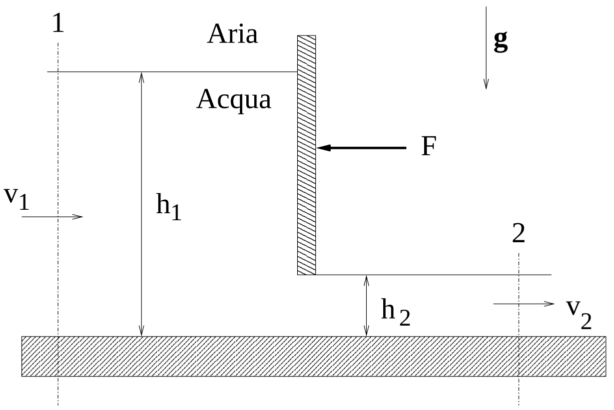
1

Per regolare l'efflusso d'acqua in un canale (di ampiezza W), viene utilizzata la diga rappresentata in figura. Calcolare la forza per unità di larghezza F/W necessaria per tenere in posizione la diga sapendo che $h_1 = 10\ m$ e che $h_2 = 2\ m$.



SOLUZIONE

Applicando l'eq. di conservazione della quantità di moto in direzione orizzonatle tra le sezioni 1 e 2 si ottiene:

$$0 = w(v_1 - v_2) + \int_A p\mathrm{d}A\Big|_1 - \int_A p\mathrm{d}A\Big|_2 - F\ , \tag{1}$$

ovvero:

$$0 = \rho h_1 v_1^2 - \rho h_2 v_2^2 + \int_0^{h_1} \rho g h \mathrm{d}h - \int_0^{h_2} \rho g h \mathrm{d}h - \frac{F}{W}\ , \tag{2}$$

da cui:

$$\frac{F}{W} = \rho h_1 v_1^2 - \rho h_2 v_2^2 + \rho g \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right)\ . \tag{3}$$

Applicando l'eq. di conservazione della massa tra le medesime sezioni si trova:

$$\rho v_1 (h_1 \cdot W) = \rho v_2 (h_2 \cdot W)\ \rightarrow\ v_1 = v_2 \frac{h_2}{h_1}\ . \tag{4}$$

Sfruttando questa relazione tra v_1 e v_2 ed applicando l'eq. di Bernoulli si può ricavare:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2\ \rightarrow\ v_2 = \frac{2 g h_1^2}{h_1 + h_2}\ \rightarrow v_1 = \frac{2 g h_1 h_2}{h_1 + h_2}. \tag{5}$$

Sostituendo le espressioni per le velocità nella 3 si arriva alla seguente espressione:

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \rho g \left[\frac{(h_1 - h_2)^3}{h_1 + h_2} \right]\ . \tag{6}$$

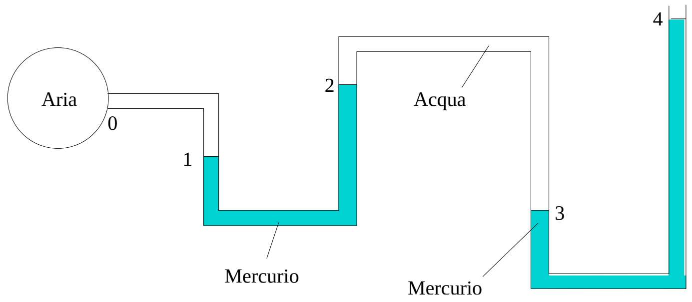
Sostituendo i valori numerici risulta $F/W = 2.1 \cdot 10^5 N/m$.

2

Il manometro in figura è costituito da un ampolla sferica (volume $V = 10^{-2}\ m^3$) riempita d'aria e da una tubazione a sezione circolare di diametro costante. Nei tratti $1-2$ e $3-4$, la tubazione è riempita con mercurio (densità $\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$) mentre nel tratto $2-3$ la tubazione è riempita con acqua.

1. Calcolare la pressione dell'aria sapendo che $p_4 = p_{atm}$ e che le differenze di quota tra le varie sezioni sono: $\Delta h_{21} = 0.2\ m$, $\Delta h_{23} = 0.1\ m$, $\Delta h_{43} = 0.26\ m$.

