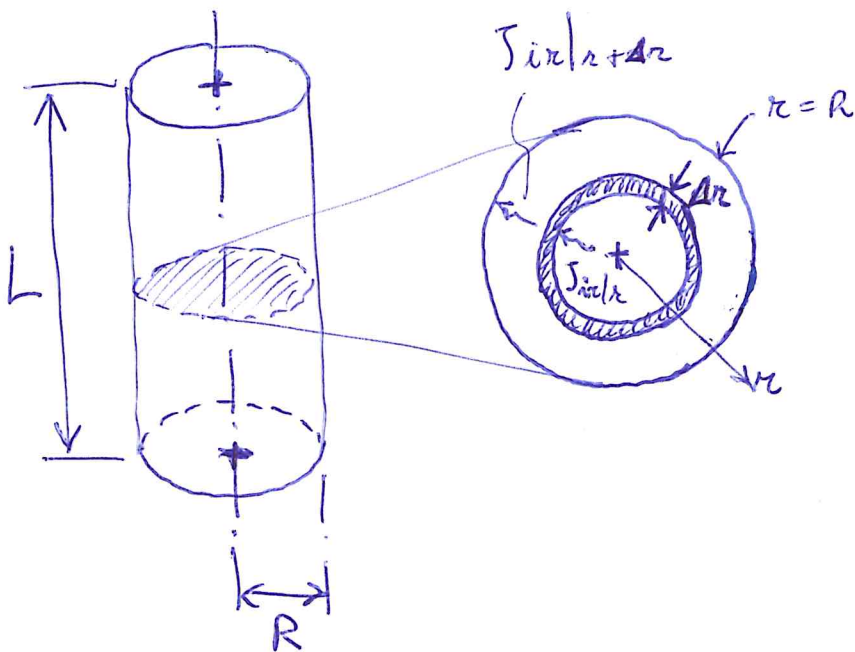


NON CARTESIANE

Siamo interessati a derivare l'equazione di diffusione nel caso in cui non sia possibile utilizzare un sistema di riferimento cartesiano.

Ad esempio, nel caso di diffusione attraverso interfacce curve o in domini a geometria cilindrica.

Consideriamo un caso semplice: flusso diffusivo



di materia in direzione radiale (asse r), attraverso un anello di spessore Δr .

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \frac{\partial C_i}{\partial t} \cdot 2\pi r L \Delta r = \left[J_{ir} \Big|_r \cdot r - J_{ir} \Big|_{r+\Delta r} \cdot (r+\Delta r) \right] \cdot 2\pi L + R_i \cdot (2\pi r \Delta r \cdot L)$$

N.B. Volume dell'anello :

$$\begin{aligned} & \tilde{\pi} (r + \Delta r)^2 \cdot L - \tilde{\pi} \cdot r^2 L = \\ & = \left(\cancel{\tilde{\pi} r^2} + 2\tilde{\pi} r \Delta r + \underbrace{\tilde{\pi} \Delta r^2}_{\approx 0} - \cancel{\tilde{\pi} r^2} \right) L = \\ & \approx \boxed{2\tilde{\pi} r \Delta r \cdot L} \end{aligned}$$

con $[R_i] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^3} \right]$ tasso di reazione (rap. presente in termine sorgente/pozzo nella equazione di bilancio).

Dividendo tutto per il volume dell'anello e considerando il limite $\Delta r \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_{ir})}{\partial r} + R_i$$

Considerando la legge di Fick 1D in coordinate cilindriche:

$$J_{ir} = - D_{ij} \frac{\partial C_i}{\partial r}$$

Troncano:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ij} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + R_i \quad [10]$$

nell'ipotesi di coeff. di diffusione costante e uniforme.

APPLICAZIONE: Diffusione stazionaria in una arteria in assenza di reazioni chimiche ($R_i = 0$)

A stazionario, l'eq. [10] diventa:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_i}{dr} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r \frac{dC_i}{dr} = A$$

$$\rightarrow C_i = A \ln r + B$$

nell'ipotesi che il flusso diffusivo avviene solo nella direzione radiale.

Per calcolare le costanti di integrazione A e B, consideriamo un caso reale di vaso sanguigno arterioso occluso. Per rinvu-
vere l'occlusione e ripristinare la

funzionalità del vaso, una procedura 41
molto diffusa è quella dell'angioplastica
associata ad uno stenting del vaso occluso.
Tale procedura viene effettuata via catetere
senza necessità di interventi chirurgici.

