

TECNICHE COMPUTAZIONALI PRELIMINARI

(per la discretizzazione delle derivate)

• Three-point Symmetric Formula

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$\text{T.E.} = \frac{\Delta x^2}{6} \left[\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right]_j^m$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2}$$

$$\text{T.E.} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right]_j^m$$

• Three-point Asymmetric Formula

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m = \frac{-0.5 T_{j+2} + 2 T_{j+1} - 1.5 T_j}{\Delta x}$$

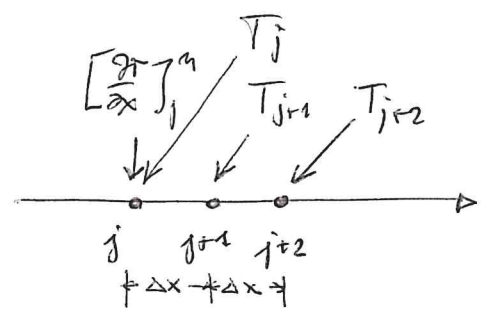
$$\text{T.E.} = -\frac{\Delta x^2}{3} \left[\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right]_j^m$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{T_{j+2} - 2 T_{j+1} + T_j}{\Delta x^2}$$

$$\text{T.E.} = \Delta x \left[\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right]_j^m$$

DIMOSTRAZIONE

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m = a T_j^m + b T_{j+1}^m + c T_{j+2}^m$$



$$= a T_j^m + b \left(T_j^m + \Delta x \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m + \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^m + \text{t.o.s.} \right) +$$

$$+ c \left(T_j^m + 2\Delta x \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m + \frac{(2\Delta x)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^m + \text{t.o.s.} \right)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m = (a + b + c)T_j^m + (b\Delta x + 2c\Delta x) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^m + \left(\frac{b\Delta x^2}{2} + 2c\Delta x^2 \right) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^m + \text{t.o.s.} \quad \text{trase!}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \Rightarrow a = -b - c & \Rightarrow a = -\frac{3}{2\Delta x} \\ b\Delta x + 2c\Delta x = 1 & \Rightarrow -4c\Delta x + 2c\Delta x = 1 & \Rightarrow c = -\frac{1}{2\Delta x} \\ \frac{b\Delta x^2}{2} + 2c\Delta x^2 = 0 & \Rightarrow b = -4c & \Rightarrow b = \frac{2}{\Delta x} \end{cases}$$

ok!

Per la derivata seconda:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \Rightarrow a = -b - c & \Rightarrow a = \frac{1}{\Delta x^2} \\ b\Delta x + 2c\Delta x = 0 & \Rightarrow b = -2c & \Rightarrow b = -\frac{2}{\Delta x^2} \\ \frac{b\Delta x^2}{2} + 2c\Delta x^2 = 1 & \Rightarrow -c\Delta x^2 + 2c\Delta x^2 = 1 & \Rightarrow c = \frac{1}{\Delta x^2} \end{cases}$$

ok!

• Five-point Symmetric Formula

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_j^n = \frac{-T_{j+2}^n + 8T_{j+1}^n - 8T_{j-1}^n + T_{j-2}^n}{12\Delta x} \quad \text{T.E.} = -\frac{\Delta x^4}{30} \left[\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} \right]_j^n$$

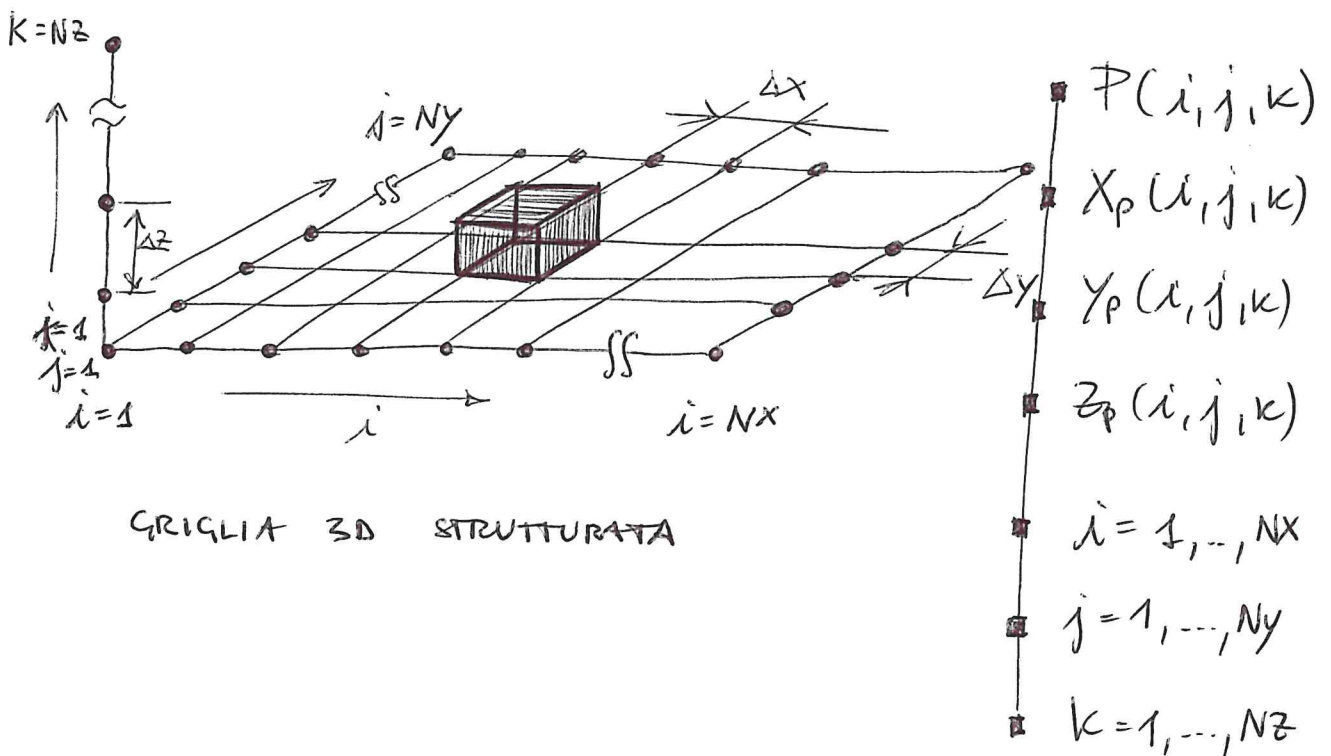
$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_j^n = \frac{-T_{j+2}^n + 16T_{j+1}^n - 30T_j^n + 16T_{j-1}^n - T_{j-2}^n}{12\Delta x^2} \quad \text{T.E.} = -\frac{\Delta x^4}{90} \left[\frac{\partial^6 T}{\partial x^6} \right]_j^n$$

