METODI PER LA DETERMINAZIONE DELL'INTERVALLO DI STABILITA'

Abbiamo visto come errori di troncamento e/o di round-off possono produrre perturbazioni durante la risoluzione numerica dell'equazione algebrica che approssima la PDE di partenza. Se la risoluzione viene effettuata scegliendo valori dei parametri di calcolo che rendono instabile lo schema numerico adottato, allora tali perturbazioni possono amplificarsi producendo oscillazioni non fisiche nella soluzione.

Dette:

- ϕ_j^{n+1} : soluzione esatta dell'equaz. algebrica (o FDE)
- ψ_j^{n+1} : soluzione numerica dell'equaz. algebrica

possiamo definire : $\boxed{\xi_j^{n+1} = \phi_j^{n+1} - \psi_j^{n+1}}$ [errore commesso nel nodo j al time step n+1]

Un certo metodo numerico è stabile se l'errore ξ_j^{n+1} si accumula in maniera trascurabile.

Si può dimostrare che, nel caso di equazioni algebriche lineari, l'errore ξ soddisfa la medesima equazione che soddisfano ϕ e ψ.

Ad es. : $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \xrightarrow{FTCS} \phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \alpha \Delta t \left(\dfrac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right.$

$$[A] \quad \phi_j^{n+1} = C_o \cdot \phi_{j-1}^{n} + (1-2C_o)\phi_j^{n} + C_o \cdot \phi_{j+1}^{n} \qquad j=2,\dots,N-1$$

con $C_o = \dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$. Poiché la soluzione che effettivamente si sta calcolando è ψ_j^{n+1} l'equazione algebraica diventa:

$$[B] \quad \psi_j^{n+1} = C_o \cdot \psi_{j-1}^{n} + (1-2C_o)\psi_j^{n} + C_o \psi_{j+1}^{n} \qquad j=2,\dots,N-1$$

Sottraendo l'eq. [B] dalla [A] si trova proprio:

EQ. DI PROPAGAZIONE DELL'ERRORE

$$[C] \quad \xi_j^{n+1} = C_o \cdot \xi_{j-1}^{n} + (1-2C_o)\xi_j^{n} + C_o \cdot \xi_{j+1}^{n} \qquad j=2,\dots,N-1$$

mentre si assume $\boxed{\xi_1^{n+1} = \xi_N^{n+1} = 0}$ (ovvio per Dirichlet B.C.).

Vediamo per una tale equazione quali metodi sono utilizzabili per determinare l'intervallo di stabilità dello schema numerico.

METODO DELLE MATRICI

Consiste nell'esprimere l'equazione di propagazione dell'errore in forma matriciale e nell'analizzare gli autovalori della matrice così ottenuta.

Nel caso dell'eq. $\partial\phi/\partial t - \alpha\, \partial^2\phi/\partial x^2 = 0$ discretizzata con schema FTCS l'eq. di propagazione dell'errore è la [C], che in forma matriciale diventa:

$$\boxed{\underbrace{[\xi]^{n+1}}_{\text{vettore}} = \underbrace{A}_{\text{matrice}}\ \underbrace{[\xi]^{n}}_{\text{vettore}}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\xi_2^{n+1}\\ \vdots \\ \xi_{N-1}^{n+1}\end{bmatrix}}_{\text{VETTORE }(N-1)\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2C_0 & C_0 & 0 & \dots & 0\\ C_0 & 1-2C_0 & C_0 & \dots & 0\\ 0 & C_0 & 1-2C_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & C_0 & 1-2C_0\end{bmatrix}}_{\text{MATRICE }(N-1)\times(N-1)} \underbrace{\begin{bmatrix}\xi_2^{n}\\ \vdots\\ \xi_{N-1}^{n}\end{bmatrix}}_{\text{VETTORE }(N-1)\times 1}$$

L'errore ξ^n risulta limitato (bounded) all'aumentare di n (ove all'aumentare del numero dei time step) se gli autovalori λ della matrice A sono tutti distinti ed hanno valore assoluto minore o uguale ad uno:

$$\boxed{|\lambda| \leq 1 \qquad \forall \lambda}$$

Calcolo degli autovalori della matrice A. Poniamo la matrice nella seguente forma:

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & a & b & c & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \bullet\ a = C_0 \\ \bullet\ b = 1-2C_0 \\ \bullet\ c = C_0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} b-\lambda & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a & b-\lambda & c & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & a & b-\lambda & c & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcolo del determinante:

$$(b-\lambda)\begin{vmatrix} b-\lambda & c & 0 & \dots & 0 & 0\\ a & b-\lambda & c & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b-\lambda \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c & \\ 0 & b-\lambda & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_j = 1 - 4Co \sin^2\left[\frac{j\pi}{2(N-1)}\right] \quad j=2,\dots,N-1}$$

La condizione $|\lambda| \leq 1 \;\; \forall \lambda$ impone: $-1 \leq \lambda_j \leq 1$.
Vista l'espressione ricavata per λ_j, essendo $Co \geq 0$ e $\sin^2(\,) \geq 0$ la condizione $\lambda_j \leq 1$ è soddisfatta $\forall j$.
Affinché invece sia soddisfatta la condizione $\lambda_j \geq -1$ deve valere:

$$\boxed{Co \cdot \sin^2\left[\frac{j\pi}{2(N-1)}\right] \leq \frac{1}{2}}$$

Poiché la funzione $\sin^2(\,)$ al massimo ha valore 1, condizione necessaria e sufficiente a garantire la stabilità del metodo numerico è:

$$\boxed{Co \leq \frac{1}{2}}$$

NOTA: partendo dalla forma matriciale dell'equaz. algebrica $[\xi]^{n+1} = A[\xi]^n$, la stabilità richiede che l'errore $[\xi]^{n+1}$ sia limitato (BOUNDED) al crescere di n.
Affinché ciò avvenga deve risultare:

$$\|\xi\|^{n+1} \leq \|A\| \, \|\xi\|^n$$

norma del vettore (Euclidea)

Con $$\|\xi\|^{n+1} = \left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}{}_j \left(\xi_j^{n+1}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\|\xi\|^{n} = \left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}{}_j \left(\xi_j^{n}\right)^2\right]^{1/2}$$

NORMA SU UNO SPAZIO VETTORIALE X è una funzione che verifica le seguenti condizioni:

- $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ e $\|x\| = 0$ sse $x = 0$ (funz. definito positiva)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda$ (omogeneità)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in$

disuguaglianza triangolare

Generalizzando:

$$\|\xi^{n+1}\| \leq \|A\| \|\xi^{n}\| \leq \|A\|^2 \|\xi\|^{n-1} \leq \dots \leq \|A\|^{n+1} \|\xi\|^0$$

Poiché è possibile porre $\|A\| \sim \|\lambda\|$, ovvero poiché la norma della matrice A è calcolabile tramite la norma degli autovalori della matrice A, si ha:

$$\boxed{\|\xi^{n+1}\| \leq \|\lambda\|^{n+1} \|\xi^0\|}$$

con $\|\lambda\| \in [-1, 1]$.

METODO DI VON NEUMANN

STABILISCE CONDIZIONE DI STABILITÀ NECESSARIA E SUFFICIENTE PER PROBLEMI AI VALORI INIZIALI LINEARI CON COEFF. CO

Partiamo dalla medesima equazione per l'errore ξ_j:

$$\xi_j^{n+1} = C_0 \cdot \xi_{j+1}^{n} + (1 - 2C_0)\,\xi_j^{n} + C_0\,\xi_{j-1}^{n} \qquad (1)$$

Il metodo prevede di effettuare un'espansione in serie di Fourier dell'equazione (1).

TRASFORMATA DI FOURIER CONTINUA

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{g(\omega)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{f(t)}\, e^{-i\underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\omega t}}\, \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{dt} \quad \Big[\Rightarrow g_m = \frac{1}{2\pi}\int f(x) e^{-imx} dx$$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA $g_m = g(\omega_m) = \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{M} f^n \cdot e^{-i\omega_m \cdot n}$ $\quad n = 2, \dots, M-1$

DATA UNA FUNZ. $g(x)$, L'ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER È: $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$

$$\left[g_m = g(k_m) = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \cdot e^{-ik_m j} \quad j = 2, \dots, N-1 \right]$$

$k_m = m\pi\Delta x$

TRASFORMATA DI FOURIER INVERSA

$$\boxed{f_j = \sum_{m=1}^{N} g(k_m)\, e^{ik_m j} \quad j = 2, \dots, N-1}$$

Pertanto, per l'errore iniziale ε_j^0 commesso al punto griglia x_j si ha la seguente espressione in serie di Fourier:

$$(2) \quad \boxed{\varepsilon_j^0 = \sum_{m=1}^{M-2} a_m e^{ik_m j} \quad j = 2, \dots, N-1}$$

Se il problema è lineare, è sufficiente studiare la propagazione dell'errore associata ad un singolo, unico termine della rappresentazione in serie di Fourier (2).