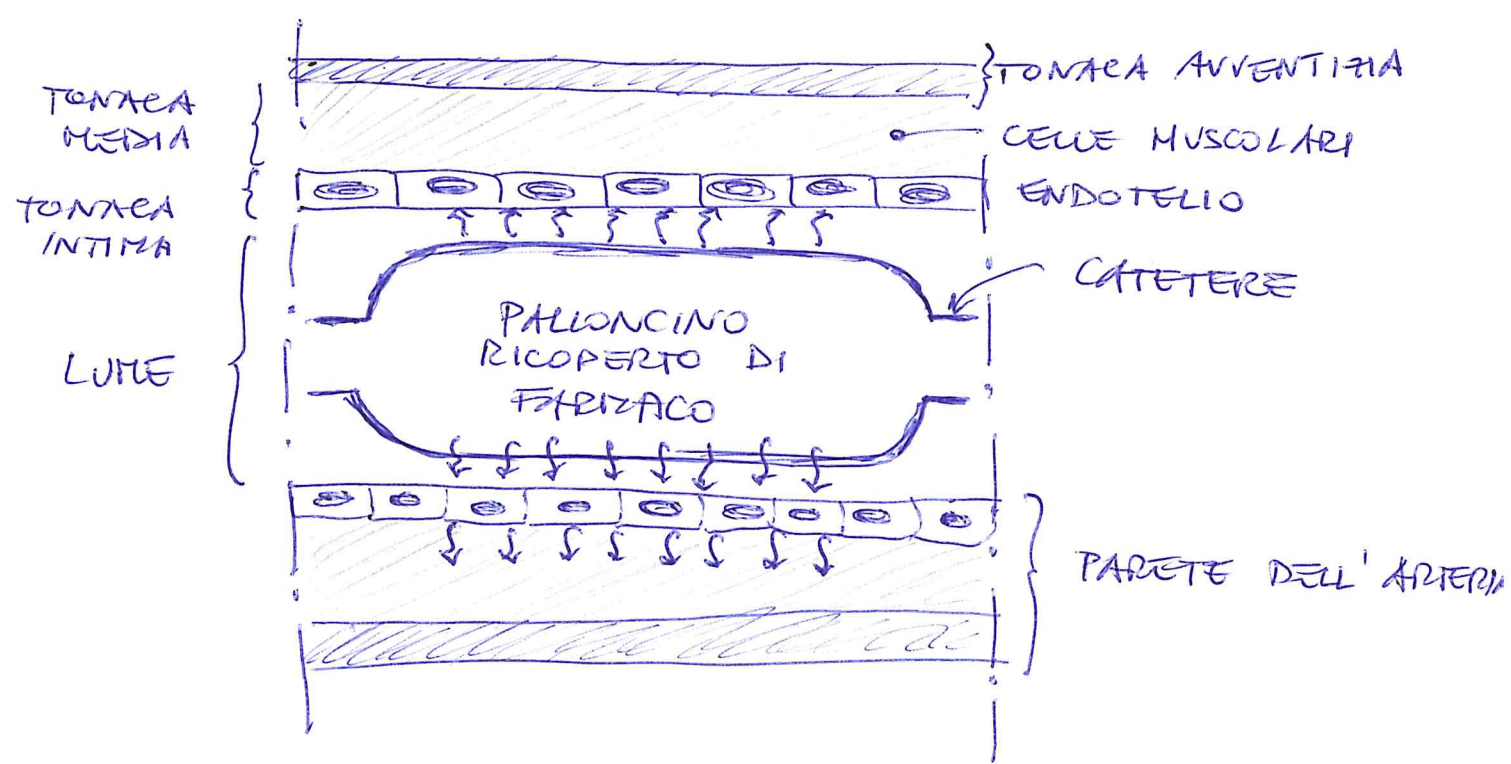
Come funziona? Si inserisce il catetere
all'interno del vaso sanguigno interessato
dall'occlusione (o da un restringimento).

Il catetere è dotato di palloncino gonfiabile,
che viene sospinto fino al punto di occlusione
o restringimento e gonfiato per dilatare il
lume del vaso e conseguentemente una adeguata
perivascolarizzazione. In alternativa, è possibile
utilizzare uno stent, che in alcuni casi può
provocare la formazione di un nuovo restren-
gimento/occlusione detto RESTENOSI.