METODO ALLE DIFFERENZE FINITE

3

Col FINITE DIFFERENCE (FD) method si ottiene un' approssimazione puntuale della PDE, o meglio della FDE, che si vuole risolvere. Tale approssimazione è ottenuta sostituendo le derivate della PDE con espressioni date dalla differenza tra valori dell' incognita in punti vicini a quello in cui si vuole calcolare la derivata, divisa per la distanza tra i punti stessi.

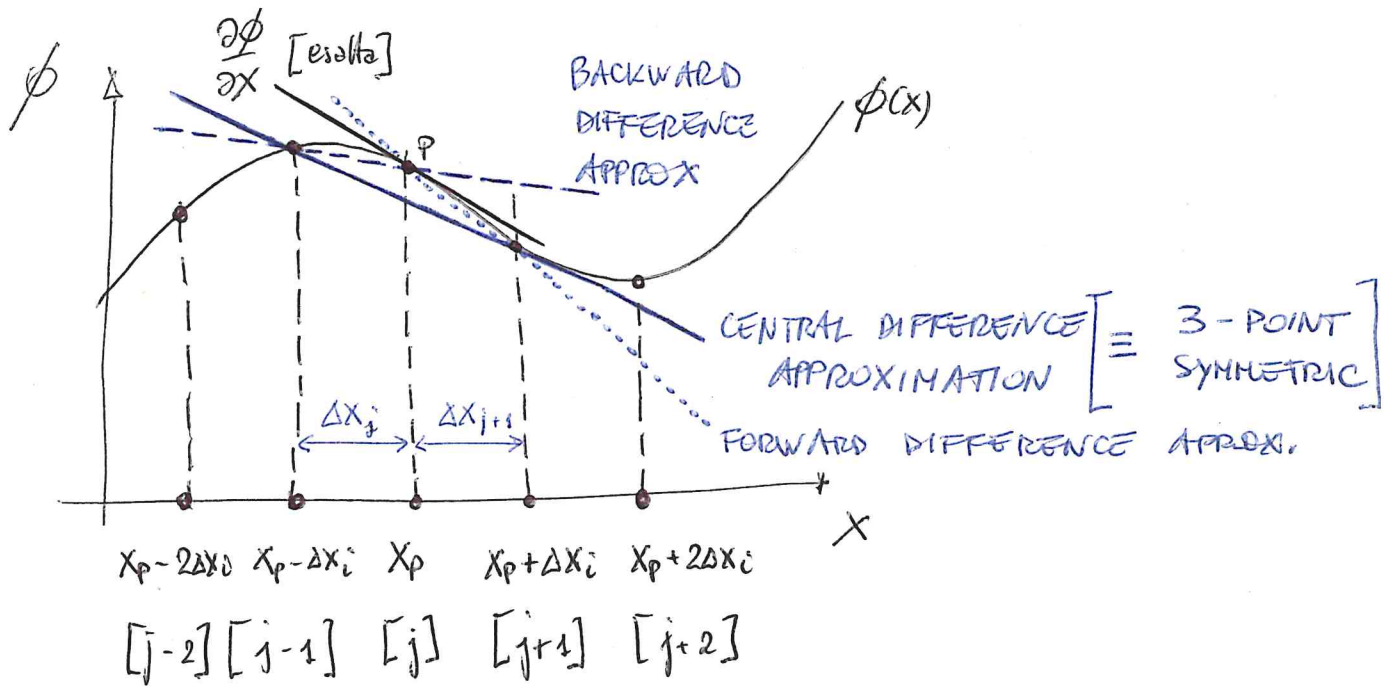
Il primo passo, quindi, è definire e generare la griglia computazionale, che tipicamente è di tipo strutturato:



L'idea di base è derivata dalla definizione di derivata:

4

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_{\mathcal{P}} = \lim_{\Delta X_i \rightarrow 0} \frac{\phi(X_{P_i} + \Delta X_i) - \phi(X_{P_i})}{\Delta X_i}$$



✓ CENTRAL DIFFERENCE : $\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\mathcal{P}} = \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{X_{j+1} - X_{j-1}} \equiv \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_j^m$
 [T.E. $\sim O(\Delta X^2)$]

✓ BACKWARD DIFFERENCE : $\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\mathcal{P}} = \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{X_j - X_{j-1}} = \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta X_j}$
 [T.E. $\sim O(\Delta X)$]

✓ FORWARD DIFFERENCE : $\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\mathcal{P}} = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{X_{j+1} - X_j} = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta X_{j+1}}$
 [T.E. $\sim O(\Delta X)$]

Tutte queste espressioni sono ottenute mediante approssimazioni di espansioni in serie di Taylor:

Es.
$$\phi(x_{j+1}) = \phi(x_j) + (x_{j+1} - x_j) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j + \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j + \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \text{t.o.s.}$$

$$\phi(x_{j-1}) = \phi(x_j) - (x_{j-1} - x_j) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j + \frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j - \frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \text{t.o.s.}$$

T.E. $\sim \frac{\Delta x_j}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j$ VERB1 PAG. 8

↓

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j = \frac{\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)}{x_{j+1} - x_j} + \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j - \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \text{t.o.s.}$$

~~T.E. (★★)~~

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j = \frac{\phi(x_j) - \phi(x_{j-1}))}{x_j - x_{j-1}} + \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j - \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \text{t.o.s.}$$

↓

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j \approx \frac{\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

FORWARD DIFFERENCE

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j \approx \frac{\phi(x_j) - \phi(x_{j-1}))}{x_j - x_{j-1}}$$

BACKWARD DIFFERENCE

Faccendo invece l'espansione in serie di Taylor
nell'intorno dei punti X_{j+1} e X_{j-1} si trova:

16

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j = \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{X_{j+1} - X_{j-1}} + \frac{(X_{j+1} - X_j)^2 - (X_{j-1} - X_j)^2}{2(X_{j+1} - X_{j-1})} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_j - \frac{(X_{j+1} - X_j)^3 + (X_j - X_{j-1})^3}{6(X_{j+1} - X_{j-1})} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_j + \text{t.o.s.}$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j \approx \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{X_{j+1} - X_{j-1}}$$

CENTERED DIFF.

$$\left[\begin{aligned} \text{T.E.} &= - \frac{(X_{j+1} - X_j)^2 - (X_j - X_{j-1})^2}{2(X_{j+1} - X_{j-1})} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_j \\ &\quad - \frac{(X_{j+1} - X_j)^3 + (X_j - X_{j-1})^3}{6(X_{j+1} - X_{j-1})} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_j + \text{t.o.s.} \end{aligned} \right]$$

⊗ Questo sparisce!

Se la griglia è uniforme* : $X_{j+1} - X_j = X_j - X_{j-1}$

$$\Delta X_{j+1} = \Delta X_j = \Delta X$$

ovvero :

$$\text{T.E.} = - \frac{\Delta X^2}{3} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_j + \text{t.o.s.} \sim \mathcal{O}(\Delta X^2)$$

Se la griglia non è uniforme : $\Delta X_{j+1} \neq \Delta X_j$

errore : T.E. = $-\frac{\Delta X_{j+1}^2 - \Delta X_j^2}{2(\Delta X_{j+1} + \Delta X_j)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j$ [7]

$\sim O(\Delta X)$

Sembra cioè che lo
schema CDS diventi
del 1° ordine !!

$-\frac{\Delta X_{j+1}^3 - \Delta X_j^3}{6(\Delta X_{j+1} + \Delta X_j)} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \text{t.a.s.} \sim O(\Delta X)$



Con griglie non uniforme, l'errore di troncamento
diventa proporzionale a ΔX , invece che a ΔX^2 . Quindi

l'errore prodotto dal metodo C.D. aumenta.

Per aumentare, come diventa tale errore paragonato a quello di un metodo F.D. o B.D.? E' veramente come quello di un metodo del prim'ordine?

Assumendo che la spaziatura dei punti griglia si espande/contragga di un fattore costante $\tau_e (\geq 1)$,

si può porre:

$\Delta X_{j+1} = \tau_e \Delta X_j \Rightarrow$ T.E. = $+\frac{(1-\tau_e^2)\Delta X_j^2}{2(1+\tau_e)\Delta X_j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j$

$+\frac{(1-\tau_e^3)\Delta X_j^3}{6(1+\tau_e)\Delta X_j} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j$ tracc.

$\approx \frac{(1-\tau_e)\Delta X_j}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j$

completa così!!

