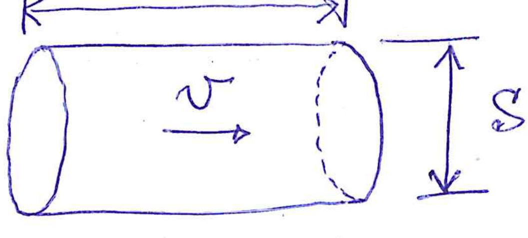
CONVEZIONE

La CONVEZIONE è un processo fisico di trasporto di grandezze fisiche quali massa, q.tà di moto ed energia associato ad un moto macroscopico e coerente del mezzo all'interno del quale le suddette grandezze sono definite.

ESEMPIO: trasporto convettivo di energia (calore) tramite moto di fluido caldo verso regioni a temperatura inferiore: attraverso il loro moto coerente, le molecole di fluido trasportano energia termica (che è a sua volta legata alla temperatura del fluido).

Detta v la velocità d'assieme con cui si muovono le molecole del mezzo in moto convettivo, e considerato un volume di controllo come quello di seguito schematizzato:



$L = v \cdot \Delta t$; $V = L \cdot S$

si ha che, nell'intervallo temporale Δt, possono essere definiti i seguenti flussi convettivi:

FLUSSO CONVETTIVO DI MASSA

$$\boxed{J_{m,c} \overset{D}{=} \frac{m_c}{S \cdot \Delta t} = \rho v \quad \left[\frac{kg}{m^2 s}\right]}$$

con $m_c \overset{D}{=} \rho V$ massa contenuta all'interno del volume di controllo,

FLUSSO CONVETTIVO DI QTÀ DI MOTO

$$\boxed{J_{Q,c} \overset{D}{=} \frac{Q_c}{S \cdot \Delta t} = \rho v^2 \quad \left[\frac{kg}{m s^2}\right]}$$

con $Q_c \overset{D}{=} \rho V \cdot v$ qtà di moto associata alla massa m_c,

FLUSSO CONVETTIVO DI EN. INTERNA

$$\boxed{J_{E,c} \overset{D}{=} \frac{E_c}{S \cdot \Delta t} = \rho C_p \Delta T \cdot v \quad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]}$$

con $E_c \overset{D}{=} \rho C_p \Delta T \cdot V$ energia interna associata alla massa m_c, e $\Delta T = T - T_0$ rappresenta la variazione di temperatura nel mezzo (espressa rispetto ad una temperatura di riferimento arbitraria.

Il rapporto tra flusso di massa convettivo e flusso di massa diffusivo è il più citato NUMERO DI PECLET $Pe = J_{m,c}/J_{m,d}$, mentre il rapporto tra flusso di q.tà di moto convettivo e flusso di q.tà di moto diffusivo è definito:

NUMERO DI REYNOLDS
$$\boxed{Re = \frac{J_{Q,c}}{J_{Q,d}} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{L}}} = \frac{\rho v L}{\mu} = \boxed{\frac{v L}{\nu}}$$

con $J_{Q,d} \stackrel{D}{=} \mu \cdot \underbrace{\nabla v}_{\text{gradiente di velocità}} \simeq \mu \cdot \frac{v}{L}$ flusso diffusivo di q.tà di moto (ed L lunghezza caratteristica del volume di controllo all'interno del quale avviene il trasporto convettivo).

NOTA: Tipicamente $S \propto L^2$ e si ha:

→

$$J_{Q,c} \cdot S \cong \rho v^2 \mathcal{L}^2 \equiv F_{inerzia}$$

$$J_{Q,d} \cdot S \cong \mu \frac{v}{\mathcal{L}} \mathcal{L}^2 \equiv F_{viscosa}$$

La forza di inerzia associata al trasporto convettivo può essere interpretata come la forza che un fluido è in grado di esercitare su un corpo rigido completamente immerso nel fluido stesso, attraverso una cessione di qtà di moto Q_c nell'unità di tempo Δt.

