

METODO AGLI ELEMENTI FINITI

Metodo che nasce per produrre soluzioni ad hoc per problemi di **analisi strutturale** (calcolo di sforzi e spostamenti tramite sistemi di equazioni non-lineari che richiedono risoluzione di un sistema matriciale).

E' un metodo molto simile al FVM, nel senso che il dominio e' discretizzato con una serie di volumi discreti (gli **ELEMENTI FINITI** appunto) che tipicamente costituiscono foglie di tipo non-strutturato.

La principale differenza e' che l'equazione di conservazione che deve essere risolta per ciascun elemento viene moltiplicata per una **FUNZIONE DI PESO (WEIGHT FUNCTION)** prima di venire integrata.

SUGGESTED READING: THE FINITE ELEMENT METHOD FOR FLUID DYNAMICS - G.C. ZIENKIEWICZ
R.L. TAYLOR, P. NITHIARASU

VANTAGGI: applicabile a geometrie complesse

SVANTAGGI: il sistema di equazioni da risolvere, una volta linearizzato genera una matrice che non e' ben strutturata come quelle che vengono prodotte da schemi che operano su foglie strutturate e regolari. E' quindi piu' complicato formulare dei metodi di soluzione efficienti.

In ambito fluidodinamico, la formulazione del FEM piu' diffusa e' quella basata sul **metodo di Galerkin** che e' un

METODO AI RESIDUI PESATI (WRM).

12

Formulazione Variazionale \rightarrow TIPO FVM! di un problema fisico: prevede la trasformazione in forma integrale delle eq. diff. che lo regolano.

Formulazione Residuale di un problema fisico: prevede che la soluzione del problema ammetta rappresentazione analitica.

Si consideri una PDE qualsiasi, ad es. l'eq. di diffusione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Nei metodi WRM si assume che la PDE ammetta una soluzione approssimata avente forma generale:

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \phi_j(x, y, z)$$

con $T_0(x, y, z, t)$: parte della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali ed al contorno

$a_j(t)$: coefficienti incogniti

$\phi_j(x, y, z)$: funzioni analitiche note che costituiscono la soluzione approssimata (TRIAL FUNCTIONS)

Possono essere polinomi $[\phi_j(x) = x^{j-1}]$

o funzioni trigonometriche $[\phi_j(x) = \sin(j\pi x)]$

N : numero di funzioni approssimanti $\phi_j(x)$.

I coefficienti incogniti sono determinabili risolvendo $\lfloor 3$
 un sistema di equazioni generato a partire dalle PDE
 stesse. Dato infatti \bar{T} la soluzione esatta della PDE
 deve valere:

$$R(\bar{T}) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0$$

RESIDUO DELL'
 EQUAZIONE

Risulterà invece:

$$R(T) = \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \neq 0$$

I coefficienti $a_j(t)$ si determinano imponendo che l'integrale dei residui pesati sia zero sul dominio computazionale

$$\iiint W_m(x, y, z) R \, dx \, dy \, dz = 0$$

com $m = 1, \dots, M$. \hookrightarrow In generale: $R = \text{funz. di } x, y, z!$

Nel caso di una PDE non stazionaria (i.e. con $\partial/\partial t \neq 0$) si ottiene un sistema di ODE, nel caso di una PDE stazionaria (i.e. $\partial/\partial t = 0$) si ottiene un sistema di equazioni algebriche.

A seconda di come vengono scelti i pesi W_m , si distinguono diverse tipologie di WRM. Il metodo di Galer-

Kim prevede di selezionare i pesi direttamente della
medesima famiglia delle funzioni approssimanti: 4

$$W_m(x, y, z) = \phi_m(x, y, z)$$

ESEMPIO:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} - \bar{y} = 0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{con } \bar{y}(x=0) = 1.$$

- soluzione esatta: $\bar{y} = \exp(x)$
- soluzione approssimata: $y = 1 + \sum_{j=1}^N a_j x^j$
↑
 $\phi_j(x)$!

N.B. $y(x=0) = 1$ ok!

