

METODI NUMERICI PER PROBLEMI AI VALORI INIZIALI

\bar{V}_A

1

Consideriamo casi in cui il flusso e^- non stazionario e quindi le variabili da cui il flusso dipende (vel., densità, pressione, etc.) possono variare nel tempo.

Rispetto al tempo, e^- sufficiente considerare ODE del 1° ordine (ovvero c'è solo la derivata prima $\partial/\partial t$) con corrispondente condizione iniziale:

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t_0) = \phi^0 \end{cases} \quad (1)$$

PROBLEMA: data ϕ^0 trovare ϕ dopo un incremento temporale Δt piccolo a piacere ovvero:

$$\phi^1 = \phi(t_1) = \phi(t_0 + \Delta t)$$

Nota ϕ^1 , questa diventa la nuova I.C.

per trovare $\phi^2 = \phi(t_2) = \phi(t_1 + \Delta t)$ e così via.

I metodi più semplici sfruttano sostanzialmente la possibilità di integrare la (1) tra due generici istanti

Successivi t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

12

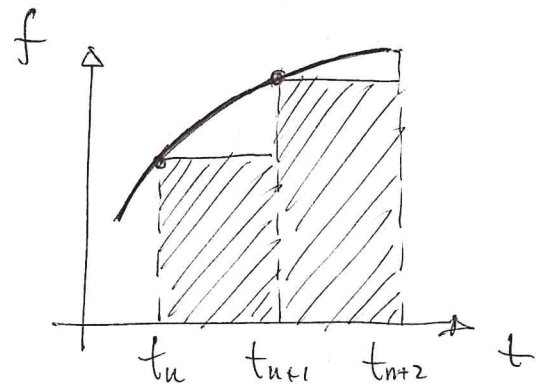
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi^{n+1} - \phi^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi^{n+1} = \phi^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt} \quad (2)$$

L'eq. (2) è esatta ma l'integrale è calcolabile se $f(t, \phi(t))$ è nota, cosa che ovviamente non è vero altrimenti avremmo già la soluzione. Serve quindi approssimare l'integrale. Si può fare con vari metodi :

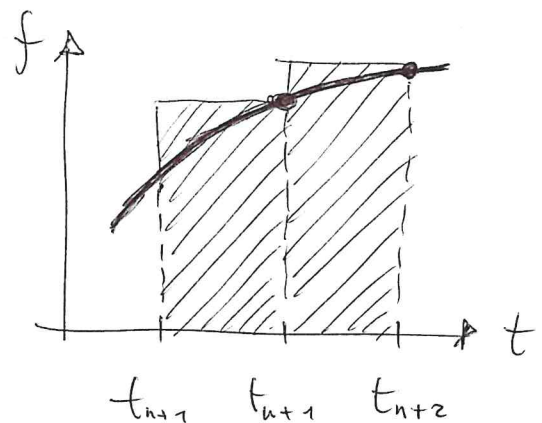
$$\boxed{\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t}$$

METODO DI EULERO
ESPLICITO (FORWARD)



$$\boxed{\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) \Delta t}$$

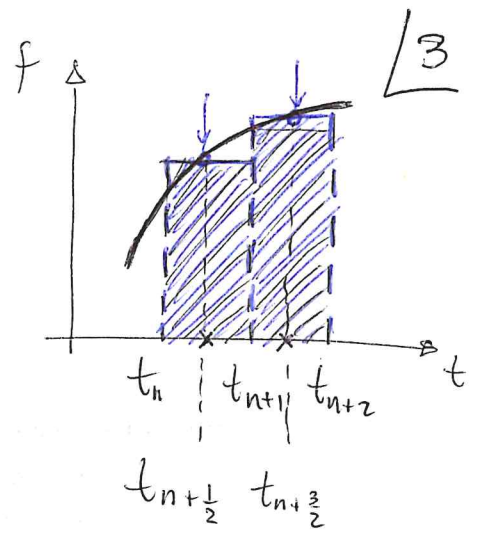
METODO DI EULERO
IMPLICITO (BACKWARD)



$$\phi^{m+1} = \phi^m + f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{m+\frac{1}{2}}) \Delta t$$