2. Il mercurio nel tratto di tubazione $1-2$ (lungo $L_{12} = 0.5\ m$) viene prelevato tramite una piccola tubazione di scolo. In tal modo è possibile far espandere isotermicamente l'aria nel tratto $1-2$ mantenendo fisse le sezioni 2, 3 e 4. Determinare la nuova pressione dell'aria ed il diametro della tubazione sapendo che il tratto $0-1$ è lungo $L_{01} = 0.3\ m$.



SOLUZIONE

1. Applicando la legge di Stevino per la statica e notando che $p_4 = p_{atm}$, si ricava:

$$p_3 = p_4 + \rho_{Hg} g \Delta h_{34} = p_{atm} + \rho_{Hg} g \Delta h_{34} = 1.36 \cdot 10^5\ Pa\ , \tag{7}$$
$$p_2 = p_3 - \rho_{H2O} g \Delta h_{23} = p_{atm} + \rho_{Hg} g \Delta h_{34} - \rho_{H2O} g \Delta h_{23} = 1.35 \cdot 10^5\ Pa\ , \tag{8}$$
$$p_1 = p_2 + \rho_{Hg} g \Delta h_{12} = p_{atm} + \rho_{Hg} g \Delta h_{34} - \rho_{H2O} g \Delta h_{23} + \rho_{Hg} g \Delta h_{12} = 1.617 \cdot 10^5\ Pa\ . \tag{9}$$

2. La nuova pressione dell'aria sarà $p'_{aria} = 1.35 \cdot 10^5\ Pa$. Per un'espansione isoterma vale la legge pV =cost. per cui $p_{aria} V_{in} = p'_{aria} V_{fin}$ con:

$$V_{in} = V + L_{01} \frac{\pi D^2}{4}\ , \tag{10}$$
$$V_{fin} = V + L_{02} \frac{\pi D^2}{4}\ , \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Sostituendo si ricava :

$$\frac{\pi D^2}{4} \left(p_{aria} \cdot L_{01} - p'_{aria} \cdot L_{02} \right) = \left(p'_{aria} - p_{aria} \right) \cdot V\ . \tag{13}$$

Il diametro della tubazione risulta essere pari a:

$$D = \sqrt{\frac{4V \left(p_{aria} - p'_{aria} \right)}{\pi \left(p'_{aria} \cdot L_{02} - p_{aria} \cdot L_{01} \right)}} = 0.0756\ m = 7.56\ cm\ . \tag{14}$$

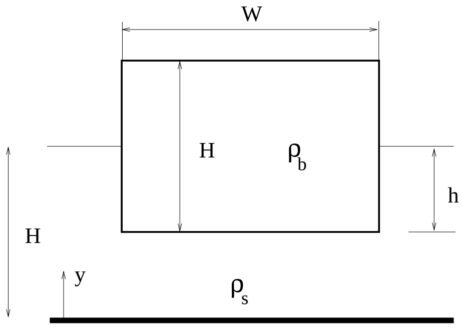
3

Un contenitore viene riempito con una soluzione salina fino ad un'altezza H dal fondo. Un pezzo di legno galleggia sulla superficie della soluzione salina (di densità ρ_s) con la faccia inferiore immersa per un'altezza pari ad h. Il pezzo ha larghezza W, spessore H e lunghezza L.

La densità della superficie salina non è costante bensì aumenta linearmente con la profondità : sulla superficie si ha $\rho_s(y = H) = \rho_{H_2O}$ mentre sul fondo del contenitore si ha $\rho_s(y = 0) = 2 \cdot \rho_{H_2O}$ (vedi figura).

1. Sapendo che il legno ha densità $\rho_b = 0.5 \rho_{H_2O}$, determinare l'altezza h quando il blocco galleggia in condizioni di equilibrio.

2. La soluzione salina viene sostituita e il contenitore viene nuovamente riempito fino ad un'altezza H dal fondo con due liquidi immiscibili A e B in parti uguali (ovvero A e B occupano la stessa frazione di volume nel contenitore). I due liquidi hanno densità costante e pari a $\rho_A = 0.5 \rho_{H_2O}$ e $\rho_B = 2 \rho_{H_2O}$ rispettivamente. Calcolare l'altezza di equilibrio h in questo caso.