CDS

FDS/BDS

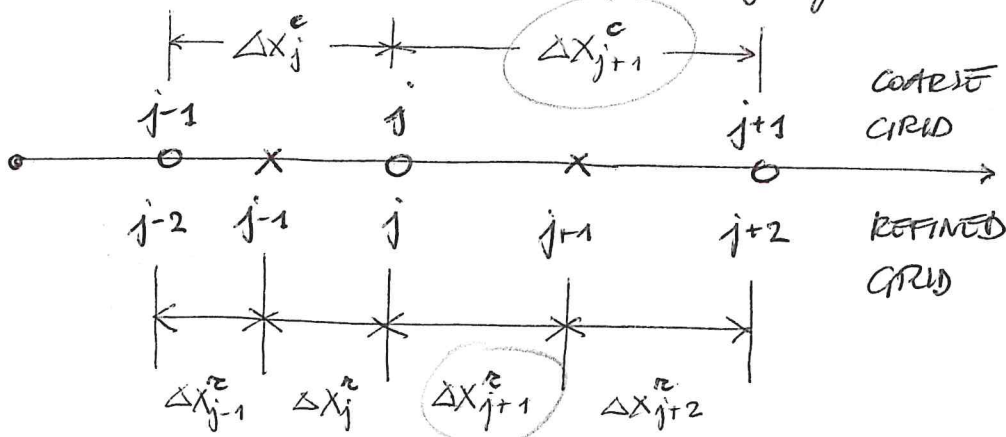
18

T.E. $\approx \frac{(1 - \tau_e) \Delta X_j}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_j$ Vedi ~~*~~ pag 3

T.E. $\approx \frac{\Delta X_j}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_j$ Vedi ~~**~~ pag 5

Se $\tau_e \approx 1$ allora siamo prossimi alla condizione di griglia uniforme ($\Delta X_{j+1} \approx \Delta X_j$) e risulta T.E. $\rightarrow 0$ per il metodo CDS, che presenta quindi un errore molto inferiore al metodo FDS/BDS. \Rightarrow Se $\tau_e \approx 1$: T.E.^{CDS} \ll T.E.^{FDS/BDS}

Supponiamo invece che la griglia venga raffinata:



$$\Delta X_{j+1}^c = \tau_e^c \cdot \Delta X_j^c \implies \Delta X_{j+2}^r + \Delta X_{j+1}^r = \tau_e^c \cdot (\Delta X_j^r + \Delta X_{j-1}^r)$$

$$\Delta X_{j+1}^r = \tau_e^r \cdot \Delta X_j^r$$

$$(1 + \tau_e^r) \Delta X_{j+1}^r = \tau_e^c \cdot (1 + \tau_e^r) \Delta X_{j-1}^r$$

$$\tau_e^r \Delta X_j^r = (\tau_e^r)^2 \Delta X_{j-1}^r$$

Si ottiene:

$$(\tau_e^r)^2 \Delta X_{j-1}^r = \tau_e^c \cdot \Delta X_{j-1}^r$$

$$\tau_e^r = \sqrt{\tau_e^c}$$

Considerando un punto comune a entrambe le griglie \square

si ha:

Dallo \textcircled{A}

$$\kappa_t = \frac{T.E.^c}{T.E.^z} = \frac{(1 - \kappa_e^c) \Delta X_{j/2}^c}{(1 - \kappa_e^z) \Delta X_{j/2}^z} \quad \text{con} \quad \Delta X_j^c = \Delta X_j^z + \Delta X_{j-1}^z$$

$$= \frac{(1 - \kappa_e^c)(1 + \kappa_e^z) \Delta X_{j-1}^z}{(1 - \kappa_e^z) \kappa_e^z \Delta X_{j-1}^z}$$

$$= \frac{(1 - \kappa_e^c)(1 + \sqrt{\kappa_e^c})}{(1 - \sqrt{\kappa_e^c}) \sqrt{\kappa_e^c}}$$

Poiché $\kappa_e^z = \sqrt{\kappa_e^c}$ avremo: $\kappa_t = \frac{(1 - \kappa_e^c)(1 + \sqrt{\kappa_e^c})}{(1 - \sqrt{\kappa_e^c}) \sqrt{\kappa_e^c}}$

CALCOLI: $\kappa_t = \frac{(1 - \kappa_e^c)(\sqrt{\kappa_e^c} + \kappa_e^c)}{(1 - \sqrt{\kappa_e^c}) \kappa_e^c} = \frac{(1 + \sqrt{\kappa_e^c})(1 + \sqrt{\kappa_e^c}) \sqrt{\kappa_e^c}}{\kappa_e^c}$

$$= \frac{(1 + \sqrt{\kappa_e^c})^2}{\sqrt{\kappa_e^c}} = \frac{(1 + \kappa_e^z)^2}{\kappa_e^z}$$

ovvero:

$$\kappa_t = \frac{(1 + \sqrt{\kappa_e^c})^2}{\sqrt{\kappa_e^c}} = \frac{(1 + \kappa_e^z)^2}{\kappa_e^z}$$

RAPPORTO FRA
GLI ERRORI DI
TRONCAMENTO
SULLE DUE GRIGLIE
PER METODO CDS

Se $\kappa_e^c = \kappa_e^z = 1$ (griglia uniforme) allora $\kappa_t = 4$ ovvero

l'errore di troncamento si riduce di un fattore 4

quando raffiniamo la griglia con spaziatura uniforme

Se $\kappa_e^c > 1$ o $\kappa_e^c < 1$ (griglia non uniforme) allora

$n_t > 4$ ovvero l'errore di troncamento decresce \searrow più rapidamente di quanto farebbe l'errore di troncamento se usassi un metodo del II° ordine.

