

CLASSIFICAZIONE DELLE PDE MEDIANTE CURVE CARATTERISTICHE

10

Consideriamo la solita forma generale per una PDE del II° ordine non omogenea:

$$A \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + E \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + F \phi + G = 0$$

In forma più compatta:

$$A \phi_{\xi\xi} + B \phi_{\xi\eta} + C \phi_{\eta\eta} + D \phi_{\xi} + E \phi_{\eta} + F \phi + G = 0 \quad [1]$$

Le curve caratteristiche sono ipersuperfici di dimensione $n-1$ lungo le quali si propaga l'informazione (e le eventuali discontinuità) di una PDE

Una ipersuperficie è una varietà differenziabile di dimensione $n-1$ immersa in uno spazio euclideo di dimensione n .

→ CURVA = IPERSUPERFICIE DI UN PIANO
→ SUPERFICIE = IPERSUPERFICIE DI UNO SPAZIO

Le curve caratteristiche sono pertanto curve reali definite all'interno del dominio di definizione della PDE.

Fisicamente, le curve caratteristiche rappresentano il luogo geometrico dei punti del mezzo (in 2D) o dell.

Spazio (in 3D) in cui si annullano le derivate 2
secondo della PDE da cui derivano.

Per determinare le curve caratteristiche della [1] si
procede come segue:

- riscriviamo la [1] come:

$$A\phi_{\xi\xi} + B\phi_{\xi\eta} + C\phi_{\eta\eta} = -D\phi_{\xi} - E\phi_{\eta} - F\phi - G$$

- in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ d\xi & d\eta & 0 \\ 0 & d\xi & d\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\xi\xi} \\ \phi_{\xi\eta} \\ \phi_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D\phi_{\xi} - E\phi_{\eta} - F\phi - G \\ d\phi_{\xi} \\ d\phi_{\eta} \end{bmatrix}$$

essendo $d\phi_{\xi} = \phi_{\xi\xi}d\xi + \phi_{\xi\eta}d\eta \Rightarrow \frac{d\phi_{\xi}}{d\xi} = \phi_{\xi\xi} + \phi_{\xi\eta} \frac{d\eta}{d\xi}$ $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} !!$

$d\phi_{\eta} = \phi_{\eta\xi}d\xi + \phi_{\eta\eta}d\eta \Rightarrow \frac{d\phi_{\eta}}{d\eta} = \phi_{\eta\xi} \frac{d\xi}{d\eta} + \phi_{\eta\eta}$

- calcolando il determinante della matrice 3×3 e ponendo a zero si trova:

$$A \begin{vmatrix} d\eta & 0 \\ d\xi & d\eta \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} d\xi & 0 \\ 0 & d\eta \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} d\xi & d\eta \\ 0 & d\xi \end{vmatrix} = A(d\eta)^2 - B d\xi d\eta + C(d\xi)^2 = 0$$

ovvero :

$$A \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 + B \frac{dy}{d\xi} + C = 0$$

⇓

$$\left(\frac{dy}{d\xi} \right)_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B \pm \Delta}{2A}$$

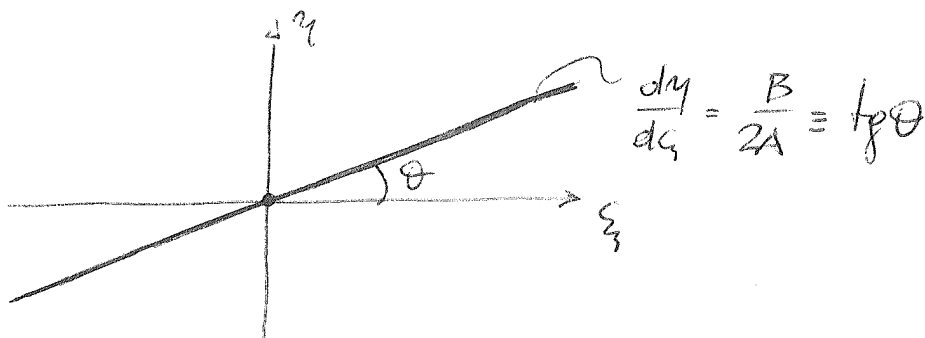
• Pertanto :

$$\Delta = 0 \quad [\text{PDE PARABOLICA}] \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{B}{2A} \quad \left[\begin{array}{l} 2 \text{ CURVE CARATTERI-} \\ \text{STICHE REALI COINCID.} \end{array} \right]$$