SOLUZIONE

1. La densità della soluzione salina ha andamento lineare:

$$\rho_s(y) = \rho_s(y=H) - [\rho_s(y=H) - \rho_s(y=0)]\frac{y}{H} \ . \tag{15}$$

Il bilancio delle forze agenti sul blocchetto di legno in condizioni statiche impone:

$$F_{grav} = F_{gall} \ \rightarrow \ \rho_b g \cdot \underbrace{(WLH)}_{Vol.\ blocchetto} = \int_{H-h}^{H} \rho_s(y) g \cdot \underbrace{(WL\mathrm{d}y)}_{Vol.\ immerso} \ . \tag{16}$$

Integrando e semplificando si trova:

$$h^2 + 2Hh - H^2 = 0 \ \rightarrow h_{1,2} = -H(1 \pm \sqrt{2}) \ . \tag{17}$$

L'unica soluzione accettabile è ovviamente $h = H(\sqrt{2} - 1)$.

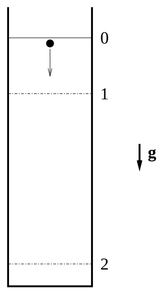
2. Notiamo subito che deve essere necessariamente $h > H/2$ in base ai dati forniti. Deve pertanto valere:

$$F_{grav} = F_{gall} \ \rightarrow \ \rho_b H = \int_{H/2}^{H} \rho_A \mathrm{d}y + \int_{H-h}^{H/2} \rho_B \mathrm{d}y \ , \tag{18}$$

da cui si trova $h = 5/8\ H$.

4

Si vuole determinare la viscosità μ_f di un fluido avente densità $\rho_f = 800\ kg/m^3$ con il metodo del viscosimetro a sfera cadente, utilizzando una sfera di diametro $D_p = 4\ mm$ e densità $\rho_p = 2500\ kg/m^3$. La sfera viene rilasciata all'interno del viscosimetro da un'altezza h_0 con velocità iniziale nulla e percorre, in un tempo di caduta $t = 4\ s$, un tratto verticale $\Delta h_{12} = 0.5\ m$ (vedi figura). Supponendo che la sfera si muova con velocità pari alla velocità terminale tra le sezioni 1 e 2 del viscosimetro, calcolare μ_f.



SOLUZIONE

La velocità terminale della sfera è $v_{term} = \Delta h_{12}/t = 0.125\ m/s$. Per definizione vale:

$$v_{term} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} g \tau_p = g\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} \cdot \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu_f} = 9.81 \cdot 0.68 \cdot (2.22 \cdot 10^{-3}/\mu_f) \ . \tag{19}$$

Si trova $\mu_f = 0.11855\ Pa \cdot s$.

5

Una sfera omogenea, di volume $V = 25\ dm^3$ e densità ρ, è completamente immersa nell'acqua di un grande recipiente, trattenuta da una funicella ancorata al fondo. La funicella è soggetta ad una tensione $T = 196.1\ N$. A causa della rottura della funicella, la sfera emerge raggiungendo una nuova posizione di equilibrio.

1. Calcolare la velocità terminale di risalita della sfera.
2. Determinare la frazione in volume di sfera emergente dall'acqua.

SOLUZIONE

1. Quando la sfera è ancorata al fondo, vale il seguente bilancio di forze:

$$T + F_{grav} = F_{gall} \ \rightarrow\ T + \rho g V = \rho_w V \rightarrow\ \rho = \rho_w - \frac{T}{gV} = \ 200\ kg/m^3\ , \tag{20}$$

ρ_w essendo la densità dell'acqua. Il diametro della sfera è $D = (6V/\pi)^{1/3} = 0.3628\ m$. Ipotizzando che la sfera si muova sempre in regime di Stokes, la velocità terminale ha la seguente espressione:

$$v_{term} = \frac{(\rho_w - \rho_f)gV}{3\pi\mu_w D} \ = \ 5.736 \cdot 10^4 m/s. \tag{21}$$

Il numero di Reynolds della sfera risulta essere:

$$Re_{sfera} = \frac{\rho v D}{\mu} = 2.081 \cdot 10^{10} >> 1\ . \tag{22}$$

Come si poteva intuire dall'altissima velocità terminale della sfera, questa abbandona ben presto il regime di Stokes durante il suo moto ascensionale.