In altri termini, inserendo la (2) nella (1) ottengo:

$$\sum_m a_m^{n+1} e^{ik_m j} = C_0 \sum_m a_m^n e^{ik_m(j+1)} + (1-2C_0)\sum_m a_m^n e^{ik_m j} + C_0 \sum_m a_m^n e^{ik_m(j}$$

Fissato un valore per m, ovvero scelto un certo m, l'equazione appena scritta si riduce a:

$$a_m^{n+1} = \left[C_0 a_m^n \cdot e^{ik(j+1)} + (1-2C_0)\cdot a_m^n \cdot e^{ikj} + C_0 \cdot a_m^n \cdot e^{ik(j-1)} \right] e^{-ikj}$$

$$\boxed{a_m^{n+1} = C_o\, a_m^n\, e^{ik} + (1-2C_o)\, a_m^n + C_o\, a_m^n\, e^{-ik}}$$

Definiamo ora:

$$G = \frac{a_m^{n+1}}{a_m^n} = C_o\, e^{ik} + (1-2C_o) + C_o\, e^{-ik}$$

ERROR AMPLIFICATION FACTOR

$$= C_o\left(e^{ik} + e^{-ik}\right) + (1-2C_o)$$

$$= 2C_o \cdot \cos(k) + (1-2C_o)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G = 1 - 2C_o\left[1 - \cos(k)\right] \qquad k = \pi \Delta X}$$

Poiché $\cos(k) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)$ si trova:

$$\boxed{G(C_o, k) = 1 - 4C_o \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}$$

ERROR AMPLIFICATION FACTOR FOR 1D BURGER EQ. WITH F.D.

L'errore è limitato se $|G| \leq 1 \ \forall\, k$ ovvero per $C_o \leq \frac{1}{2}$.

METODO DELL'ENERGIA

Consideriamo la solita equazione di partenza:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \implies \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + \alpha\, \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta X} = 0$$

Moltiplichiamo ciascun termine per ϕ_j^n e consideriamo la sommatoria dei prodotti così ottenuti. Si ha:

$$\sum_1^N {}_j \phi_j^n \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{\alpha}{2\Delta x} \sum_1^N {}_j \phi_j^n \cdot \left(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n \right) = 0$$

ovvero:

$$-\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \right)^2 + \sum_1^N {}_j \phi_j^{n+1} \cdot \phi_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta x} \left[\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \phi_{j+1}^n - \phi_j^n \phi_{j-1}^n \right) \right] = 0$$

Ora la sommatoria nell'ultimo termine dello LHS è pari a zero. Infatti:

$$\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \phi_{j+1}^n - \phi_j^n \phi_{j-1}^n \right) = \cancel{\phi_1^n \phi_2^n} + \cancel{\phi_2^n \phi_3^n} + \dots + \cancel{\phi_{N-1}^n \phi_N^n} - \cancel{\phi_2^n \phi_1^n} - \cancel{\phi_3^n \phi_2^n} - \dots - \cancel{\phi_N^n \phi_{N-1}^n} = 0 \quad \text{C.V.D.!}$$

Rimane quindi: $\displaystyle \sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \right)^2 = \sum_1^N {}_j \phi_j^{n+1} \cdot \phi_j^n$

Ora $\displaystyle \sum_1^N {}_j \phi_j^{n+1} \phi_j^n \leq \left[\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^{n+1} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \right)^2 \right]^{1/2}$

quindi:

$$\left[\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^n \right)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_1^N {}_j \left(\phi_j^{n+1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

dove : $\left[\sum_{1}^{N} {}_j \left(\phi_j^n \right)^2 \right]^{1/2} \equiv$ R.M.S. di $\phi_j^n \equiv \| \phi_j^n \|$

$$\left[\sum_{1}^{N} {}_j \left(\phi_j^{n+1} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv \text{R.M.S. di } \phi_j^{n+1} \equiv \| \phi_j^{n+1} \|$$

Poiché la fluttuazione di ϕ_j, interpretabile come energia, risulta limitata nel tempo si ha che lo schema è stabile e la stabilità in questo caso si dice <u>INCONDIZIONATA</u> perché non dipende da una condizione tipo CFL.