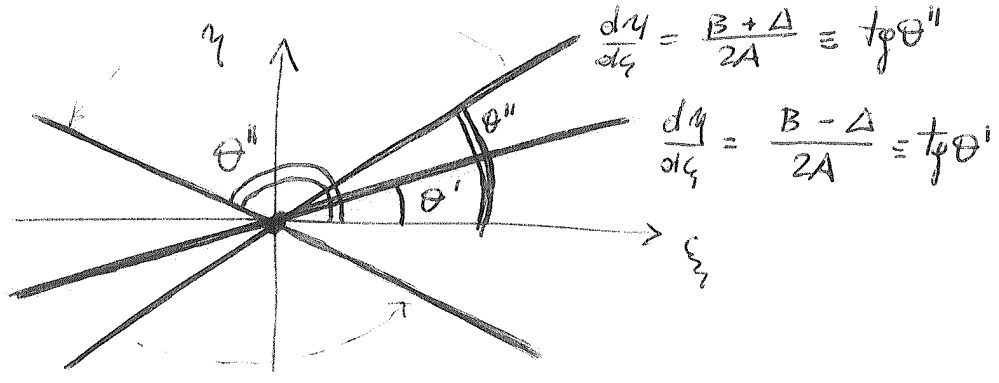
$$\Delta > 0 \quad [\text{PDE IPERBOLICA}] \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{B \pm \Delta}{2A} \quad \left[\begin{array}{l} 2 \text{ CURVE CARATTERISTICHE} \\ \text{REALI NON COINCIDENTI} \end{array} \right]$$

$$\Delta < 0 \quad [\text{PDE ELLITTICA}] \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{B \pm i\Delta}{2A} \quad \left[\begin{array}{l} 2 \text{ CURVE CARATTERIST.} \\ \text{CHE COMPLESSE} \end{array} \right]$$

Quindi nel caso di una PDE PARABOLICA l'informazione si propaga lungo un'unica curva caratteristica :



Nel caso di PDE IPERBOLICA, l'informazione si propaga lungo due curve caratteristiche:



ESEMPI :

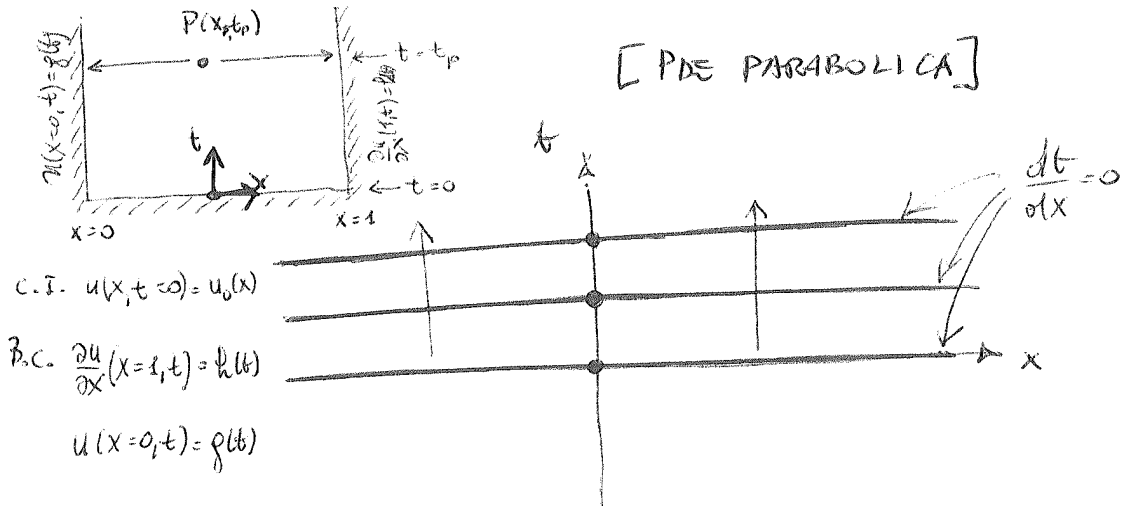
$$1) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EQUAZ. DI CONDUZIONE MONODIMENSIONALE DI CALORE (se $u = \text{temp.}$) O DI DIFFUSIONE (se $u = \text{velocità}$)