La forza viscosa, invece, è associata ad un trasporto di tipo diffusivo ed è interpretabile come la forza che un fluido è in grado di esercitare sul corpo immerso attraverso una cessione di

Considerando una sfera solida di raggio R completamente immersa in un fluido viscoso (avente densità ρ e viscosità μ) si ha:

$\longrightarrow$

$$\mathcal{L} = R \begin{cases} \nearrow F_{inerzia} \cong \rho v^2 R^2 \Rightarrow F_{inerzia} = 0{,}22\pi R^2 \rho v^2 \text{ se flusso turbolento} \\ \searrow F_{viscosa} \cong \mu v R \Rightarrow F_{viscosa} = 6\pi \mu v R \text{ se flusso laminare} \end{cases}$$

con v velocità del fluido rispetto alla sfera.

Si conclude pertanto che:

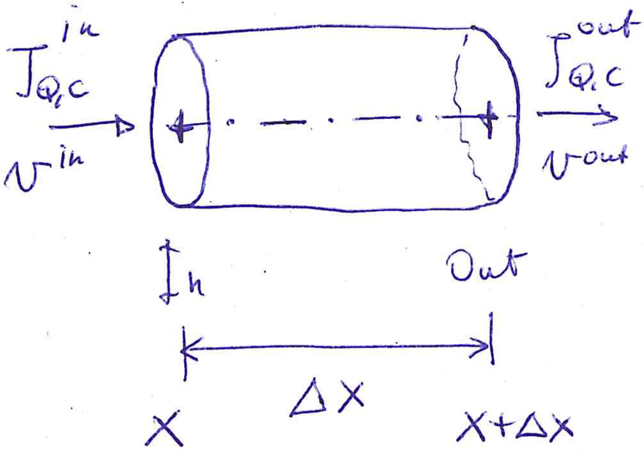
$$Re = \frac{J_{Q,c}}{J_{Q,d}} = \frac{F_{inerzia}}{F_{viscosa}}$$

$\nearrow$ $\boxed{Re \gg 1}$: $J_{Q,c} \gg J_{Q,d}$, $F_{in} \gg F_{visc.}$

$\searrow$ $\boxed{Re \ll 1}$: $J_{Q,c} \ll J_{Q,d}$, $F_{in} \ll F_{visc.}$

Il caso $Re \gg 1$ corrisponde a situazioni in cui il flusso convettivo è predominante, come ad esempio il flusso di un fluido in REGIME TURBOLENTO, mentre il caso $Re \ll 1$ corrisponde a situazioni in cui predomina il flusso diffusivo, come ad esempio il flusso di un fluido in REGIME LAMINARE (o, ancor meglio, in REGIME DI PURO SCORRIMENTO, per il quale $Re \to 0$).

Conservazione della massa:



$$\frac{\partial m_c}{\partial t} = \left(J^{in}_{Q,c} - J^{out}_{Q,c}\right)\cdot S$$

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\cdot V)}{\partial t}}_{\frac{kg}{s}} = \left[(\rho v)^{in} - (\rho v)^{out}\right]\cdot S$$

Poiché $V = S\cdot\Delta x$:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho v)|_x - (\rho v)|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$$

Se, al posto della densità ρ del fluido, considereremo la concentrazione in massa di una specie chimica generica contenuta nel volume V, allora avremo analogamente:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial(c\cdot v)}{\partial x}$$

o, più in generale:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(c\cdot\vec{v})}$$

EQ. DI CONVEZIONE NON STAZIONARIA TRIDIMENSIONALE

Ricordando l'eq. di diffusione (cfr. pag. 31)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = +D \cdot \vec{\nabla}^2 C$$

si conclude che, nei casi in cui entrambi i processi sono presenti si ha:

$$[11] \quad \boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla}(C \cdot v) = D \cdot \nabla^2 C}$$

