

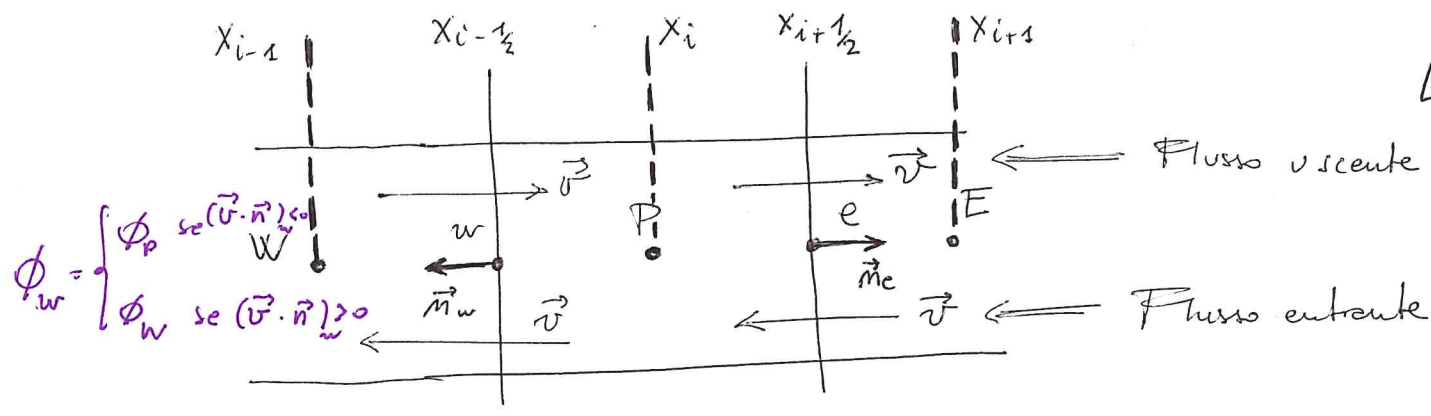
Se il punto "e" sta a metà tra P ed E (cosa che accade se la griglia è uniforme o se generiamo i volumi finiti secondo l'approccio vertex-centered) allora l'approssimazione  $e^-$  del II° ordine perché scompare il I° termine nella RHS ed il leading term per  $\epsilon_T$  diventa proporzionale a  $(\Delta x)^2$ . Se invece la griglia è non-uniforme allora l'approssimazione ha ordine pari a  $(\Delta x_j \cdot \tau_e)$  con  $\tau_e =$  coefficiente di espansione/contrazione della griglia.

### △ INTERPOLAZIONE UPWIND (UPWIND DIFFERENCING, SKETCH)

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{se } (\vec{v} \cdot \vec{m})_e > 0 \\ \phi_E & \text{se } (\vec{v} \cdot \vec{m})_e < 0 \end{cases}$$

CONDIZIONE DI FLUSSO USCENTE DA "e"

CONDIZIONE DI FLUSSO ENTRANTE DA "e"



L' approssimazione UDS appena scritta :

- soddisfa in maniera incondizionata il criterio della boundedness della soluzione  $\rightarrow$  non fornisce quindi oscillazioni nelle soluzioni
- può produrre DIFFUSIONE NUMERICA :

$$\phi_e = \phi_p + (x_e - x_p) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p + \frac{(x_e - x_p)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_p + h.o.t.$$

[ se  $(\vec{v} \cdot \vec{m})_e > 0$  con griglia Cartesian ]

$\hookrightarrow \phi_e \approx \phi_p$

$$\epsilon_T = \underbrace{(x_e - x_p) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p}_{\text{Leading term}} + \frac{(x_e - x_p)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_p + h.o.t.$$

Il leading term nell' errore di truncamento è diffusivo nel senso che ha la stessa forma di un flusso diffusivo:

$$F_\phi = \Gamma \cdot \text{grad } \phi \Rightarrow \boxed{\Gamma_e^{num} = (\rho v)_e \cdot (x_e - x_p)}$$

$\Updownarrow$   
 $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$

COEFF. DI DIFFUSIONE NUMERICA (o ARTIFICIALE)

I problemi di diffusione numerica si semplificano in 16 flussi multidimensionali soprattutto se il flusso non è ortogonale alle facce del CV: in questo caso, l'errore di troncamento produce diffusione numerica non solo in direzione orizzontale ma anche in direzione verticale.

Conseguenza di ciò è che i picchi e le variazioni rapide delle variabili vengono "uccise", a meno che non si usino griglie molto raffinate (molto anche perché il tasso di riduzione dell'errore è solo del I° ordine).

### △ INTERPOLAZIONE UPWIND QUADRATICA (QUICK)

[Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics]

L'idea di base è quella di approssimare l'andamento delle variabile da calcolare tramite una parabola fra P ed E (invece di una linea retta come fatto con l'interpolazione lineare). Per costruire la parabola non bastano P ed E: serve un terzo punto.