NON FARE!

APPROSSIMAZIONE DI ORDINE ELEVATO PER LE DERIVATE

PRICE :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_j^m \approx \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_j = \frac{\phi_{j+1} \cdot (\Delta X_j)^2 + \phi_j \cdot [(\Delta X_{j+1})^2 - (\Delta X_j)^2]}{\Delta X_{j+1} \Delta X_j (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})} - \frac{\Delta X_{j+1} \Delta X_j}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_j + \text{t.o.s} \quad [★]$$

Se $\Delta X_j = \Delta X_{j+1} = \Delta X$ allora :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_j = \frac{\phi_{j+1} \Delta X^2 - \phi_{j-1} \Delta X^2}{2 \Delta X^3} - \frac{\Delta X^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_j + \text{t.o.s}$$

trasc. \rightarrow

$$\approx \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2 \Delta X} \quad [CDS]$$

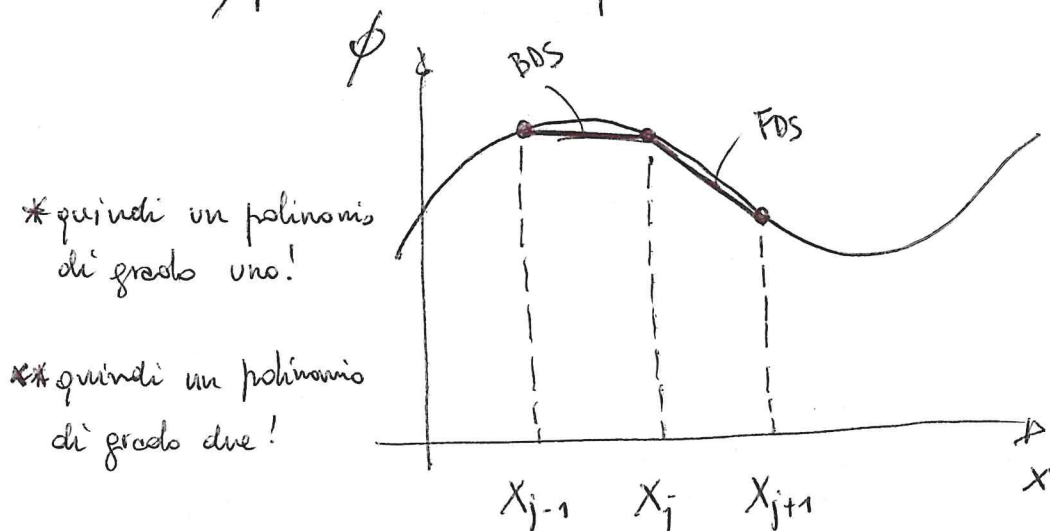
VAI QUI!

APPROSSIMAZIONE DELLE DERIVATE TRAMITE POLYNOMIAL FITTING



E' possibile ottenere forme approssimate di derivate interpolando la funzione di cui si vuol determinare la derivata tramite una curva polinomiale e derivando poi quest'ultima.

Ad es., prendendo 2 punti (x_j e x_{j+1} o x_j e x_{j-1}):



* quindi un polinomio di grado uno!

** quindi un polinomio di grado due!

Uso l'interpolazione lineare* per filtrare la curva \rightarrow ottengo approssimazioni BD. (se uso x_{j-1}) o FDS (se uso x_{j+1}).

Se invece faccio un fitting della funzione tra i punti x_{j-1} , x_j e x_{j+1} tramite una parabola** e calcolo poi le derivate prima in x_j ottengo:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j \approx \frac{\phi_{j+1}(\Delta x_j)^2 + \phi_j [(\Delta x_{j+1})^2 - (\Delta x_j)^2] - \phi_{j-1}(\Delta x_{j+1})^2}{\Delta x_{j+1} \Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}$$

ovvero esattamente l'equazione * e pag. 10 (a meno dei termini di ordine superiore).

Utilizzando polinomi di ordine superiore possiamo ottenere...

- 3rd - order BDS :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j = \frac{2\phi_{j+1} - 3\phi_j - 6\phi_{j-1} + \phi_{j-2}}{6\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

[si ottiene filtrando un polinomio di grado 3 alla funzione in 4 punti, da x_{j+1} a x_{j-2}].

- 3rd - order FDS :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j = \frac{-\phi_{j+2} + 6\phi_{j+1} - 3\phi_j - 2\phi_{j-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

[si ottiene filtrando un polinomio di grado 3 alla funzione in 4 punti, da x_{j+2} a x_{j-1}].

- 4th - order CDS :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j = \frac{-\phi_{j+2} + 8\phi_{j+1} - 8\phi_{j-1} + \phi_{j-2}}{12\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

[si ottiene filtrando un polinomio di 4° grado alla funzione in 5 punti, da x_{j+2} a x_{j-2}].

È in pratica la stessa espressione ricavata precedentemente per la 5-point Symmetric Formula !!

Nel caso di BDS ed FDS, il contributo prepon 13
davante all'approssimazione della derivata viene
dei termini ϕ a destra o a sinistra del punto X_j
in cui si sta valutando la derivata.