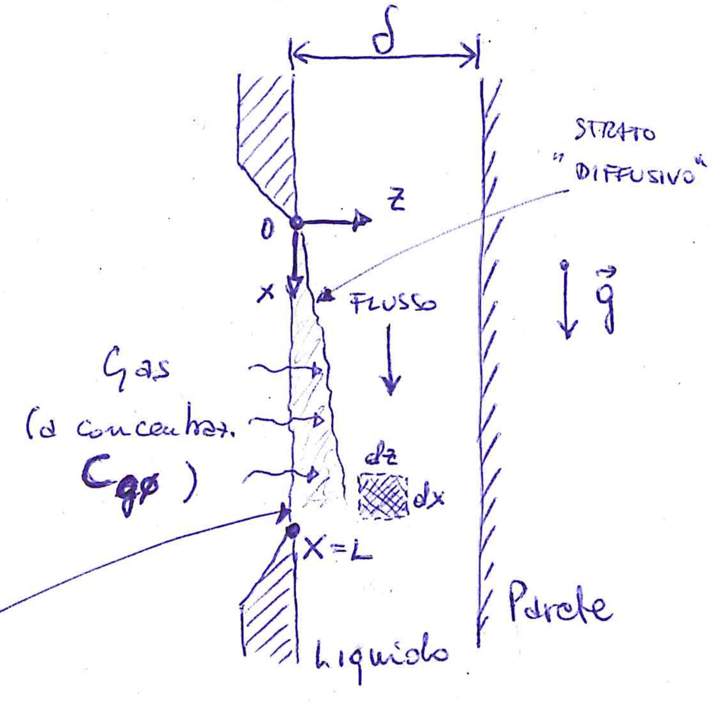
EQ. DI CONVEZIONE - DIFFUSIONE PER LA MASSA

e anche:

$$\boxed{\bar{J}^{TOT} = J_{Q,c} + J_{Q,d} = C \cdot \vec{v} - D \cdot \vec{\nabla} C}$$

Come già accennato a pag. 23 di queste note.

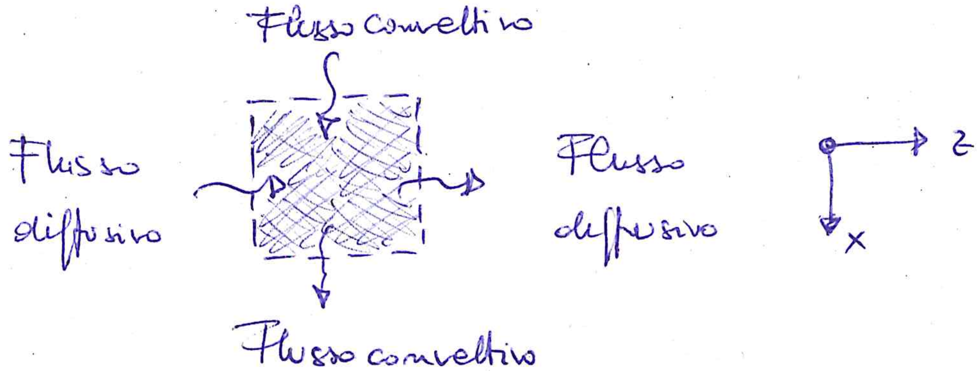
Vediamo ora un esempio di applicazione della eq. [11]: Film liquido con passaggio di gas per diffusione (attraverso la interfaccia gas-liquido, detta pelo libero).



In questo problema abbiamo:

1. Passaggio di gas all'interno del film a causa di un gradiente di concentrazione (inizialmente localizzato a cavallo dell'interfaccia) che induce un trasporto diffusivo

2. Flusso verso il basso del film liquido, indotto dall'azione della forza di gravità, che produce un trasporto convettivo del gas



N.B. Flusso convettivo (diffusivo) trascurabile in direzione z (x)!

Bilancio di massa sul gas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(C_g \cdot dx\,dz \cdot W\right) = \underbrace{S_1\left(J_{g,d}^{in} - J_{g,d}^{out}\right)}_{\text{Flusso diffusivo netto}} + \underbrace{S_2\left(J_{g,c}^{in} - J_{g,c}^{out}\right)}_{\text{Flusso convettivo netto}}$$

W = larghezza del film in direzione y

Con: $S_1 \cdot \left(J_{g,d}^{in} - J_{g,d}^{out} \right) = W \cdot dx \cdot \left(J_{g,d}\Big|_z - J_{g,d}\Big|_{z+dz} \right)$

$$S_2 \cdot \left(J_{g,c}^{in} - J_{g,c}^{out} \right) = W \cdot dz \cdot \left(J_{g,c}\Big|_x - J_{g,c}\Big|_{x+dx} \right)$$

Semplificando W e dividendo tutto per $dx\,dz$, si trova:

$$\frac{\partial C_g}{\partial t} = - \frac{\partial J_{g,d}}{\partial z} - \frac{\partial J_{g,c}}{\partial x} \qquad \text{con } J_{g,c} = C_g \cdot v_x$$

velocità del trasporto convettivo

Sfruttando la legge di Fick:

$$J_{g,d} = - D \frac{\partial C_g}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial C_g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_g}{\partial z^2} - \frac{\partial (C_g \cdot v_x)}{\partial x}}$$