SOLUZ: $u = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$

decedimento esponenziale nel tempo

CURVE CARATTERISTICHE : $\frac{dt}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-1) \cdot 0}}{2(-1)} = 0$



[PDE PARABOLICA]

l'informazione si propaga in maniera smorzata lungo un'unica direzione

$$2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

EQ. DI LAPLACE

4 bis

[u può essere temp. o vel. !]

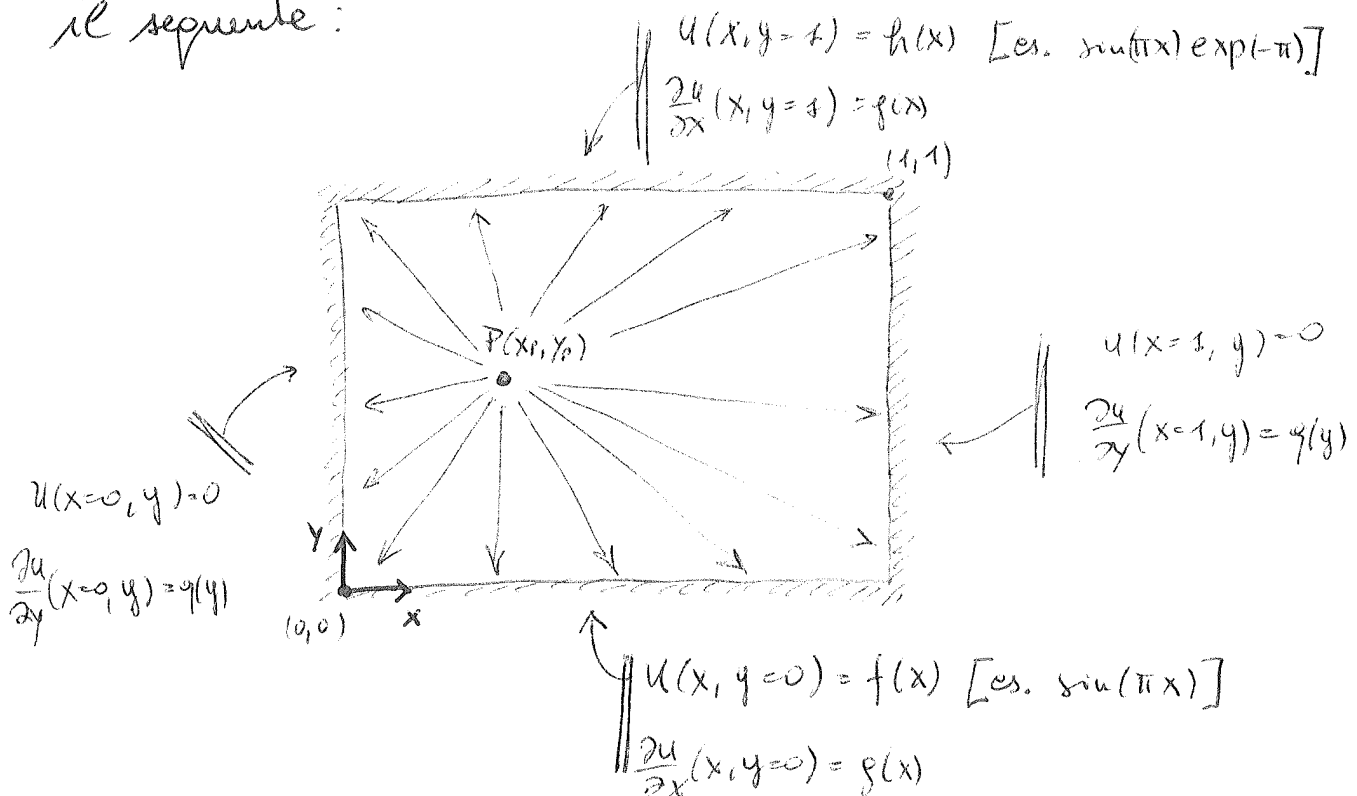
SOLUZ: $u = \sin(\pi x) \exp(-\pi y)$

CURVE CARATTERISTICHE : $\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-1)(1)}}{2 \cdot 1}$

$$\left| \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} = \pm \sqrt{-1} \right.$$

[PROBLEMA ELLITTICA]

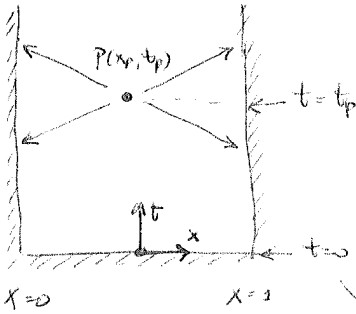
Non è possibile disegnare graficamente le curve caratteristiche nel piano (x, y). Un tipico dominio di calcolo per risolvere l'equazione di Laplace è il seguente:



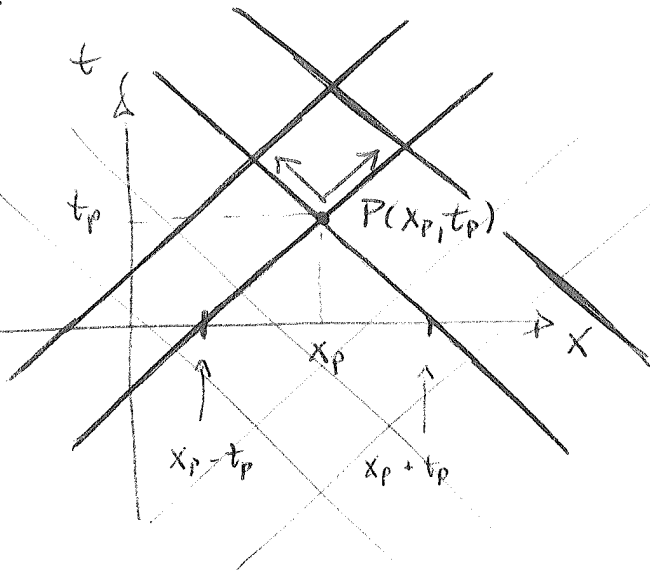
3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ WAVE EQUATION

Soluz: $u = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$ (NON STORZATA)

CURVE CARATTERISTICHE: $\frac{dt}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-1)(1)}}{2(-1)} = \pm 1$



[PDE IPERBOLICA]



L'informazione si propaga in maniera non stozata in due direzioni

- C.I. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = 0$
- $u(x, t=0) = u_0(x)$
- B.C. $\frac{\partial u}{\partial x}(x=1, t) = h(t)$
- $u(x=0, t) = g(t)$

CLASSIFICAZIONE MEDIANTE CARATTERISTICHE
DI UNA PDE DEL 1° ORDINE

Consideriamo la seguente forma generale dell'eq.

$A\phi_{\xi} + B\phi_{\eta} + C = 0$ con $\phi(\xi, \eta)$

[u(x, t) ad es.]

con $\phi_{\xi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$, $\phi_{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$

Si ha:
$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta = \phi_{\xi} d\xi + \phi_{\eta} d\eta$$

$$d\phi_{\xi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} d\xi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} d\eta$$
 DIFF. TOT. PER ϕ_{ξ}

$$d\phi_{\eta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} d\eta$$
 DIFF. TOT. PER ϕ_{η}

quindi:

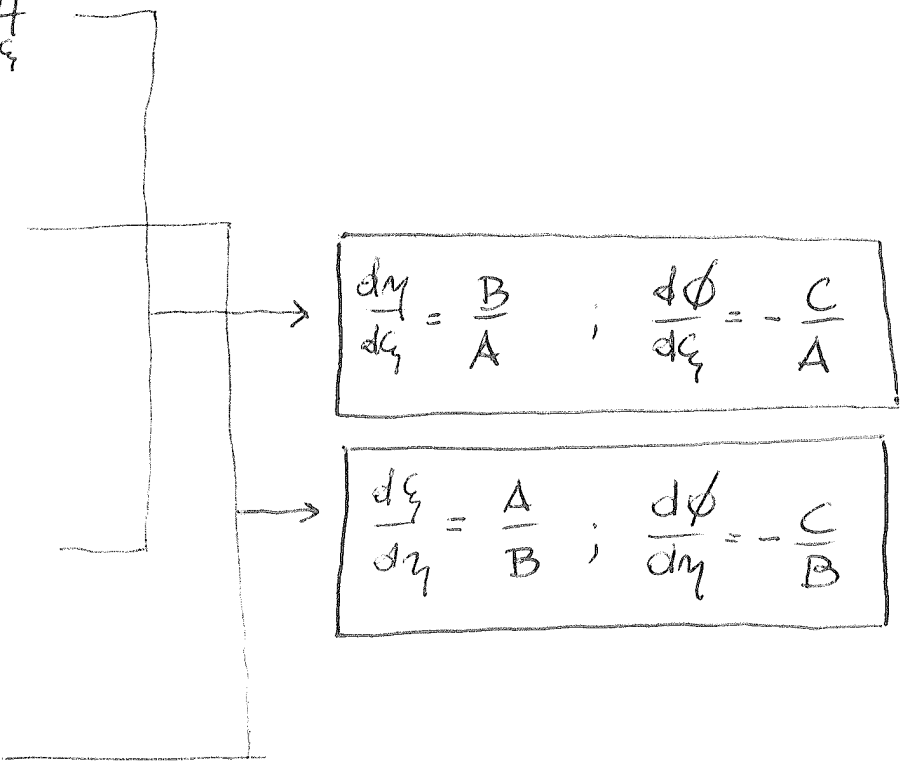
$$\bullet \frac{d\phi}{d\xi} = \phi_{\xi} + \phi_{\eta} \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\square \frac{d\phi}{d\eta} = \phi_{\xi} \frac{d\xi}{d\eta} + \phi_{\eta}$$

Dalla PDE ricavo:

$$\bullet \phi_{\xi} + \phi_{\eta} \frac{B}{A} = -\frac{C}{A}$$

$$\square \phi_{\xi} \frac{A}{B} + \phi_{\eta} = -\frac{C}{B}$$



In sostanza:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{A}{B} ; \frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{C}{A} ; \frac{d\phi}{d\eta} = -\frac{C}{B}$$

Chiaramente:
$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{C}{B} \cdot \frac{B}{A} = -\frac{C}{A}$$

Sono partito da una PDE ed ho ottenuto un sistema di due ODE :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{B}{A} \\ \frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{C}{A} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{A}{B} \\ \frac{d\phi}{d\eta} = -\frac{C}{B} \end{cases}$$

Per trovare la soluzione ϕ posso utilizzare l'eq.

$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{C}{A}$ se integro lungo la curva caratteristica

$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{B}{A}$ oppure l'eq. $\frac{d\phi}{d\eta} = -\frac{C}{B}$ se integro lungo la

curva caratteristica $\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{A}{B}$.

ESEMPIO :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \left[\phi(\xi, \eta) = u(t, x) ; A = B = 1 ; C = 0 \right]$$

Parte di dominio in cui la soluzione deve ancora essere calcolata

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{d\phi}{d\xi} \right] - \frac{C}{A} = 0$$

Parte di dominio in cui la soluz. e' stata calcolata

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right] = \frac{B}{A} = 1 \quad \equiv \quad \left[\frac{d\xi}{d\eta} \right] = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{d\phi}{d\eta} \right] - \frac{C}{B} = 0$$