Nei problemi di **convezione**, in cui il flusso si muove
secondo una direzione ben precisa, si usa BDS quando
il flusso va da X_{j-1} a X_j mentre si usa FDS quando
il flusso è nella direzione opposta. In questi casi si
parla di **SCHEMI UPWIND**.

Schemi upwind del primo ordine (= accurati al primo
ordine) sono da evitare perché l'errore di troncamento
ad essi associato genera una soluzione che corrispon-
de a coefficienti di diffusione maggiori di quello che
si ha in realtà (ovvero genera falsa diffusione, diffu-
sione numerica quindi!)

Sono quindi da preferirsi schemi upwind di ordine
elevato!

• APPROSSIMAZIONE DELLE DERIVATE SECONDE

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{\phi_{j+1}^n (x_j - x_{j-1}) + \phi_{j-1}^n (x_{j+1} - x_j) - \phi_j^n (x_{j+1} - x_{j-1})}{(x_{j+1} - x_j)^2 (x_j - x_{j-1})}$$

$x_j - x_{j-1} = \Delta x_j$
 $x_{j+1} - x_j = \Delta x_{j+1} \rightarrow$

APPROSSIMAZIONE
 SECONDO SCHEMA
 FDS

$$= \frac{\phi_{j+1}^n \cdot \Delta x_j + \phi_{j-1}^n \cdot \Delta x_{j+1} - \phi_j^n (\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)}{(\Delta x_{j+1})^2 \Delta x_j}$$

Tale relazione è stata ricavata mediante il seguente procedimento:

Discretizzo la derivata esterna secondo uno schema BOS

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]_j^m = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{x_{j+1} - x_j} \right) \right]_j^m = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \left[\frac{\partial \phi_{j+1}^n}{\partial x} - \frac{\partial \phi_j^n}{\partial x} \right]$$

Discretizzo le derivate interne secondo uno schema FDS

$$= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \left[\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{x_{j+1} - x_j} - \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{x_j - x_{j-1}} \right]_j^m =$$

$$= \frac{\phi_{j+1}^n (x_j - x_{j-1}) + \phi_{j-1}^n (x_{j+1} - x_j) - \phi_j^n (x_j - x_{j-1} + x_{j+1} - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)^2 (x_j - x_{j-1})}$$

$$= \frac{\phi_{j+1}^n \Delta x_j + \phi_{j-1}^n \Delta x_{j+1} - \phi_j^n (\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)}{(\Delta x_{j+1})^2 \Delta x_j} \quad \text{c.v.d.}$$

Approssimazione secondo lo schema Central Difference:

15

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^n = a \phi_{j-1}^n + b \phi_j^n + c \phi_{j+1}^n$$

Espando in
serie di Taylor
 ϕ_{j-1}^n e ϕ_{j+1}^n

$$= (a+b+c) \phi_j^m + (-a \Delta x_j + c \Delta x_{j+1}) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_j^m + \left(\frac{a \Delta x_j^2 + c \Delta x_{j+1}^2}{2} \right) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m + t.o.s.$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \Rightarrow b = -a - c = -\frac{2(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}{\Delta x_j \Delta x_{j+1} (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \\ -a \Delta x_j + c \Delta x_{j+1} = 0 & \Rightarrow a = c \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta x_j} = \frac{2}{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \\ \frac{a \Delta x_j^2 + c \Delta x_{j+1}^2}{2} = 1 & \Rightarrow c = \frac{2}{\Delta x_{j+1} (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \end{cases}$$

↓

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{\phi_{j+1}^n \cdot \Delta x_j + \phi_{j-1}^n \cdot \Delta x_{j+1} - \phi_j^m \cdot (\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)}{\frac{1}{2} (\Delta x_{j+1} + \Delta x_j) (\Delta x_{j+1}) (\Delta x_j)}$$

$$= \frac{\phi_{j+1}^n (x_j - x_{j-1}) + \phi_{j-1}^n (x_{j+1} - x_j) - \phi_j^m (x_{j+1} - x_{j-1})}{\frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}) (x_{j+1} - x_j) (x_j - x_{j-1})}$$

CDS

APPROX

[Eq. 3.23

Fezinger]

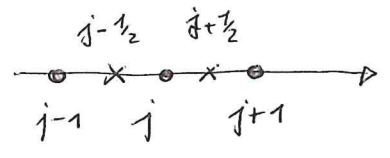
Se $\Delta x_{j+1} = \Delta x_j$ (griglia uniforme) allora:

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{\phi_{j+1}^n \cancel{\Delta x} + \phi_{j-1}^n \cancel{\Delta x} - \phi_j^m \cancel{(\Delta x + \Delta x)}}{\frac{1}{2} \cdot \cancel{2 \Delta x} \cdot \Delta x \cdot \Delta x} = \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^m + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

ovvero ritrovo la 3-point symmetric formula!

NOTA BENE: la stessa espressione per la derivata seconda è ricavabile approssimando tale derivata come:

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m \approx \frac{\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2} (X_{j+1} - X_{j-1})}$$



con $X_{j+1} - X_{j-1} = (X_{j+1} - X_{j+\frac{1}{2}}) + (X_{j+\frac{1}{2}} - X_j) + (X_j - X_{j-\frac{1}{2}}) + (X_{j-\frac{1}{2}} - X_{j-1})$

\uparrow
 $= X_{j+1} - X_{j-1} \pm X_{j+\frac{1}{2}} \pm X_j \pm X_{j-\frac{1}{2}}$

APPROSSIMAZIONE DELLE DERIVATE SECONDE TRAMITE POLYNOMIAL FITTING

opvale a 5-point symmetric formula ricorrendo tramite espansione in serie di Taylor!