Dobbiamo ora ricavare v_x. Per farlo, introduciamo la PRESSIONE EQUIVALENTE:

$$\mathcal{P} \triangleq p + \underbrace{\rho g h}_{\text{En. potenziale per unità di volume}}$$

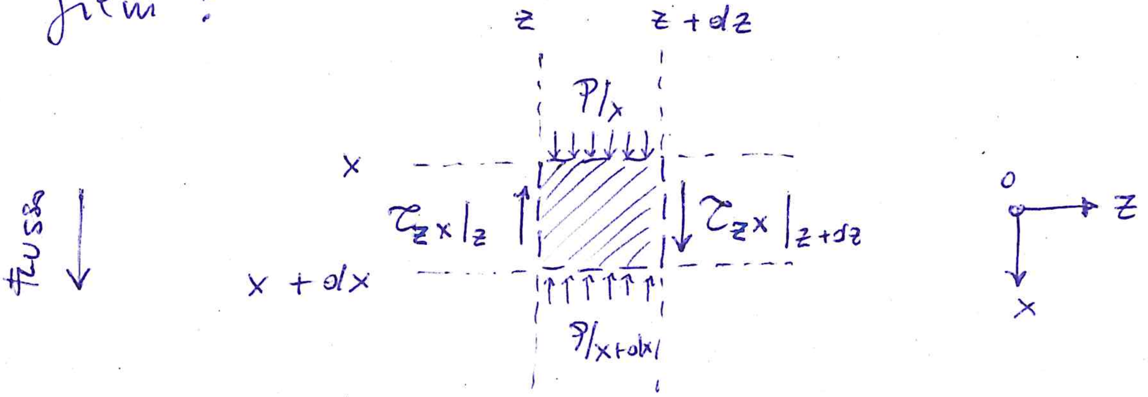
h = quota verticale

p: pressione

Nel problema considerato, esiste un gradiente di pressione equivalente associato alla variazione di quota verticale del fluido:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}}_{=0} + \rho g \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}}_{-1} = -\rho g$$

Tale gradiente può essere posto in relazione con gli sforzi di taglio generati all'interno del film:



Bilancio di forze: $P|_x \cdot dz\, W - P|_{x+dx} \cdot dz\, W =$

$$= \tau_{zx}|_z \cdot dx\, W - \tau_{zx}|_{z+dz} \cdot dx\, W$$

ovvero:

$$\frac{P|_{x+dx} - P|_x}{dx} = \frac{\tau_{zx}|_{z+dz} - \tau_{zx}|_z}{dz}$$

Nel limite $dx \to 0$; $dz \to 0$ si ha:

$$\boxed{dP/dx = d\tau_{zx}/dz} \quad [12]$$

Ricordando anche che $P = P(x)$ e $\tau_{yx} = \tau_{yx}(z)$ con τ_{yx} definito dalla equazione di Newton precedentemente introdotta.

L'equazione [12] è verificata sse:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau_{zx}}{dz} = \text{cost} = \alpha$$

Ora: $\frac{dP}{dx} = \alpha \rightarrow P = \alpha \cdot x + \beta$

C.C. $P(x = x_0 = 0) = P_0 \longrightarrow \beta = P_0$

C.C. $P(x = L) = P_L \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{P_L - P_0}{L}}$

Si ottiene:

$$P(x) = P_0 + \frac{P_L - P_0}{L} \cdot x$$

$$= P_0 + \frac{\Delta P}{L} \cdot x$$

avendo posto $\Delta P \triangleq P_L - P_0 = \rho g h|_{x=L} - \rho g h|_{x=0} < 0$ (nota: $h|_{x=L} < h|_{x=0}$).