- Residuo $R(x) = \frac{dy}{dx} - y = \sum_{j=1}^N a_j j x^{j-1} - \left(1 + \sum_{j=1}^N a_j x^j\right)$

$$= \sum_{j=1}^N a_j (j x^{j-1} - x^j) - 1$$

- Integrale: $\int_0^1 W_m(x) R(x) dx =$

$$= \int_0^1 x^{m-1} \left[\sum_{j=1}^N a_j (j x^{j-1} - x^j) - 1 \right] dx = 0$$

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^N a_j (j x^{m+j-2} - x^{m+j-1}) dx = \int_0^1 x^{m-1} dx$$

$$\sum_{j=1}^N a_j j \frac{1}{m+j-1} x^{m+j-1} \Big|_0^1 - \frac{1}{m+1} x^{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m} x^m \Big|_0^1$$

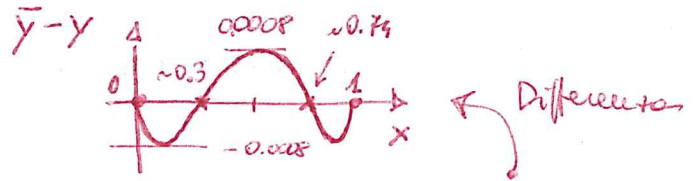
$$\sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{j}{m+j-1} - \frac{1}{m+j} \right) = \frac{1}{m} \Rightarrow A \cdot S = D \quad (*)$$

$\underbrace{\quad}_{a_j} \quad \underbrace{\quad}_{S_{mj}} \quad \underbrace{\quad}_{d_m}$

Se $N=3$ allora il sistema (*) diventa :

$$\begin{matrix} & j \rightarrow \\ m \downarrow & \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{5} & \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1,0141 \\ a_2 = 0,4225 \\ a_3 = 0,2817 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{11}{20} \\ -\frac{1}{12} & \frac{3}{10} & \frac{13}{30} \end{bmatrix}$$



La soluzione approssimata è :

$$y(x) = 1 + 1,0141x + 0,4225x^2 + 0,2817x^3$$

• APPLICAZIONE DEL METODO DI GALERKIN AGLI ELEMENTI FINITI

Rispetto al metodo di Galerkin tradizionale, quello visto prima, il metodo agli elementi finiti secondo Galerkin prevede di scrivere la soluzione approssimata delle PDE come :

$$T = \sum_{j=1}^N T_j \phi_j(x, y, z)$$

dove T_j = valori nodali della soluzione (incogniti).

In questa forma, le **funzioni approssimanti** sono interpretabili come **funzioni interpolanti** che possono essere utilizzati per approssimare la soluzione T a partire dai valori nodali T_j .

Le funzioni approssimanti ϕ_j vengono selezionate da \mathbb{L}^6 famiglie di polinomi di ordine basso (LOW-ORDER PIECEWISE POLYNOMIALS) in modo da produrre matrici con termini non-nulli concentrati in prossimità della diagonale (ovvero matrici non sparse). Il costo computazionale associato alla risoluzione della matrice sarà pertanto relativamente basso.

Possibili espressioni per le funzioni approssimanti sono:

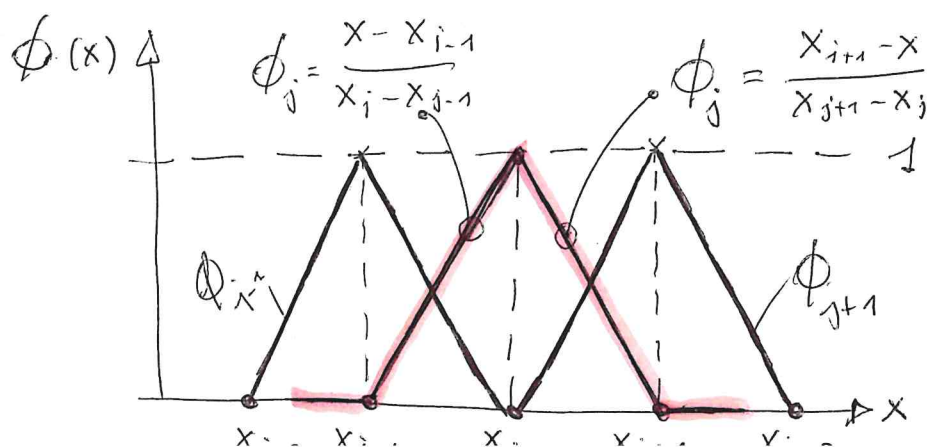
$$1) \phi_j(x) = 0 \quad \text{se} \quad x < x_{j-1} \quad [1D!!]$$

$$= \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad \text{se} \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j$$

$$= 1 \quad \text{se} \quad x = x_j$$

$$= \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad \text{se} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$= 0 \quad \text{se} \quad x > x_{j+1}$$