2. Indicato con V' la frazione di volume di sfera che emerge dall'acqua, si ha, nella nuova posizione di equilibrio, il seguente bilancio di forze:

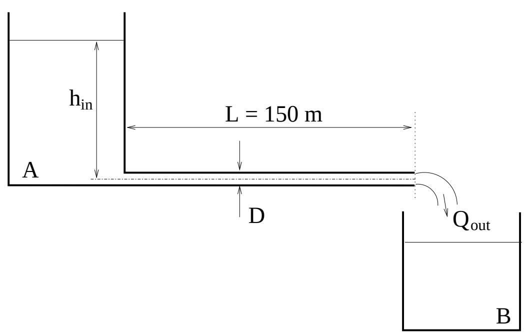
$$F_{grav} = F_{gall} \ \rightarrow\ T + \rho g V = \rho_w \underbrace{(V - V')}_{Vol.\ immerso} \ \rightarrow\ \frac{V - V'}{V} = \frac{\rho}{\rho_w} = 0.2\ . \tag{23}$$

Si trova banalmente $V' = 0.8\ V$.

6

Un olio leggero ($\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 3 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$) viene trasferito dal serbatoio A al serbatoio B tramite una tubazione liscia ($f = 0.079 Re^{-0.25}$) di lunghezza $L = 150\ m$ e diametro D (vedi figura).

1. Il livello iniziale di olio nel serbatoio A è $h_{in} = 2\ m$. Determinare quale deve essere il diametro D della tubazione affinchè sia possibile trasferire un volume $V_{tr} = 1.5\ m^3$ di olio in un'ora (supporre che il livello d'olio nel serbatoio A resti costante).
2. Sapendo che il volume iniziale di olio nel serbatoio A è $V_{in} = 2\ m^3$, calcolare il tempo t^* impiegato dall'olio per scendere dal livello h_{in} al livello $h(t^*) = 0.5\ m$ nel serbatoio A.



SOLUZIONE

1. La porta volumetrica minima da trasferire per garantire il trasporto è $Q_{tr} = V_{tr}/t = 4.17 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$. Applicando Bernoulli tra il pelo libero del serbatoio A (sez. 1) ed il punto di scarico della tubazione (sez. 2), si trova:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + 2f\frac{L}{D}v_2^2\ , \tag{24}$$

v_2 essendo la velocità dell'olio nel tratto di tubazione. Ipotizzando regime turbolento si ha $f = 0.079Re^{-0.25}$ ed è possibile trascurare il termine cinetico $\frac{1}{2}v_2^2$. In tal modo è facile ricavare:

$$v_2^{1.75} = gh_1 \frac{D^{1.25}}{0.158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.25} \cdot L} \ \rightarrow\ v_2 = 5.348 \cdot D^{5/7}\ . \tag{25}$$

Indicata con $Q_{out} = v_2\frac{\pi D^2}{4}$ la porta trasferita attraverso la tubazione, deve valere:

$$Q_{tr} = Q_{out}\ \rightarrow\ D = \left(\frac{4.17 \cdot 10^{-4}}{4.2}\right)^{7/19} = 33.5 \cdot 10^{-3}\ m = 33.5\ mm\ . \tag{26}$$

Noto il diametro della tubazione si ricava $v_2 = 0.473\ m/s$ cui corrisponde un numero di Reynolds pari a $Re = 4223.4 > 2100$. La condizione di regime di flusso turbolento è pertanto confermata ed è facile verificare numericamente come il termine cinetico nell'eq. 24 sia effettivamente trascurabile rispetto al termine potenziale ed a quello delle perdite di carico.

2. Il bilancio di portata volumetrica sul serbatoio A, quando questo si svuota è :

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -Q_{out}(t)\ , \tag{27}$$

con:

$$Q_{out} = v_2\frac{\pi D^2}{4} = h(t)^{\frac{1}{1.75}} \left[\frac{gh(t)D^{1.25}}{0.158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.25} \cdot L}\right]^{\frac{1}{1.75}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 280.41 \cdot 10^{-6} \cdot h(t)^{0.571} = K \cdot h(t)^{0.571}\ . \tag{28}$$

L'equazione differenziale da integrare e risolvere per ottenere il tempo richiesto t^* è dunque:

$$S\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -K \cdot h(t)^{0.571}\ \rightarrow\ \int_{h(0)}^{h(t^*)} \frac{\mathrm{d}h(t)}{h(t)^{0.571}} = -\frac{K}{S}\int_0^{t^*} \mathrm{d}t\ . \tag{29}$$

Essendo $h(0) = h_{in} = 2\ m$ e $V_{in} = S \cdot h_{in} = 2\ m^3$, si ricava $S = 1\ m^2$. Inoltre $h(t^*) = h_{fin} = 0.5\ m$ essendo $V_{fin} = S \cdot h_{fin} = 0.5\ m^3$. Si trova:

$$\left.\frac{h^{0.42857}}{0.42857}\right|_2^{0.5} = -Kt^* \rightarrow t^* = 5017.67\ s = 1^h\ 23^{min}\ 37^s\ . \tag{30}$$