MIDPOINT RULE

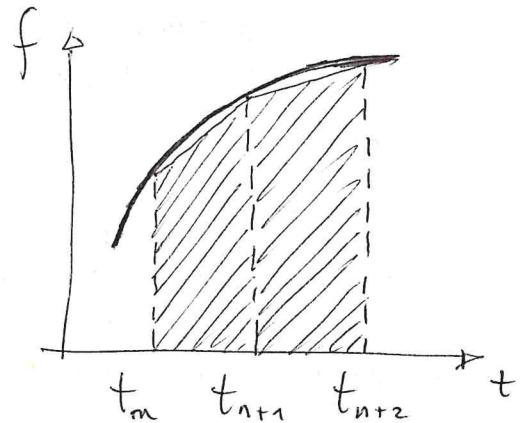
→ è il metodo di base per il
LEAPFROG METHOD



$$\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{1}{2} [f(t_n, \phi^m) + f(t_{n+1}, \phi^{m+1})] \Delta t$$

TRAPEZOIDAL RULE

→ è il metodo di base
per il CRANK-NICOLSON
o il metodo ADAMS-
MOULTON.



Nel loro insieme questi metodi sono detti TWO-LEVEL METHODS perché coinvolgono valori delle incognite alle fini e 2 soli istanti temporali. Sono anche detti SINGLE STEP METHODS perché consentono di calcolare ϕ^{m+1} in un unico passo.

I two-level methods producono buone approssimazioni dell'integrale per Δt piccoli. Ovviamente, la dimensione di Δt non può essere ridotta indiscriminatamente per l'incremento del costo computazionale della simulazione.

La scelta del Δt diventa importante soprattutto 4
per quei problemi caratterizzati da una gran varietà
di scale temporali (es. classico la turbolenza).

Per questi problemi, detti STIFF, la soluzione delle
equazioni di bilancio diventa stazionaria con tassi che
possono variare significativamente da una regione all'altra
del dominio di definizione dell'equazione.

Questo implica che il metodo numerico scelto per l'integrazione
temporale (meglio, per l'incremento temporale)
delle equazioni può risultare numericamente instabile
o meno di non usare Δt estremamente ridotti.

Associata alla natura stiff del problema (e delle equaz. che
lo descrivono) è dunque la questione della STABILITÀ
del metodo, ovvero la sua capacità di produrre
soluzioni limitate (BOUNDED SOLUTIONS).

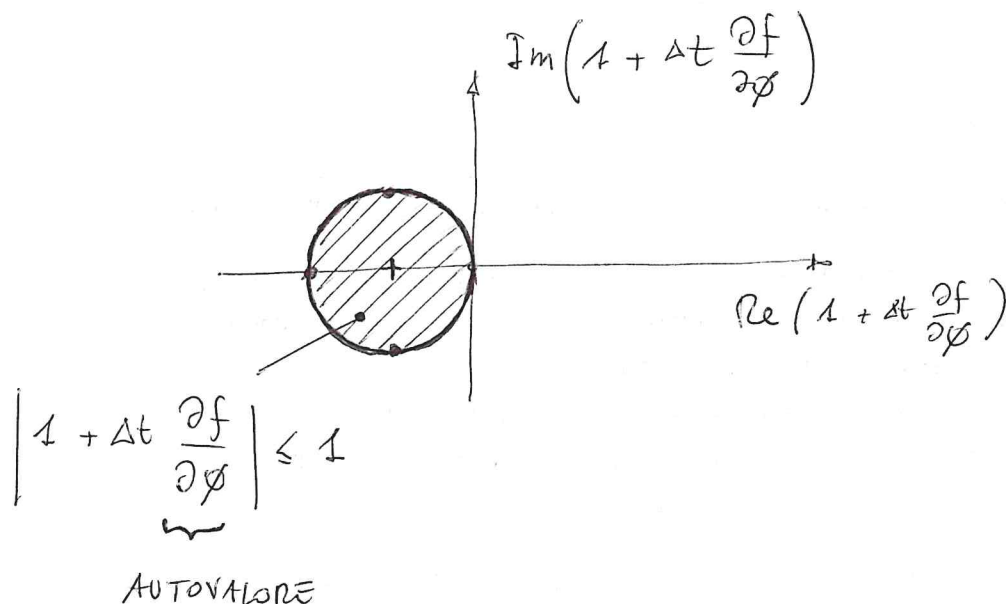
Consideriamo ad esempio il metodo di Eulero. Affinché
la soluzione prodotta dal metodo sia bounded deve
risultare:

$$\left| 1 + \Delta t \frac{\partial f(t, \phi)}{\partial \phi} \right| < 1 \quad \text{ESPLICITO} \quad \text{* VEDI VERIFICA!}$$

ovvero $\Delta t \frac{\partial f}{\partial \phi}$ deve assumere valori interni ad un