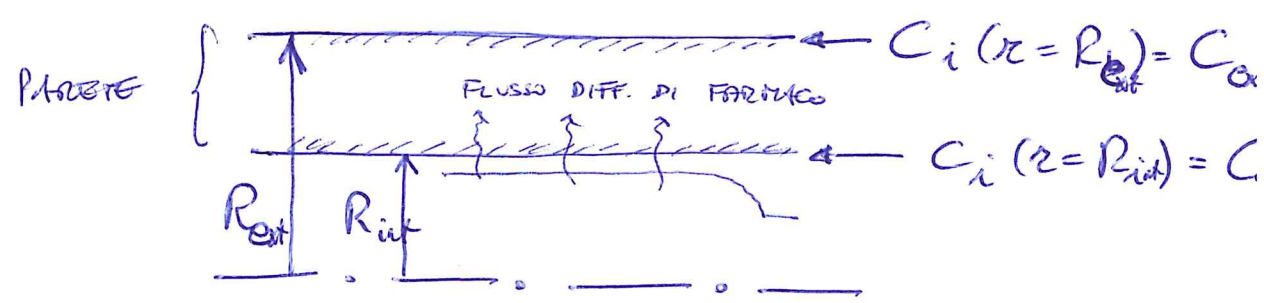
Per trattare questo tipo di problemi, o meglio
per prevenirli, si utilizzano opportuni farmaci

che vanno a ricoprire le superficie del palloncino o dello stent e che vengono rilasciati proprio in corrispondenza del punto di occlusione al fine di evitare una nuova restenosi (ad esempio a cause di eccessiva cicatrizzazione dei tessuti danneggiati in seguito alla prima occlusione / restringimento).

Il rilascio avviene tipicamente per diffusione.



Possiamo schematizzare il problema come segue:



$$C_i(r = R_{ext}) = C_{ext} \Rightarrow A \ln R_{ext} + B = C_{ext}$$

$$C_i(r = R_{int}) = C_0 \Rightarrow A \ln R_{int} + B = C_0$$

ovvero:

$$A = \frac{C_{ext} - C_0}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}$$

$$B = C_{ext} - \frac{\ln R_{ext} \cdot (C_{ext} - C_0)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}$$

Sostituendo e riarrangiando, si trova:

$$C_i(r) = C_{ext} - \frac{(C_{ext} - C_0) \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}$$

ANDAMENTO DELLA CONCENTRAZIONE DI
FARMACO ATTRAVERSO LA PARETE ARTERIOSA

mentre il flusso è ricorribile dalla legge
di Fick:

$$J_i(r) = - D_{ij} \frac{dC_i}{dr}$$

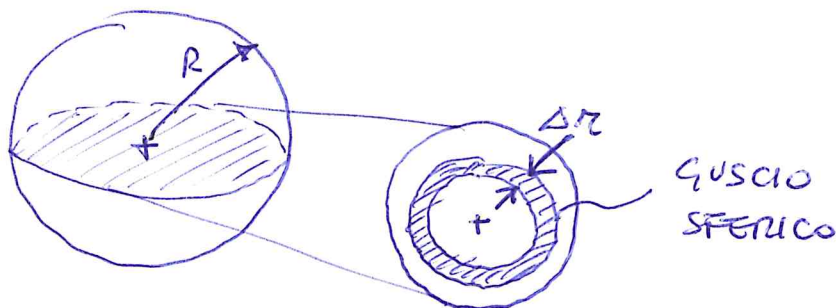
→

$(J \propto \frac{1}{r})$

$$J_i(r) = - \frac{1}{r} \cdot D_{ij} \cdot \frac{C_{ext} - C_0}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}$$

FLUSSO DI FARMACO ATTRAVERSO
LA PARETE DELL'ARTERIA

Se invece di una geometria cilindrica considero una geometria sferica (e relative coordinate) avremo:



$$\begin{aligned} \text{Volume guscio sferico} &: \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \\ &\approx 4 \pi r^2 \Delta r + \text{t.o.s.} \end{aligned}$$

Bilancio di massa:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} \cdot 4 \pi r^2 \Delta r = \left[J_{ir} \Big|_r \cdot r^2 - J_{ir} \Big|_{r+\Delta r} \cdot (r + \Delta r)^2 \right] + R_i \cdot 4 \pi r^2 \Delta r$$

che, semplificando per il volume del L45
guscio e applicando il limite $\Delta r \rightarrow 0$,
fornisce:

$$\boxed{\frac{\partial C_i}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot J_{ir}) + R_i}$$

LEGGE DI
FICK (1D) \rightarrow

$$\boxed{= \frac{1}{r^2} D_{ij} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + R_i}$$