In accordo col concetto di CONVEZIONE, il terzo punto si prende in direzione upstream ovvero:

- W se il flusso va da P ad E (ovvero se  $v_x > 0$ )
- EE se il flusso va da E a P (ovvero se  $v_x < 0$ )

$$\phi_e \approx \begin{cases} g_1 \phi_E - g_2 \phi_w + (1 - g_1 + g_2) \phi_P & \text{se } v_x > 0 \\ g_3 \phi_P - g_4 \phi_{EE} + (1 - g_3 + g_4) \phi_E & \text{se } v_x < 0 \end{cases}$$

con :

$$g_1 = \frac{(2 - \lambda_{e,w}) \lambda_{e,P}^2}{1 + \lambda_{e,P} - \lambda_{e,w}}$$

$$g_2 = \frac{(1 - \lambda_{e,P})(1 - \lambda_{e,w})^2}{1 + \lambda_{e,P} - \lambda_{e,w}}$$

$$g_3 = \frac{(1 + \lambda_{e,w})(1 - \lambda_{e,P})^2}{1 + \lambda_{e,E} - \lambda_{e,P}}$$

$$g_4 = \frac{\lambda_{e,P} \cdot \lambda_{e,E}^2}{1 + \lambda_{e,E} - \lambda_{e,P}}$$

→ Stesso denominatore

Chiedimento :  $\lambda_{e,w} = \frac{X_e - X_P}{X_w - X_P}$  ;  $\lambda_{e,E} = \frac{X_E - X_e}{X_E - X_{EE}}$  ;

$$\lambda_{e,P} = \frac{X_e - X_P}{X_E - X_P}$$

Con griglia uniforme abbiamo :  $\lambda_{e,w} = \lambda_{e,E} = \lambda_{e,P} = \frac{1}{2}$

e :

$$g_1 = \frac{(2 - \frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow g_1 = \frac{3}{8}$$

$$g_2 = \frac{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})^2}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow g_2 = \frac{1}{8}$$

$$g_3 = \frac{(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})^2}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow g_3 = \frac{3}{8}$$

$$g_4 = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow g_4 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow (1 - g_1 + g_2) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \equiv (1 - g_3 + g_4) !!!$$

Pertanto, con griglia uniforme:

18

$$\phi_e \approx \begin{cases} \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W + \frac{6}{8} \phi_P & \text{se } v_x > 0 \\ \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{EE} + \frac{6}{8} \phi_E & \text{se } v_x < 0 \end{cases}$$

L'errore di troncamento associato all'interpolazione QUICK è del terzo ordine. Il leading term è:

$$\epsilon_T = - \frac{3(\Delta x)^3}{48} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_{P/E} \sim \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

Lo schema QUICK è quindi accurato al secondo ordine.

NOTE:

- ✓ Lo schema QUICK utilizzato in combinazione con la midpoint rule per l'approssimazione degli integrali di superficie produce uno schema che, complessivamente, mantiene un'accuratezza del II° ordine (i.e. quello dello schema QUICK)
- ✓ Lo schema QUICK è più accurato dello schema CDS (perché usa uno stencil di 3 punti invece che 2: in 2D vengono coinvolti anche i nodi NN, SS, EE, WW) però converge asintoticamente come un second'ordine e le differenze

## ▲ SCHEMI DI ORDINE ELEVATO ( $> 3!$ )

19

Si usano solo se le formule per l'approssimazione degli integrali sono di ordine  $> 3$  (ad es., la Simpson rule!).

Lo schema si basa sull'idea di fare un fitting polinomiale su almeno quattro punti, due per parte rispetto ad "e" : W, P, E ed EE) :

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

↓

Fitting su W, P, E ed EE

↓

Trovo  $a_i$  e  $\phi_e$

↓

$$\phi_e = \frac{27\phi_p + 27\phi_E - 3\phi_w - 3\phi_{EE}}{48}$$

Vale su una griglia Cartesianiana uniforme

Per la derivata:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = \frac{27\phi_E - 27\phi_p + \phi_w - \phi_{EE}}{24 \Delta x}$$

Una volta noti  $\phi_e$  e  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$  si può interpolare e ottenere il valore della funzione e della derivata in ogni punto della griglia.

L'uso di formule per l' approssimazioni degli integrali e di schemi di interpolazione di ordine elevato, però, può richiedere "molecole computazionali" (ovvero l'insieme di punti nei quali è necessario conoscere il valore delle variabile da calcolare) troppo dense per consentire calcoli di tipo implicito.

Ad es., in 2D l'uso combinato della Simpson's rule con interpolazione polinomiale del IV° ordine impone che ciascun flusso dipenda da 15 valori nodali per un totale di 25 valori per ciascun CV. Risolvere il corrispondente sistema (NON-LINEARE!) di equazioni algebriche risulterebbe appunto costoso computazionalmente.

Una via alternativa è quella di procedere per via esplicita nel seguente modo:

$$F_e = F_e^L + \beta (F_e^H - F_e^L)^{OLD}$$

SIMPLIFIES THE ITERATIVE SOLUTION METHOD WITH HIGHER-ORDER SCHEMES

DEFERRED CORRECTION

[CORREZIONE DIFFERITA]

con  $F_e$  = flusso da calcolare

$F_e^L$  = flusso approssimato con un Low-order scheme

$F_e^H$  = flusso approssimato con un High-order scheme

( )<sup>OLD</sup> = valori alla iterazione precedente

$\beta \in [0, 1]$  = blending coefficient (se  $\beta \neq 0$  allora faccio mix tra i due schemi)

CONDIZIONI AL CONTORNO

- ✓ Va scritta un'equazione algebrica per ciascun CV
- ✓ Gli integrali di volume si calcolano allo stesso modo per ciascun CV
- ✓ I flussi attraverso facce di un CV che coincidono col contorno del dominio richiedono particolare attenzione :

- Con B.C. di Dirichlet, il flusso convettivo è immediatamente disponibile mentre il flusso diffusivo richiede di approssimare il gradiente sul contorno.
- Con B.C. di Neumann, il flusso diffusivo è immediatamente disponibile mentre il flusso convettivo si ricava dall'approssimazione discreta del gradiente.

- ✓ I flussi convettivi sono imposti con INFLOW BOUNDARY
- ✓ I flussi convettivi sono zero con IMPERMEABLE BOUNDARY o in corrispondenza di SYMMETRY PLANES
- ✓ I flussi diffusivi possono essere imposti in corrispondenza di pareti solide (e.g. flusso termico).