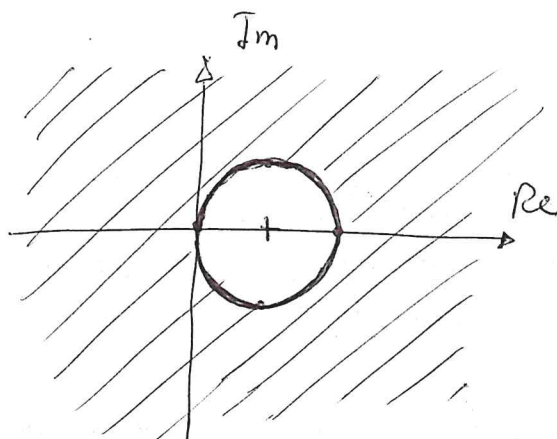
Cerchio di raggio unitario e centro in $(-1, 0)$:

15



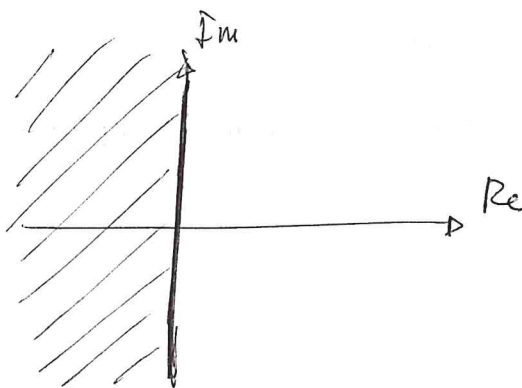
Nel caso del metodo di Eulero implicito risulta invece:

$$\left| \frac{1}{1 - \Delta t \frac{\partial f}{\partial \phi}} \right| \leq 1$$



Per la trapezoidal rule \otimes :

$$\left| \frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial f}{\partial \phi}}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial f}{\partial \phi}} \right| \leq 1$$



Il metodo basato sulla \otimes risulta avere STABILITÀ INCONDIZIONATA perché moduli certamente soluzioni bounded indi

pendentemente dal valore di Δt se $\frac{\partial f}{\partial x} < 0!$ 16

Metodi per i quali la condizione di stabilità dipende invece sia da Δt che da $\frac{\partial f}{\partial x}$ si dicono avere STABILITÀ CONDIZIONATA. Quindi il metodo di Eulero è a stabilità condizionata sia nella sua formulazione implicita che in quella esplicita.

Altra questione importante è quella dell'accuratezza.

I metodi di Eulero sono accurati al I° ordine ovvero l'errore di discretizzazione temporale va come $O(\Delta t)$.

Questo perché l'errore dovuto all'approssimazione in un dato time step è proporzionale a $(\Delta t)^2$ ma si accumula time step dopo time step. Poiché il numero di time step richiesti dall'integrazione numerica è proporzionale a $1/\Delta t$, si deduce che l'errore complessivo finale sarà $\sim \Delta t$.

I metodi midpoint e trapezoidale sono invece accurati al II° ordine ovvero l'errore prodotto è $\sim (\Delta t)^2$.

Il II° ordine è il massimo ordine raggiungibile da un two-level scheme.

METODI PREDITTORE-CORRETTORE

4

≠ METODI MULTIPUNT

I Metodi espliciti sono:

- facili da programmare
- poco costosi in termini di memoria richiesta e tempi di calcolo
- instabili se il time step è grande

I Metodi impliciti sono:

- più difficili da programmare
- richiedono soluzioni iterative
- più costosi in termini di memoria e tempi di calcolo
- molto più stabili

Ci sono dei metodi che cercano di combinare le qualità dei due tipi di metodi. Un esempio è dato dai METODI PREDITTORE-CORRETTORE. Ad es.:

$$\begin{cases} \phi_{n+1}^* = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \cdot \Delta t & [\text{Eulero esplicito}] \\ \phi_{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} [f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*)] & [\text{Trapezoid rule}] \end{cases}$$

Questo metodo risulta accurato al II° ordine (quello della trapezoid rule) ma ha approssimativamente

la stabilità del metodo di Eulero esplicito. 18

È un metodo esplicito perché usa $f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*)$ invece di $f(t_n, \phi_{n+1})$ ed è two-level, quindi non può avere che massima accuratezza pari al II° ordine.