Avendo trovato quanto vale la costante possiamo ricavare una espressione per lo sforzo di taglio τ_{yx}:

$$\frac{d\tau_{zx}}{dz} = \frac{\Delta P}{L} = -\rho g$$

Dalla legge di Newton : $\tau_{zx} \triangleq \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \mu \frac{d v_x}{dz}$

$v_x = v_x(z)$

ovvero :

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\rho g \cdot \frac{1}{\mu}$$

$\int$ in z

$$\frac{d v_x}{dz} = -\frac{\rho g}{\mu} z + C_1 \equiv \frac{\tau_{zx}}{\mu}$$

$\int$ in z

$$v_x = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2$$

C.C. $v_x(z = \delta) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{\delta^2}{2} + C_1 \delta + C_2$

C.C. $\tau_{zx}(z=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Si ottiene :

$$\boxed{v_x(z) = \frac{\rho g}{\mu}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^2\right]}$$

PROFILO DI VELOCITA' NEL FILM

Poiché v_x non dipende da x, l'equazione di convezione - diffusione per C_g diventa:

$$\boxed{\frac{\partial C_g}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C_g}{\partial z^2} - v_x(z)\,\frac{\partial C_g}{\partial x}} \qquad [13]$$

Senza ulteriori semplificazioni, questa equazione non ammette soluzione analitica ed è quindi richiesta una integrazione di tipo numerico.

Una soluzione analitica è ottenibile facendo alcune ipotesi semplificative:

I°) STAZIONARIETÀ $\quad \frac{\partial C_g}{\partial t} = 0$

II°) $\delta \gg \tilde{z}$ $\qquad$ con: δ = spessore del film

$\tilde{z}$ = spessore di penetrazione diffusivo

La II^a ipotesi implica che lo strato di film, in prossimità dell'interfaccia col gas, entro il quale avviene la diffusione del gas, ha spessore trascurabile rispetto allo spessore complessivo del film. In pratica, è come dire che la q.tà di gas che entra nel film per diffusione viene trasportata a valle del tratto L considerato prima di poter penetrare in maniera significativa all'interno del film. In altre parole, è come dire che l'eq. [13] si applica solo per distanze $< \tilde{z}$ dall'interfaccia (più internamente al film, viene a mancare la componente diffusiva del trasporto).

Per tali distanze, risulta trascurabile la variazione di velocità nel film (che ha curvatura significativa solo in prossimità della parete) e si può assumere $v_x(z < \tilde{z}) \simeq v_{max} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} = \text{cost.}$

Sulla base delle due ipotesi fatte, si ottiene:

$$⊛ \quad 0 = D \frac{\partial^2 C_g}{\partial z^2} - v_{max} \frac{\partial C_g}{\partial x}$$

Questa equazione è risolvibile introducendo la seguente variabile adimensionale:

$$\boxed{\eta \overset{\Delta}{=} - \frac{z}{\sqrt{4D \cdot \frac{x}{v_{max}}}}} \qquad [14]$$

che consente di riscrivere l'eq. ⊛ come segue:

$$\frac{\partial C_g}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial C_g}{\partial \eta}}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z} = C_g' \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{4D\frac{x}{v_{max}}}}\right) =$$

$$= C_g' \cdot \eta \cdot z^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 C_g}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(C_g' \cdot \eta \cdot z^{-1}\right) =$$

$$= \frac{\partial C_g'}{\partial z}\cdot(\eta z^{-1}) + (C_g' z^{-1})\frac{\partial \eta}{\partial z} + (C_g' \cdot \eta)\frac{\partial z^{-1}}{\partial z}$$

$$= C_g'' \cdot (\eta \cdot z^{-1})^2 + \cancel{C_g' z^{-1} \cdot \eta z^{-1}} + \cancel{C_g' \eta (-z^{-2})}$$

$$\frac{\partial C_g}{\partial x} = \frac{\partial C_g}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \underbrace{C_g' \cdot \left(-\frac{z}{\sqrt{4D/v_{max}}}\right)\underbrace{\frac{\partial x^{-1/2}}{\partial x}}_{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}}_{-\frac{1}{2}\left(-\frac{z}{\sqrt{4D\frac{x}{v_{max}}}}\right)x^{-1} = -\frac{1}{2}\eta x^{-1}}$$

Si ottiene:

$$0 = D \cdot C_g'' \cdot (\eta \cdot z^{-1})^2 - v_{max}\left(-\frac{1}{2}\eta x^{-1}\right)C_g'$$

$$0 = C_g'' + \frac{1}{2}\eta\, v_{max} \cdot \frac{1}{X}\, C_g' \cdot \frac{z^2}{\eta^2 D}$$

$$\overset{!}{=} C_g'' + \frac{1}{2}\, C_g' \cdot \underbrace{\frac{z^2}{D \cdot \frac{X}{v_{max}}}}_{4\eta^2} \cdot \frac{1}{\eta}$$

$$0 = C_g'' + 2\eta\, C_g'$$

$$\boxed{0 = \frac{d^2 C_g}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d C_g}{d\eta}}$$

Questa equazione è esattamente quella che avevamo già scritto per il problema di diffusione (pura!) non-stazionaria in un mezzo semi-infinito - vedasi pag. 35 di queste note.