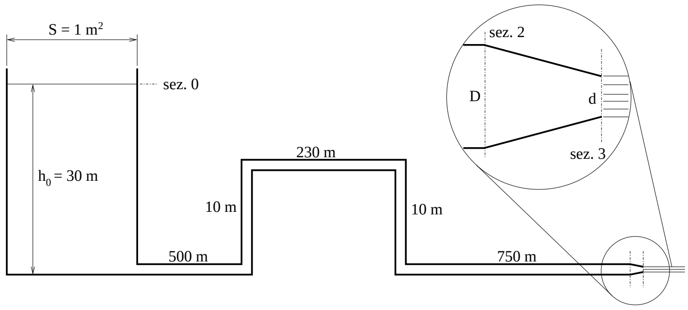
7

Il circuito in figura è costituito da un serbatoio (avente area di base $S = 1\ m^2$) che, tramite una tubazione circolare (diametro $D = 0.1\ m$) alimenta un ugello (diametro di uscita $d = 0.02\ m$) da cui fuoriesce un getto d'acqua utilizzato per mantenere in rotazione la palettatura di una turbina. La tubazione non è tutta in piano bensì supera un dislivello di 10 m. Le uniche perdite di carico trascurabili sono quelle dovute al restringimento di sezione in corrispondenza dell'ugello (tra le sezioni 2 e 3).

1. Assumendo un fattore d'attrito $f = 0.003$, calcolare la portata volumetrica trasferita nel circuito quando il livello di acqua nel serbatoio è pari ad $h_0 = 30\ m$.

2. All'istante $t = 0$, il serbatoio inizia a svuotarsi. Determinare il livello minimo h_{min} di acqua all'interno del serbatoio.

3. Determinare il tempo necessario affinchè il livello di acqua nel serbatoio passi da h_0 ad h_{min}



SOLUZIONE

1. Applicando Bernoulli tra il pelo libero dell'acqua nel serbatoio (sez. 0) e la sezione di uscita dall'ugello (sez. 3), si ottiene:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh_0 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_3^2 + l_v \ , \tag{31}$$

Le perdite di carico totali l_v sono pari a:

$$l_v = 2f\frac{L}{D}v_2^2 + n_g \cdot \left(\frac{1}{2}k_f v_2^2\right) = 91.5 \ v_2^2 \ , \tag{32}$$

trascurando le perdite di carico nel restringimento di sezione tra 2 e 3 e considerando le perdite concentrate nei gomiti a 90^o presenti nel circuito ($n_g = 4$), cui risulta associato un numero di altezze cinetiche pari

Dalla eq. di continuità si ricava:

$$Q = v_2\frac{\pi D^2}{4} = v_3\frac{\pi d^2}{4} \ \rightarrow \ v_2 = v_3\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0.04 \ v_3 \ . \tag{33}$$

Pertanto $l_v = 0.1464 \ v_3$ che, sostituita nella 31, fornisce:

$$gh_0 = 0.6464 \ v_3 \ \rightarrow \ v_3 = v_{out} = 21.33 \ m/s \ \rightarrow \ Q_3 = Q_{out} = 6.7 \cdot 10^{-3} \ m^3/s \ . \tag{34}$$

2. L'altezza minima di acqua nel serbatoio sarà $h_{min} = 10m$. Vista la presenza del gomito ad U rovesciata, per il principio dei vasi comunicanti, il livello di acqua nel serbatoio non può scendere al di sotto di h_{min}.

3. Il bilancio di volume sul serbatoio impone:

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -Q_{out}(t) = -\frac{\pi D^2}{4}v_{out}(t) \ , \tag{35}$$

con:

$$v_{out}(t) = \sqrt{\frac{2gh(t)}{1 + 4f\frac{L}{D} + 4k_f}} = K_1 \cdot \sqrt{h(t)} \ . \tag{36}$$

L'equazione differenziale da integrare è :