METODI MULTIPPOINT : metodi con accuratezza almeno del II° ordine, ottenuta utilizzando molecole computazionali costituite da almeno due istanti temporali.

I metodi multipoint più noti sono i METODI DI ADAMS, che si ottengono tramite fitting polinomiale.

Ad es., facendo un fitting tramite polinomi di Lagrange di $f(t_{n-m}, \phi^{n-m})$; $f(t_{n-m+1}, \phi^{n-m+1})$; ...; $f(t_n, \phi^n)$

si ottiene un metodo esplicito di ordine $m+1$ detto

METODO DI ADAMS-BASHFORTH :

$$AB1 : \phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \cdot f(t_n, \phi^n) \equiv \text{EULERO ESPL.}$$

$$\epsilon_T \sim O(\Delta t^2) \text{ LOCALE} \quad \epsilon_T \sim O(\Delta t) \text{ GLOBALE}$$



$$\text{AB2 : } \boxed{\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{\Delta t}{2} [3 f(t_m, \phi^m) - f(t_{m-1}, \phi^{m-1})]} \quad \left| \begin{array}{l} 9 \\ \hline \end{array} \right.$$

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^3)$ LOCAL $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$ GLOBAL

$$\text{AB3 : } \boxed{\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{\Delta t}{12} [23 f(t_m, \phi^m) - 16 f(t_{m-1}, \phi^{m-1}) + 5 f(t_{m-2}, \phi^{m-2})]}$$

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^4)$

\Rightarrow **AB-R** : $\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \cdot \sum_{r=1}^R C_r f^{m+1-r}$ ||

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^{R+1})$ LOCAL $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^R)$ GLOBAL

Se invece il metodo risulta **implicito** si parla di

METODO DI ADAMS - MOULTON :

AM1 : $\phi^{m+1} = \phi^m + f(t_{m+1}, \phi^{m+1}) \cdot \Delta t \equiv$ EULER IMPL.

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$ LOCAL $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$ GLOBAL

AM2 : $\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{1}{2} \Delta t [f(t_m, \phi^m) + f(t_{m+1}, \phi^{m+1})]$

\equiv TRAPEZOID RULE

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^4)$ LOCAL $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^3)$ GLOBAL

$$\text{AM3 : } \boxed{\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{\Delta t}{12} [5 f(t_{m+1}, \phi^{m+1}) + 8 f(t_m, \phi^m) - f(t_{m-1}, \phi^{m-1})]}$$

$\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^5)$ LOCAL $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^4)$ GLOBAL

\Rightarrow **AM-R** : $\phi^{m+1} = \phi^m + C_0 \Delta t f^{m+1} + \Delta t \cdot \sum_{r=1}^R C_r f^{m+1-r}$ $\epsilon_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^R)$

Tutti questi schemi sono utilizzabili internamente a schemi di tipo predictor-corrector. Ad es. si può combi-
 .. metodo AB di ordine $(m-1)$ per determina-

re il predittore con un metodo AM di ordine ≤ 10
me m come correttore:

$$\text{AB2} \quad \phi_{m+1}^* = \phi^m + \frac{\Delta t}{2} [3f_m - f_{m-1}] \quad \text{PREDICTOR}$$

$$\text{AM3} \quad \phi_{m+1} = \phi^m + \frac{\Delta t}{12} [5f(t_{m+1}, \phi_{m+1}^*) + 8f_m - f_{m-1}] \quad \text{CORRECTOR}$$

In questo modo, l'ordine del metodo, pari a m , può essere qualsivoglia valore consentito dallo schema usato come correttore.

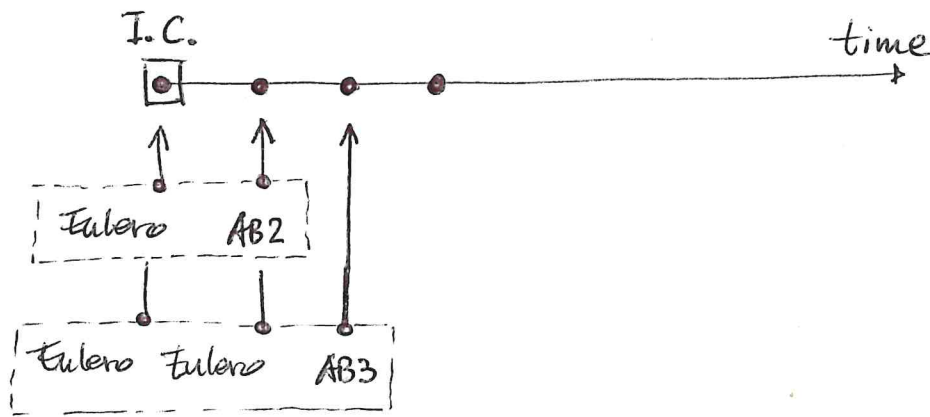
VANTAGGI DEI METODI MULTIPOINT:

- è facile costruire metodi aventi accuratezza di ordine elevato
- sono metodi facili da implementare e poco costosi computazionalmente (richiedono un'unica valutazione delle derivate per ciascun time step)

SVANTAGGI DEI METODI MULTIPOINT:

- Non sono utilizzabili per iniziare un'integrazione temporale, perché richiedono valori a time steps precedenti rispetto a quello che si sta analizzando.

Ad es., usando AB2 e' necessario usare Eulero esplicito per iniziare il calcolo:



METODO RUNGE - KUTTA: metodi con accuratezza almeno del 4° ordine, ottenute utilizzando il metodo di Runge-Kutta con punti intermedi tra t_m e t_{m+1} .

Con questa procedura, si supera il problema legato all'inizio dell'integrazione quando si usano metodi multipoint. Ad es.:

RK2
$$\phi_{m+\frac{1}{2}}^* = \phi^m + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_m, \phi^m)$$

- HALF-STEP PREDICTOR (basato su Eulero esplicito)
- MIDPOINT RULE

$$\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \cdot f(t_{m+\frac{1}{2}}, \phi_{m+\frac{1}{2}}^*)$$

Il metodo RK2 è chiaramente esplicito.

12

RK3

$$\phi_{m+1/3}^* = \phi^m + \frac{\Delta t}{3} \cdot f(t_m, \phi^m)$$

EUCERO
ESPLICITO

$$\phi_{m+2/3}^{**} = \phi^m + \frac{2\Delta t}{3} \cdot f(t_{m+1/3}, \phi_{m+1/3}^*)$$

$$\begin{aligned} \phi^{m+1} &= \phi^m + \frac{3\Delta t}{4} \cdot f(t_{m+2/3}, \phi_{m+2/3}^{**}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} \cdot f(t_{m+1/2}, \phi_{m+1/3}^*) \end{aligned}$$

RK4

$$\phi_{m+1/2}^* = \phi^m + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_m, \phi^m)$$

$$\phi_{m+1/2}^{**} = \phi^m + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_{m+1/2}, \phi_{m+1/2}^*)$$

$$\phi_{m+1}^{***} = \phi^m + \Delta t \cdot f(t_{m+1/2}, \phi_{m+1/2}^{**})$$

$$\phi^{m+1} = \phi^m + \frac{\Delta t}{6} \cdot [f^m + 2f^* + 2f^{**} + f(t_{m+1}, \phi_{m+1}^{***})]$$

Ovviamente esistono metodi RK di ordine più elevato che però non sono molto diffusi. Anche perché, se da un lato RK risulta più stabile ed accurato di un metodo

do multipoint avente lo stesso ordine, dall'altro 13
 RK risulta più costoso in quanto richiede di valutare
 le derivate tante volte quanto è l'ordine del metodo.
 do.

NOTA: l'espressione corrispondente al RK2 è riscrivibile

Come:

$$\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \cdot f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^m + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_n, \phi^m)\right)$$

Analogamente, per il metodo RK3:

$$\begin{aligned} \phi^{m+1} = & \phi^m + \frac{3}{4} \Delta t \cdot f\left(t_{n+\frac{2}{3}}, \phi^m + \frac{2\Delta t}{3} \cdot f(\dots)\right) \\ & + \frac{1}{4} \Delta t \cdot f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^m + \frac{\Delta t}{3} \cdot f(t_n, \phi^m)\right) \end{aligned}$$

eccetera. Tutte queste espressioni sono riassumibili in un'unica espressione più compatta:

$$\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \cdot \sum_{r=1}^R C_r \cdot f^r$$

$$f^r = f\left(t_n + \Delta t \cdot a_r, \phi^n + \Delta t \sum_{s=1}^R b_{rs} \cdot f^s\right) \quad r=1, \dots, R$$

$$a_r = \sum_{s=1}^R b_{rs} \quad r=1, \dots, R$$

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1R} \\ a_2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_R & b_{R1} & b_{R2} & \dots & b_{RR} \\ \hline & c_1 & c_2 & \dots & c_R \end{array}$$