• 4th-order CBS

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j^m = \frac{-\phi_{j+2}^n + 16\phi_{j+1}^n - 30\phi_j^n + 16\phi_{j-1}^n - \phi_{j-2}^n}{12(\Delta X_j)^2} + \mathcal{O}((\Delta X_j)^4)$$

Come prima, anche questa relazione si ottiene fittando la funzione $\phi(x)$ con un polinomio di quarto grado attraverso 5 punti, da X_{j+2} a X_{j-2} .

N.B. Possibile approssimazione della derivata seconda

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]_j^m \approx \frac{\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{j+\frac{1}{2}}^n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2} (X_{j+1} - X_{j-1})}$$

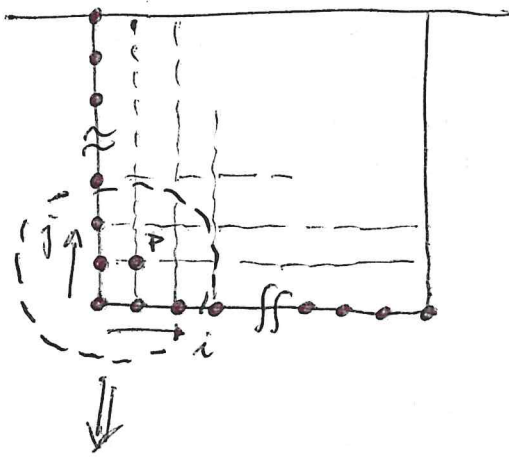
$\approx 2 \cdot \frac{\Gamma_{j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{X_{j+1} - X_j} - \Gamma_{j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{X_j - X_{j-1}}}{x \dots x}$

potrebbe essere una viscosita!

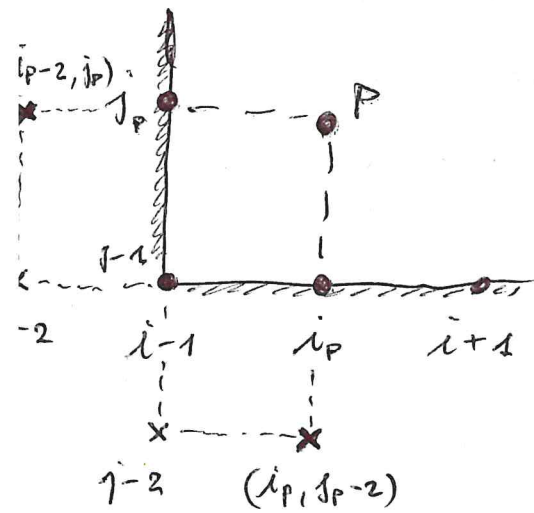
IMPLEMENTAZIONE DELLE APPROSSIMAZIONI DI ORDINE ELEVATO IN PROSSIMITA' DI PARETE

17

Supponiamo di voler risolvere l'eq. del trasporto per la vorticità nella cavità 2D utilizzando una



approssimazione di ordine 3 o 4 per le derivate (prime e seconde). Nel punto P, allora, sarà necessario conoscere il valore della vorticità in almeno altri 3 punti nell'intorno di P per poter calcolare la derivata. Può quindi accadere che uno di questi punti "cada" fuori del dominio di calcolo. In questo caso, le approssimazioni adottate non è più utile



stabile.

Soluzione: o si passa ad un'approssimazione di ordine inferiore o si ricorre ad una formulazione ONE-SIDED dell'approssimazione.

Ad es., per risolvere una derivata prima con una approssimazione del terzo ordine nel punto P si

Puo' usare uno schema asimmetrico tipo FDS: 18

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j^n = \frac{-\phi_{j+2}^n + 6\phi_{j+1}^n - 3\phi_j^n - 2\phi_{j-1}^n}{6\Delta x} + O(\Delta x^3)$$

con $\phi_j = \omega_j$ e $x_j = x_p$!

Boundary value!

→ First inner point!

Oppure si possono usare approssimazione alternate tramite fitting polinomiale:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_j^n = \frac{-\phi_{j+3}^n + 6\phi_{j+2}^n + 18\phi_{j+1}^n + 10\phi_j^n - 33\phi_{j-1}^n}{60\Delta x} + O(\Delta x^4)$$

First inner point!

Boundary value!

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{-24\phi_{j+3}^n + 96\phi_{j+2}^n + 18\phi_{j+1}^n - 240\phi_j^n + 1247\phi_{j-1}^n}{180(\Delta x)^2} + O(\Delta x^3)$$

IMPLEMENTAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO TRAMITE DIFFERENZE FINITE

Se il valore dell'incognita è noto in corrispondenza del contorno, allora è sufficiente imporre una B.C. di tipo Dirichlet e non serve fare altro (⇒ nel codice si usa una istruzione di assegnazione del valore!).

Se la PDE da risolvere numericamente è del 19
 II° ordine (cioè contiene derivate seconde)
 sarà necessario imporre anche una B.C. di tipo
 Neumann (ovvero sulla derivata prima).