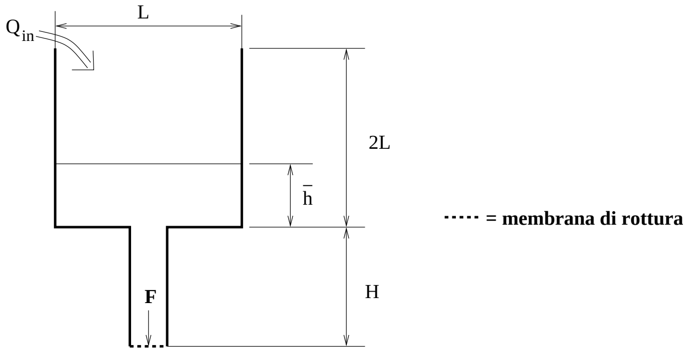
$$S\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -K_1 \cdot \sqrt{h(t)} \ \rightarrow \ \int_{h(0)}^{h_{min}} \frac{\mathrm{d}h(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{K_1}{S}\int_0^t \mathrm{d}t \ \rightarrow \ 2\sqrt{h}\Big|_{h_0}^{h_{min}} = -2.564 \cdot 10^{-3} t \ . \tag{37}$$

Si ottiene che il tempo necessario a svuotare il serbatoio fino al livello minimo è :

$$t = -\frac{2}{k_1/S}\left(\sqrt{h_{min}} - \sqrt{h_0}\right) = 1805.57 \ s = 30^{min}5^s \ . \tag{38}$$

Un serbatoio a sezione quadrata (di lato L ed altezza 2L) è collegato attraverso una tubazione cilindrica (di diametro D) ad una membrana di rottura, progettata per rompersi quando su di essa viene applicata una certa forza **F** (vedi figura). Le proprietà (ρ, μ) del liquido contenuto nel serbatoio sono note.

1. Calcolare l'altezza $\overline{h}$ di liquido nel serbatoio in corrispondenza della quale si ha la rottura della membrana.
2. Nota la portata volumetrica Q_{in} che alimenta il serbatoio, determinare il tempo T necessario a raggiungere un livello $h^* = 2\overline{h}$ di liquido nel serbatoio. Si assuma un livello iniziale di liquido nel serbatoio pari a $\overline{h}$.



SOLUZIONE

1. La forza F necessaria a provocare la rottura della membrana è legata alla pressione esercitata dal liquido sulla membrana stessa (situata in corrispondenza della sez. 2):

$$F = p_2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \ , \tag{39}$$

con $p_2 = p_1 + \rho g(H + \bar{h})$. Si ricava:

$$\bar{h} = \left(\frac{4F}{\pi D^2} - p_{atm} \right) \cdot \frac{1}{\rho g} - H \ . \tag{40}$$

2. Bilancio di massa/volume sul serbatoio:

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \rho(Q_{in} - Q_{out}) \rightarrow \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = (Q_{in} - Q_{out}) \ . \tag{41}$$

Il volume di liquido è pari a $V(t) = L^2 \cdot h(t) + (\pi D^2)/4 \cdot H$ da cui si deduce:

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = L^2 \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{42}$$

Per definizione, vale anche $Q_{out} = v_{out} \cdot (\pi D^2)/4$ essendo $v_{out} = \sqrt{2g[h(t) + H]}$.

Sostituendo le espressioni 42 e 2 nella 41 si ottiene:

$$L^2 \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = Q_{in} - \sqrt{2g[h(t) + H]} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{Q_{in}}{L^2}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{\pi D^2}{4L^2}\sqrt{2g}}_{\beta} \cdot \sqrt{h(t) + H} \ . \tag{43}$$

Bisogna integrare la seguente equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha - \beta\sqrt{h(t) + H} \ \rightarrow \ \int_{\bar{h}}^{2\bar{h}} \frac{\mathrm{d}h(t)}{\alpha - \beta\sqrt{h(t) + H}} = \int_0^T \mathrm{d}t \ . \tag{44}$$

L'integrale a sinistra può essere risolto per sostituzione ponendo $\alpha - \beta\sqrt{h(t) + H} = z$ con $\mathrm{d}h(t) = (-2/\beta^2) \cdot (\alpha - z)\mathrm{d}z$.

L'espressione finale per il tempo T è :

$$T = -\frac{2}{\beta^2} \left[\alpha \ln \left(\frac{\alpha - \beta\sqrt{2\bar{h} + H}}{\alpha - \beta\sqrt{\bar{h} + H}} \right) + \beta \left(\sqrt{2\bar{h} + H} - \sqrt{2\bar{h} + H} \right) \right] \ . \tag{45}$$