BUTCHER ARRAY
 (rappresentazione
 compatta del
 metodo RK)

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & C^T \end{array}$$

ESEMPIO : RK2 (R = 2)

Avremo $\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t (C_1 f^1 + C_2 f^2)$

$f^1 = f(t_n + \Delta t \cdot a_1, \phi^m + \Delta t \cdot (b_{11} \cdot f^1 + b_{12} \cdot f^2))$

$f^2 = f(t_n + \Delta t \cdot a_2, \phi^m + \Delta t \cdot (b_{21} \cdot f^1 + b_{22} \cdot f^2))$

Ora, RK2 e' un metodo esplicito quindi il

Butcher array diventa:

\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\dots	b_{1s}^0
a_2	b_{21}	\emptyset	\emptyset	\dots	b_{2s}^0
a_3	b_{31}	b_{32}	\emptyset	\dots	\emptyset
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_r	b_{r1}	b_{r2}	b_{r3}	\dots	\emptyset
<hr/>					
	c_1	c_2	c_3	\dots	c_r

$R=2$
 \implies

\emptyset	\emptyset	\emptyset
a_2	b_{21}	\emptyset
<hr/>		
	c_1	c_2

Quindi : $a_1 = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{22} = 0$

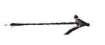
ovvero :

$f^1 = f(t_n, \phi^m)$

$f^2 = f(t_n + \Delta t \cdot a_2, \phi^m + \Delta t \cdot b_{21} f^1)$

Abbiamo quindi 4 incognite : c_1, c_2, a_2, b_{21} .

Le possiamo determinare facendo delle espansioni in serie di Taylor:



$$\phi^{m+1} = \phi^m + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_m \Delta t + \left(\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)_m \frac{\Delta t^2}{2} +$$

$$+ \left(\frac{d^3\phi}{dt^3}\right)_m \frac{\Delta t^3}{6} + \text{t.o.s.}$$

N.B. $\phi = \phi(t)$

\downarrow
 $d\phi/dt !!$

Mo :

$f = f(t, \phi(t))$

\downarrow
 $\partial f / \partial t !!$

$$= \phi^m + f_m \cdot \Delta t + \underbrace{\left(\frac{df}{dt}\right)_m}_{\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial \phi}} \frac{\Delta t^2}{2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$+ \frac{\Delta t^3}{6} \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_m + \text{t.o.s.}$$

\downarrow

$$\boxed{\phi^{m+1} \approx \phi^m + f_m \cdot \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_m} \quad \textcircled{A}$$

$$f^2 = f_m + a_2 \Delta t \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m + \Delta t b_{21} f^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_m + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

\downarrow

$$\boxed{f^2 \approx f_m + a_2 \Delta t \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m + \Delta t b_{21} f^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_m}$$

\downarrow

$$\phi^{m+1} = \phi^m + \Delta t \left(c_1 f^1 + c_2 \cdot \left(f_m + a_2 \Delta t \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m + \Delta t b_{21} f^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_m \right) \right)$$

com $f^1 = f^m !!$

\rightarrow

$$\phi^{m+1} = \phi^m + (C_1 + C_2) f_m \Delta t + a_2 C_2 \Delta t^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_m + b_{21} C_2 \Delta t^2 \cdot f_m \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right)_m \quad \textcircled{B}$$

Uguagliando \textcircled{A} e \textcircled{B} si trova:

$$C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 - C_2$$

$$a_2 C_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2C_2}$$

$$b_{21} C_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b_{21} = \frac{1}{2C_2}$$

Abbiamo un parametro libero, ovvero C_2 . Indipendentemente dal valore di C_2 otterremo comunque uno schema RK2. In altri termini, esistono infinite formulazioni per uno schema RK2. Quello che abbiamo introdotto noi si ottiene ponendo:

$$C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad ; \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2}$$

ovvero: $f^1 = f^m$

$$f^2 = f \left(\underbrace{t_m + \Delta t_{\frac{1}{2}}}_{t_{m+\frac{1}{2}}}, \phi^m + \Delta t_{\frac{1}{2}} \cdot f^m \right)$$

siano nulli gli elementi b_{rs} sopra la diagonale :

\emptyset	b_{11}	b_{12}^{\emptyset}	...	b_{1s}^{\emptyset}
a_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}^{\emptyset}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_r	b_{r1}	b_{r2}	...	b_{rs}
	c_1	c_2	...	c_r

Risulta pertanto, in analogia coi metodi RK espliciti che RK I \equiv EULER IMPLICITO.