Risulta pertanto:

18

$$T = \begin{cases} T_{j-2} \phi_{j-2} + T_{j-1} \phi_{j-1} + T_j \phi_j & \text{se } X_{j-2} \leq x \leq X_j \\ T_j \phi_j + T_{j+1} \phi_{j+1} + T_{j+2} \phi_{j+2} & \text{se } X_j \leq x \leq X_{j+2} \end{cases}$$

$$\text{con: } \phi_{j-1} = \left(\frac{x - X_{j-2}}{X_{j-1} - X_{j-2}} \right) \left(\frac{x - X_j}{X_{j-1} - X_j} \right)$$

se $X_{j-2} \leq x \leq X_j$

$$\phi_{j-2} = \left(\frac{x - X_{j-1}}{X_{j-2} - X_{j-1}} \right) \left(\frac{x - X_j}{X_{j-2} - X_j} \right)$$

Analogamente, si esprimono ϕ_{j+1} e ϕ_{j+2} se $X_j \leq x \leq X_{j+2}$.
In pratica stiamo ricavando la soluzione T alla

generica posizione x mediante INTERPOLAZIONE

QUADRATICA. In questo caso, le funzioni approssimanti

$\phi(x)$ sono detti FUNZIONI INTERPOLANTI DI LAGRANGE.

L'interpolazione quadratica è chiaramente più accurata
della lineare a parità di numero di nodi in quanto

l'errore di interpolazione si riduce con l'asso $\sim \Delta x^3$

(e non Δx^2) al raffinarsi della griglia.

In linea di principio, si potrebbero usare funzioni di ordine
più elevato per $\phi_j(x)$. Nella pratica però, anche se tali
espressioni risulterebbero più accurate, si tende a non

utilizzarle, soprattutto in 2D/3D. Questo perché 19
 il sistema di equazioni che si produrrebbe presenterebbe
 molti più termini non-nulli rispetto al caso di
 interpolazione low-order \implies matrici sparse!

NOTA: Linear approximating functions \cong 2nd-order FD
 (rule of thumb) Quadratic approximating functions \cong 3rd-order FD

3) INTERPOLAZIONE IN 2D :

$$T = \sum_1^4 T_e \phi_e(\xi, \eta)$$

[INTERP. BILINEARE]

$$\text{con: } \phi_e(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi_e \xi)(1 + \eta_e \eta)}{4}$$

e con: $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Il riferimento (ξ, η) è definito per ciascun elemento della griglia. Per una griglia 2D come quella in

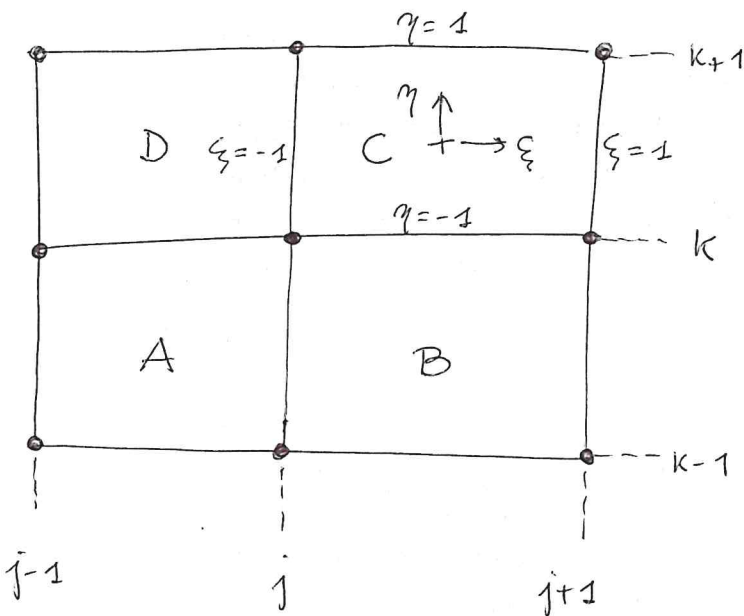


figura si ha: $\phi_1 = \phi_{j,k} = \phi(\xi_e = -1, \eta_e = -1) = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$

$$\phi_2 = \phi_{j+1,k} = \phi(\xi_e = 1, \eta_e = -1) = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$\phi_3 = \phi_{j+1,k+1} = \phi(\xi_e = 1, \eta_e = 1) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

$$\phi_4 = \phi_{j_{ik+1}} = \phi(\xi_e = -1, \eta_e = 1)$$

$$= \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}$$

Con tale interpolazione, si ottiene una soluzione T continua attraverso i vari elementi (T is continuous across element boundaries). Non e' invece continua la sua derivata

$$T = \sum_1^3 e T_e \phi_e(\xi, \eta) \quad [\text{INTERP. BI-QUADRATICA}]$$

Com:

$\phi_e(\xi, \eta) = \begin{cases} \text{SPACOLI} \\ \xi_e = 0 \end{cases} = \frac{\xi_e \xi (1 + \xi_e \xi) \eta_e \eta (1 + \eta_e \eta)}{4}$
 $\begin{cases} \text{SPACOLI} \\ \eta_e = 0 \end{cases} = \frac{(1 - \xi^2) \eta_e \eta (1 + \eta_e \eta)}{2}$
 $\begin{cases} \text{CENTRI} \\ \xi_e = 0 \end{cases} = \frac{(1 - \eta^2) \xi_e \xi (1 + \xi_e \xi)}{2}$
 $\begin{cases} \text{CENTRI} \\ \eta_e = 0 \end{cases} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$

[BI-QUADRATIC LAGRANGE APPROXIMATING FUNCTIONS]

Le funzioni $\phi_e(\xi, \eta)$ in 2D altro non sono che il prodotto delle corrispondenti funzioni 1D, ovvero $\phi_e(\xi)$ e $\phi_e(\eta)$.

- 4) INTERPOLAZIONE 3D :
- 4.1) INTERP. TRI-LINEARE : [2D] Elementi rettangolari (4 nodi) \Rightarrow [3D] Parallelepipedi (8 nodi)
 - 4.2.) INTERP. TRI-QUADRATICA : [2D] Elementi rettangolari \Rightarrow [3D] Parallelepipedi (27 nodi)

Equazione monodimensionale di diffusione in regime transitorio :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0 \quad (\bar{T} = \text{soluz. esatta})$$

Intervallo di definizione : $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

I.C. / B.C. : $\bar{T}(x, 0) = T_0(x)$; $\bar{T}(0, t) = a$; $\bar{T}(1, t) = b$

• $R = \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ RESIDUO ($T = \text{soluz. approx.}$)

• $W_m(x) = \phi_m(x)$ PESI (assunti pari alle trial function)

↓

$$\int_0^1 W_m(x) R \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \phi_m(x) \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] dx = 0$$

$$\int_0^1 \phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial t} \, dx - \int_0^1 \alpha \phi_m(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \, dx = 0 \quad \frac{d}{dx} \left[\phi_m \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \phi_m \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{d\phi_m}{dx} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\alpha \left[\phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_0^1 - \int_0^1 \alpha \frac{d\phi_m(x)}{dx} \frac{\partial T}{\partial x} \, dx$$

$$\cancel{\phi_m(x=1) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1}} - \cancel{\phi_m(x=0) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}$$

$$\int_0^1 \phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_0^1 \alpha \frac{d\phi_m(x)}{dx} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0 \quad (1)$$

Ora, il metodo agli elementi finiti secondo la formulazione residuale di Galerkin prevede di porre:

$$T = \sum_{j=1}^N T_j \phi_j(x) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^N T_j \phi_j(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^N T_j \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N T_j \frac{d\phi_j(x)}{dx}$$

L'eq. (1) diventa pertanto:

$$\int_0^1 \phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_0^1 \alpha \frac{d\phi_m(x)}{dx} \cdot \sum_{j=1}^N T_j \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx = 0$$

CONSTANTE SE
SOLO RISPETTO
ALL'INDICE j

$$\sum_{j=1}^N T_j \left[\int_0^1 \alpha \left(- \frac{d\phi_m(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} \right) dx \right] \cdot T_j = \int_0^1 \phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial t} dx \quad (2)$$

con $m = 1, \dots, N$.