In effetti, la variabile η era stata definita come:

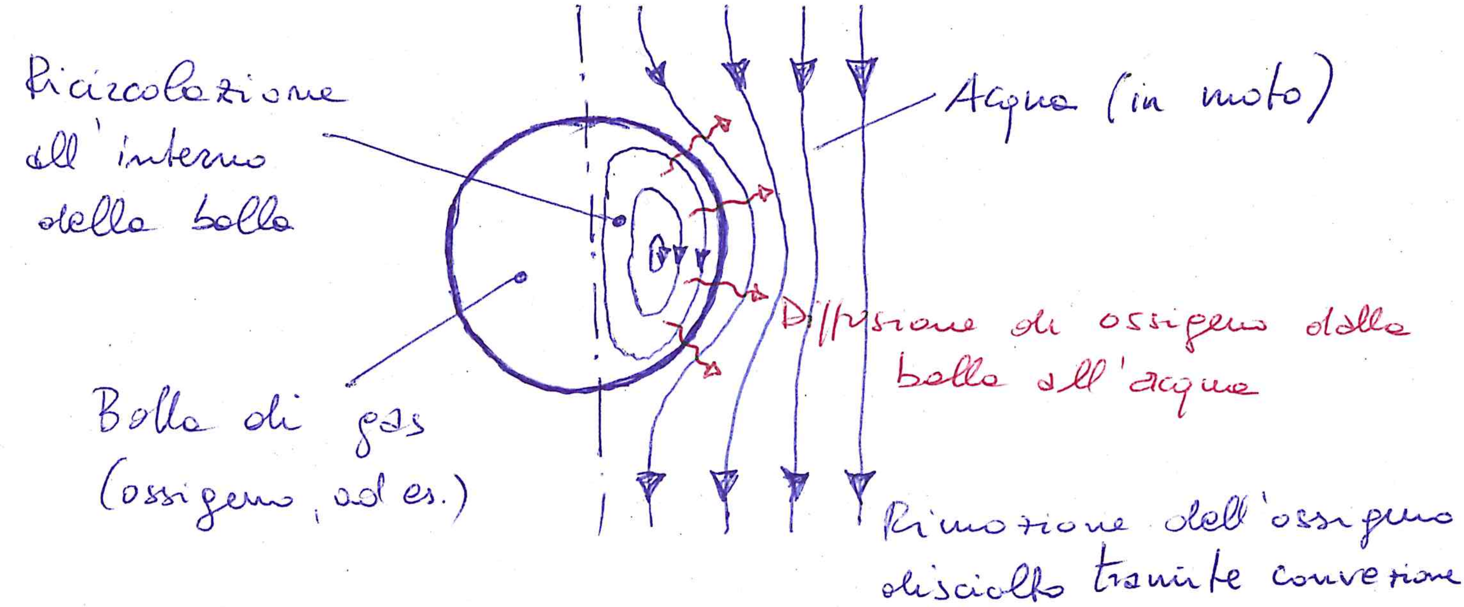
$$\eta \triangleq \frac{z}{2\sqrt{D \cdot t}}$$

Qui va messa la direzione rispetto alla quale c'è diffusione (chiamata z qui e x a pag. 35)

che restituisce la presente definizione se si assume $t = X/v_{max}$ (<u>TEMPO CONVETTIVO</u>).

In effetti, $t = \dfrac{X}{v_{max}}$ ha proprio il significato fisico di un tempo scala convettivo, come già discusso a pag. 17 di queste note.

Il tipo di problema fisico appena analizzato trova applicazione nel seguente caso di interesse: trasporto di massa di un gas (per diffusione) da una bolla all'interno di un liquido.



Chiaramente, se la bolla contiene altri gas (quali ad esempio, azoto o anidride carbonica o anidride solforosa) anche questi saranno soggetti al medesimo processo.