I metodi RK impliciti non sono quasi mai utilizzati a causa del loro elevato costo computazionale, prodotto dal fatto che tutte le equazioni ai vari stage debbano essere risolte simultaneamente tramite un solutore implicito.

Nonostante, quindi, la miglior accuratezza e maggior stabilit  rispetto alla formulazione esplicita, i RK impliciti presentano comunque un costo computazionale eccessivo!

ALTRI METODI

20

- LEAPFROG METHOD (3-level scheme) } GOOD FOR HYPERBOLIC EQUATIONS
UNSTABLE FOR PARABOLIC ONE.

E' essenzialmente l'applicazione dell'integrazione tramite midpoint rule ad un intervallo pari a $2\Delta t$ anzichè Δt !

2nd-order method based on ODE !!

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t_m} = \frac{\phi^{m+1} - \phi^{m-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right\} \boxed{\phi^{m+1} = \phi^{m-1} + f(t_m, \phi^m) \cdot 2\Delta t} \quad [E_T \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)]$$

Non è consigliabile utilizzare questo metodo per risolvere numericamente problemi non-stazionari. A meno che il time step non sia molto piccolo.

Infatti, l'analisi di stabilità mostra che il metodo è **UNCONDITIONALLY UNSTABLE** ma l'instabilità è debole se il time step è piccolo.

Le oscillazioni prodotte da tale instabilità debole sulla soluzione possono essere smorzate con opportuni accorgimenti e quindi il **metodo leapfrog** è comunque **utilizzato in meteorologia e oceanografia**.

Un possibile accorgimento per stabilizzare il metodo è usare la seguente approssimazione:

$$\phi^m \approx \frac{1}{2}(\phi^{m-1} + \phi^{m+1})$$

Questa approssimazione costituisce la base dello schema di DUFORT - FRANKEL, che è un esempio di schema esplicito e unconditionally stable per un'equazione quale:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \begin{array}{l} \text{EQUAZIONE DI} \\ \text{DIFFUSIONE 1D} \end{array}$$

quindi per equazioni paraboliche, ad esempio. Questo diventa:

$$0 = \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left[\phi_{j-1}^m - (\phi_j^{m-1} + \phi_j^{m+1}) + \phi_{j+1}^m \right]$$

• LAX - WENDROFF SCHEME

Metodo basato sulle differenze finite particolarmente indicato per PDE iperboliche.

È un metodo accurato al II° ordine (sia nel tempo che nello spazio).

Consideriamo ad esempio l'equazione:



The **Lax–Wendroff method**, named after Peter Lax and Burton Wendroff, is a numerical method for the solution of hyperbolic partial differential equations, based on finite differences. It is second-order accurate in both space and time.

Suppose one has an equation of the following form:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\phi(x, t))}{\partial x}$$

where x and t are independent variables, and the initial state, $\phi(x, 0)$ is given.

The first step in the Lax–Wendroff method calculates values for $f(x, t)$ at half time steps, $t_{n+1/2}$ and half grid points, $x_{j+1/2}$. In the second step values at t_{n+1} are calculated using the data for t_n and $t_{n+1/2}$.

First (Lax) step:

$$\frac{f_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{2}}{(1/2) * \Delta t} = \frac{g_{j+1}^n - g_j^n}{\Delta x} \quad (\text{uses data at } t_n \text{ and at } x_{j+1/2})$$

Second step:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = \frac{g_{j+1/2}^{n+1/2} - g_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (\text{uses data at } t_n \text{ and } t_{n+1/2})$$

This method can be further applied to some systems of partial differential equations.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (*)$$

$$\alpha = \nu \approx O(10^{-5} \div 10^{-6}) \Rightarrow \nu^+ = 1 \Rightarrow \Delta t^+ \leq \frac{(\Delta x^+)^2}{2}$$

Je $L^+ = 1$ e $N_x = 100$ allora $\Delta x^+ \approx O(10^{-2})$ e quindi $\Delta t^+ \leq 5 \cdot 10^{-4}$ PICCOLO !!