L'eq. (2) rappresenta un sistema di equazioni algebriche che può essere scritto in forma compatta come:

$$\underline{B} T = G$$

con B matrice e T G vettori. In particolare:

$$b_{m,j} = \text{elemento di } \underline{B} = \int_0^1 \alpha \left(-\frac{d\phi_m(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} \right) dx$$

13

T_j = elemento di T

$$g_m = \text{elemento di } G = \int_0^1 \phi_m(x) \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

Le funzioni approssimanti $\phi_j(x)$ vengono espresse come funzioni lineari dipendenti dalle coordinate ξ :

$$\phi_j(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} \\ \frac{1-\xi}{2} \end{cases}$$

$$\text{con } \xi = \frac{2[X - (x_{j-1} + x_j)/2]}{\Delta x_j} \begin{cases} \text{se } x_{j-1} < x < x_j \end{cases}$$

$$\text{con } \xi = \frac{2[X - (x_j + x_{j+1})/2]}{\Delta x_{j+1}} \begin{cases} \text{se } x_j < x < x_{j+1} \end{cases}$$

Tenendo conto che anche $\phi_m(x)$ può essere espresso in questa forma, si trova che gli elementi b_{mij} della matrice \underline{B} sono tutti nulli tranne quelli diagonali e quelli adiacenti alla diagonale. Avremo:

$$b_{j,j-1} = \frac{1}{\Delta x_j} + \frac{\Delta x_j}{6} \rightarrow \infty \text{ (}\neq 0 \text{ con Sturm-Liouville)}$$

\underline{B} = matrice tridiagonale!

$$b_{j,j} = -\left(\frac{1}{\Delta x_j} + \frac{1}{\Delta x_{j+1}} \right) + \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{3} \text{ per } 1 \leq j \leq N-1$$

$$b_{j,j+1} = \frac{1}{\Delta x_{j+1}} + \frac{\Delta x_{j+1}}{6}$$

mentre: $b_{N,N-1} = \frac{1}{\Delta x_N} + \frac{\Delta x_N}{6}$ e $b_{N,N} = -\frac{1}{\Delta x_N} + \frac{\Delta x_N}{3}$ per $j=N$ ($b_{N,N+1} = 0!!$)

Per esprimere invece i coefficienti del vettore G si può procedere nel seguente modo: 14

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_1^N j \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j \phi_j(x) \Rightarrow g_m = \int_0^1 \phi_m(x) \sum_1^N j \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j \phi_j(x) dx$$

$$= \sum_1^N j \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j \int_0^1 \phi_m(x) \phi_j(x) dx \quad (3)$$

Utilizzando funzioni approssimanti di tipo lineare, l'eq.

(3) si può riscrivere come:

$$g_m \Big|_{m=j} = \left(\frac{\Delta X_j}{6} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j-1} + \left(\frac{\Delta X_j + \Delta X_{j+1}}{3} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j + \left(\frac{\Delta X_{j+1}}{6} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j+1}$$

per $1 \leq j \leq N-1$. Risulta invece: $g_m \Big|_{m=N} = \frac{\Delta X_N}{6} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{N-1} + \frac{\Delta X_N}{3} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_N$

essendo $\Delta X_{N+1} = 0$ e $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{N+1} = 0!$

Ipotesizzando griglia uniforme ($\Delta X_{j-1} = \Delta X_j = \Delta X_{j+1} = \Delta X$) si

trova:

$$g_m = \Delta X \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j+1} \right]$$

mentre $b_{j,j-1} = b_{j,j+1} = \frac{1}{\Delta X}$ e $b_{j,j} = -\frac{2}{\Delta X}$. In definitiva:

$$\alpha \left(\frac{1}{\Delta X} T_{j-1} - \frac{2}{\Delta X} T_j + \frac{1}{\Delta X} T_{j+1} \right) = \Delta X \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_j + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j+1} \right]$$

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{j-1} + \frac{2}{3} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_j + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{j+1} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1})$$

[VALIDA SU GRIGLIA UNIFORME]

La derivata temporale viene espressa come $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T^{n+1}}{\Delta t}$ mentre la RHS viene valutata come media pesata, tramite un coefficiente β , dei valori che la RHS stessa assume di time step n ed $n+1$. Si trova:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta T_{j-1}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{2}{3} \frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta T_{j+1}^{n+1}}{\Delta t} =$$

$$(4)$$

$$= \alpha \left[(1-\beta) \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

con β = parametro che controlla il livello implicito dell'equazione

Indicando $\Delta T_j^{n+1} = T_j^{n+1} - T_j^n$ si puo' riscrivere l'eq. (4) in forma compatta come:

$$\frac{M_x \Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} = \alpha \left[(1-\beta) L_{xx} T_j^n + \beta L_{xx} T_j^{n+1} \right]$$

con $M_x = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right)$; $L_{xx} = \left(\frac{1}{\Delta x^2}, -\frac{2}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2} \right)$