Se il valore delle derivate prima in corrispondenza
 del contorno è noto, allora è facile implementare
 la B.C. (di nuovo, basta ricorrere ad una istru-
 zione di assegnazione).

Se invece il valore non è noto è possibile utilizzare
 una approssimazione, ad es. alle differenze finite:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\text{contorno}}^n \approx \frac{-\phi_{j+2}^n (x_{j+1} - x_j)^2 + \phi_{j+1}^n (x_{j+2} - x_j)^2}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})}$$

Boundary value of the unknown ϕ ← $\phi_j^n [(x_{j+2} - x_j)^2 - (x_{j+1} - x_j)^2]$

Espressione approssimata al II° ordine valida su
 generica griglia strutturata non-uniforme.

Se griglia uniforme, la \otimes diventa:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\text{contorno}}^n \approx \frac{-\phi_{j+2}^n + 4\phi_{j+1}^n - 3\phi_j^m}{2\Delta x}$$

mentre se vogliamo un' approssimazione del Π° /20
 ordine (sempre su griglia uniforme) possiamo usare:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\text{centro}}^n \approx \frac{2\phi_{j+3}^n - 9\phi_{j+2}^n + 18\phi_{j+1}^n - 11\phi_j^n}{6\Delta x}$$

• ESEMPIO DI APPLICAZIONE : EQ. DI BURGER

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

x Dominio di calcolo : $0 < x < L$

$$0 < t < +\infty$$

x Condizioni iniziali : $u(x, t=0) = f(x)$

x Condizioni al contorno : $u(0, t) = U$; $u(L, t) = 0$

x Spazatura della griglia : $N = \text{punti griglia}$

$N-1 = \text{spaziature tra due punti successivi}$

$$\Delta x = \frac{L}{N-1} \quad (\text{griglia unif.})$$

x Approssimazione delle derivate :

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^m \approx u_j^m \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \quad [\text{T.E.} \sim \mathcal{O}(\Delta x)^2]$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^m \approx \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2} \quad [T.E. \sim O((\Delta x)^4)] \quad \boxed{2.}$$

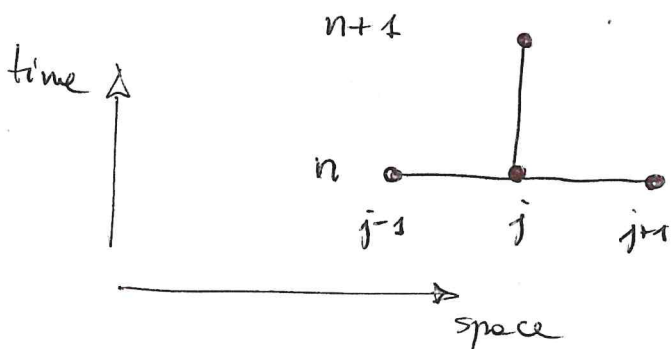
$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^m \approx \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} \quad \text{SCHEMA DI EULERO}$$

* Calcolare :

$$u_j^{m+1} = u_j^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nu u_j^m \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) \quad (\star)$$

↑
SOLUZIONE NUMERICA

L'espressione appena ricavata è stata ottenuta applicando uno schema di tipo Forward-Difference nel tempo (che produce appunto un'approssimazione di Eulero della derivata temporale) ed uno schema del tipo Central-Difference nello spazio. L'approccio utilizzato è meglio noto come FTCS SCHEMA :



ESERCITAZIONE

I°. Risolvere la eq. (\star) usando i seguenti parametri :

$$U = L = 1, \quad \Delta t = 0,05, \quad N = 20, \quad \nu = 0,05$$

ed imponendo una C.I. a piacere (ovvero una espressione a piacere per $f(x)$, tipo:

$$u(x, t=0) = (1-x) \cdot U$$

Che succede? Dovreste trovare che lo schema diventa instabile! Come mai?

Perché nello scegliere i parametri della simulazione non abbiamo rispettato la condizione di stabilità, che per lo schema adottato è (senza dimostrazione

$$\boxed{Co \leq \frac{1}{2}} \quad \text{CFL CONDITION}$$

$$\text{Con } Co = \frac{U \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\text{Nel nostro caso: } Co = \frac{0,05 \cdot 0,05}{(0,05)^2} = 1 > \frac{1}{2} !!$$

Per rimediare, è sufficiente:

(a) ridurre il time step $\rightarrow \Delta t = 0,02$ ad es.

(b) aumentare la spaziatura delle griglia \rightarrow SCONSIGLIABILE

N.B. Modificare U non è solitamente possibile perché è un parametro "imposto" dal problema che vogliamo risolvere (ad es., è la viscosità del fluido).

II° RISOLVERE l'eq. con $\Delta t = 0.02$ (STABILE) 23

III° Risolvere l'eq. con $\Delta x = 0.1$ [$N = 11$] e
 $\Delta t = 0.095$

In questo caso, la condizione di stabilità è
soddisfatta:

$$C_0 = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0.05 \cdot 0.095}{(0.1)^2} = 0.475 \leq \frac{1}{2}$$

ma la griglia è troppo coarse per produrre una
soluzione accurata.

Δt	N	ν
0.05	21	0.05
0.02	21	0.05
0.095	11	0.05