$$k = \Delta t, h = \Delta x \Rightarrow C_0 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

2.2 The Du Fort–Frankel Scheme

This is an example of an *explicit* and *unconditionally stable* scheme for $u_t = bu_{xx}$ (*)

The problem with schemes like forward time, centered space is that they are stable for $b\mu = bk/h^2 \leq \frac{1}{2}$, which puts a terrible restriction $k \leq \frac{h^2}{2b}$ on the timestep. The Du Fort–Frankel scheme,

$$v_m^{n+1} - v_m^{n-1} = 2b\mu(v_{m+1}^n - (v_m^{n+1} + v_m^{n-1}) + v_{m-1}^n) \cdot \frac{(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}{2\Delta t} =$$

is a slight modification of the *unstable* Leap–Frog scheme. We rewrite the Du Fort–Frankel scheme as

$$(1 + 2b\mu)v_m^{n+1} - (1 - 2b\mu)v_m^{n-1} = 2b\mu(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n).$$

To study the stability, we substitute $v_m^n = g^n e^{imh\xi}$ to get

$$(1 + 2b\mu)g^2 - (1 - 2b\mu) = 2b\mu(e^{ih\xi} + e^{-ih\xi})g,$$

which implies

$$g_{\pm} = \frac{2b\mu \cos(h\xi) \pm \sqrt{1 - 4b^2\mu^2 \sin^2(h\xi)}}{1 + 2b\mu}.$$

$$-\frac{[\phi_{j+1}^n - (\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1})]}{\Delta x^2}$$

+ ϕ_{j-1}^n

The scheme is not dissipative since $g_{-}(\pi) = -1$. To determine stability we consider two cases:

- $1 - 4b^2\mu^2 \geq 0 \Rightarrow |g_{\pm}| \leq \frac{2b\mu|\cos(h\xi)| + \sqrt{1}}{1 + 2b\mu} \leq \frac{2b\mu + 1}{1 + 2b\mu} = 1.$
- $1 - 4b^2\mu^2 < 0 \Rightarrow |g_{\pm}|^2 = \frac{(2b\mu \cos(h\xi))^2 + 4b^2\mu^2 \cos^2(h\xi) - 1}{(1 + 2b\mu)^2} = \frac{4b^2\mu^2 - 1}{(1 + 2b\mu)^2} = \frac{2b\mu - 1}{1 + 2b\mu} \leq 1.$

In addition, we do not want double roots on the unit circle. Double root occurs when $1 - 4b^2\mu^2 = 0$, but then $|g_{\pm}| \leq \frac{2b\mu|\cos(h\xi)|}{1 + 2b\mu} < 1$.

So we have stability for any value of μ . But how is that possible? The catch is in the consistency. In order for the scheme to be consistent we must have $k/h \rightarrow 0$, as we will now demonstrate.

Rewrite Du Fort–Frankel as

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} = b \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} - b \frac{v_m^{n+1} + v_m^{n-1} - 2v_m^n}{h^2}$$

then expand in Taylor to see that it approximates

$$u_t + \frac{k^2}{6} u_{ttt} = b(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}) - b(\frac{k^2}{h^2} u_{tt} + \frac{k^4}{12h^2} u_{tttt}).$$

Now think numerically. For hyperbolic systems we could (at best) hope for $\frac{k}{h} \approx 1$. However, if we use Du Fort–Frankel with such a timestep, $k = h$, the solution will not converge to the solution of $u_t = bu_{xx}$, but instead to the solution of $bu_{tt} + u_t = bu_{xx}$ (i.e., the solution to a wave equation). This was not the purpose of the exercise. So the scheme will only converge to the solution of $u_t = bu_{xx}$ if $\frac{k}{h} \rightarrow 0$. Even so the truncation error will be dominated by $b\frac{k^2}{h^2}u_{tt}$, which is not small unless $\frac{k}{h^2}$ is constant, but then we are back where we started—with the same restrictions as the ones for forward in time centered in space.

We, of course have two explicit schemes—backward in time, centered in space (which is $O(k + h^2)$ and dissipative) and Crank–Nicolson (which is $O(k^2 + h^2)$ and not dissipative if $\frac{k}{h}$ is constant.).

$$(*) \quad \phi_j^{n+1} \left(1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right) - \phi_j^{n-1} \left(1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right) = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n)$$