MASS OPERATOR

DIFFERENCE OPERATOR

$$\frac{M_x (T_j^{m+1} - T_j^m)}{\Delta t} = \alpha \left[(1 - \beta) L_{xx} T_j^m + \beta L_{xx} T_j^{m+1} \right] \quad [16]$$

$$\left(\frac{M_x - \Delta t \alpha \beta L_{xx}}{\Delta t} \right) T_j^{m+1} = \left[\frac{M_x + \Delta t \alpha (1 - \beta) L_{xx}}{\Delta t} \right] T_j^m$$

↓

$$\textcircled{*} \quad \left(M_x - \Delta t \cdot \alpha \beta L_{xx} \right) T_j^{m+1} = \left[M_x + \Delta t \cdot \alpha (1 - \beta) L_{xx} \right] T_j^m$$

Questa equazione algebrica può essere applicata a ciascun nodo della griglia e produce un sistema di equazioni tridiagonale che può essere quindi risolto mediante

ALGORITMO DI THOMAS (ad hoc per sistemi tridiagonali).

NOTE SULL'EQ. $\textcircled{*}$:

1. Errore di troncamento $\sim \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$
2. Equazione con stabilità incondizionata se $\beta \geq \frac{1}{2}$
3. Se $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{6\alpha\beta}$ si ottiene uno schema esplicito:

$$T_j^{m+1} = \frac{T_{j-1}^m + (6\beta - 2)T_j^m + T_{j+1}^m}{6\beta}$$

N.B. $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{3\alpha}$ se $\beta = \frac{1}{2}$

$$\text{e } T_j^{m+1} = \frac{T_{j-1}^m + T_j^m + T_{j+1}^m}{3} \quad !!$$

$$\left[\frac{1}{6} (T_{j-1}^{m+1} - T_{j-1}^{m+1}) + \frac{4}{6} (T_j^{m+1} - T_j^m) + \frac{1}{6} (T_{j+1}^{m+1} - T_{j+1}^m) \right] \cdot \frac{1}{\frac{\Delta x^2}{6\alpha\beta}} =$$

$$= \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left[(1-\beta)(T_{j-1}^m - 2T_j^m + T_{j+1}^m) + \beta(T_{j-1}^{m+1} - 2T_j^{m+1} + T_{j+1}^{m+1}) \right]$$

$$\beta (T_{j-1}^{m+1} - T_{j-1}^{m+1} + 4T_j^{m+1} - 4T_j^m + T_{j+1}^{m+1} - T_{j+1}^m) =$$

$$= T_{j-1}^m - 2T_j^m + T_{j+1}^m + \beta (T_{j-1}^{m+1} - 2T_j^{m+1} + T_{j+1}^{m+1} - T_{j-1}^m + 2T_j^m - T_{j+1}^m)$$

$$6\beta (T_j^{m+1} - T_j^m) = T_{j-1}^m - 2T_j^m + T_{j+1}^m$$

$$T_j^{m+1} = \frac{T_{j-1}^m + (6\beta - 2)T_j^m + T_{j+1}^m}{6\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} T_{j-1}^m + T_j^m + T_{j+1}^m \\ \hline 3 \end{array} \right. \quad \text{C.V.D. !}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & & & \\ & 1 & c_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & c_{N-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ \vdots \\ d_{N-1}' \\ d_N' \end{bmatrix}$$

Com $c_1' = \frac{c_1}{b_1}$, $d_1' = \frac{d_1}{b_1}$ e $C_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i C_{i-1}'}$, $d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i C_{i-1}'}$

La manipolazione avviene procedendo dalla prima all'ultima riga (FORWARD SWEEP).

II° PASSO: si sostituisce all'indietro (BACKWARD SWEEP)

$$v_N = d_N' \text{ e } v_i = d_i' - v_{i+1} C_i'$$

L'algoritmo di Thomas è "economico" poiché necessita di sole $5N-4$ operazioni (di moltiplicazione/divisione) ma per funzionare senza produrre contaminazione degli arrotondi di round-off richiede che valga la condizione:

$$|b_i| > |a_i| + |c_i|$$

Requirement to prevent ill-conditioning (round-off contamination!)

ILL-CONDITIONING MATRIX : MATRICE MAL CONDIZIONATA = matrice quadrata in cui piccole variazioni negli elementi di A o piccole variazioni negli elementi di b producono grandi variazioni negli elementi di x.

Ax=b