Corso di Dinamica e Modellistica degli Inquinanti — Anno 2018
Esercitazione n.2: identificazione dell'estensione della zona di non-mescolamento a valle di uno scarico trasversalmente esteso

Obiettivo dell'esercitazione

Implementare un modello bidimensionale e utilizzare la soluzione analitica di riferimento per valutare il campo di concentrazione in una sezione verticale/longitudinale del corpo idrico a valle di una immissione continua estesa in direzione trasversale.

Valutare l'effetto che le caratteristiche del campo di moto (velocità media e coefficiente di diffusione verticale) e la posizione (altezza rispetto al fondo) dello scarico hanno sul campo di concentrazione prodotto. I casi da analizzare sono due:

- condizioni idrauliche omogenee (velocità e coefficiente di diffusione turbolenta uniformi nello spazio);
- **opzionale:** condizioni idrauliche non omogenee (velocità e coefficiente di diffusione variabili lungo l'altezza della colonna d'acqua).

La soluzione al problema verrà costruita a partire dalla soluzione analitica dell'equazione di trasporto-dispersione valida per sorgente trasversale continua che rilascia in ambiente non confinato.

Indicate con x, y e z le coordinate spaziali lungo-corrente, verticale e trasversale, con O l'origine di un sistema cartesiano centrato al fondo del corpo idrico, con O' l'origine del sistema di riferimento centrato sul punto di immissione $y = h_0$, con K_y il coefficiente di diffusione turbolenta in direzione verticale, con u_x la componente della velocità convettiva lungo corrente e con $\dot{m}/w$ la massa di inquinante immessa nell'unità di tempo per unità di lunghezza trasversale dello scarico, la soluzione di riferimento definita su dominio infinito per il rilascio continuo posto in posizione $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (o in un sistema solidale con il punto di immissione) è :

$$C_{unbounded}(x, y) = \frac{\dot{m}/w}{\sqrt{4\pi K_y x u_x}} \exp\left(-\frac{u_x y^2}{4K_y x}\right) \tag{1}$$

In corrispondenza delle frontiere del dominio (fondo, $y = 0$, e superficie libera , $y = h$, della corrente) la soluzione deve soddisfare una condizione di flusso di massa nullo attraverso l'interfaccia ($K_y dC/dy \mid_{y=0}= 0$ e $K_y dC/dy \mid_{y=h}= 0$). Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti la soluzione analitica per il problema del rilascio in ambiente confinato può essere ricavata sommando il contributo di sorgente reale e sorgenti "virtuali".

Esecuzione

1. Scrivere l'equazione tridimensionale del trasporto identificando le ipotesi alla base del problema in esame e le relative semplificazioni possibili;
2. Rappresentare il campo di concentrazione relativo alla soluzione $C_{unbounded}$ corrispondente a sorgente localizzata a $y = h_0$ (operare un cambio di coordinate per trasformare le coordinate riferite alla sorgente nel sistema di riferimento fisso solidale al fondo: $y_O = y_{O'} + h_0$); identificare la posizione delle sorgenti virtuali che permettono di modellare l'interazione della sorgente reale con le frontiere del dominio ($V_1 = (0, -h_0, 0)$, $V_2 = (0, 2h - h_0, 0)$, $V_3 = (0, -(2h - h_0), 0)$, $V_4 = (0, 2h + h_0, 0)$, $V_5 = (0, 4h - h_0, 0)$, $V_6 = (0, -(4h - h_0), 0)$, ...)
3. Costruire la soluzione al problema, $C(y, x)$, sommando per ogni punto del dominio il contributo delle diverse sorgenti virtuali: valutare il numero minimo di sorgenti virtuali da sovrapporre per ottenere un campo di concentrazione stabile nel dominio di interesse;
4. Definire un indicatore di "omogeneità " di concentrazione lungo la veticale ($P_m(x) = C_{min}(:, x)/C_{max}(:, x) \in [0 : 1]$) per valutare, per ogni posizione a valle del punto di scarico, il grado di mescolamento raggiunto dall'inquinante sulla sezione. N.B. $P_m(x) = 0$ se esistono zone della sezione verticale in cui l'inquinante non è ancora stato trasportato, $P_m(x) = 1$ se $C_{min} = C_{max}$ e la concentrazione è omogenea sulla verticale.
   Valutare a che distanza a valle dal punto di scarico il mescolamento verticale risulta raggiunto ($P_m(x) = 0.98$);

5. Definire la posizione dell'asse del getto inquinante (punto di massima concentrazione per ogni distanza dal punto di rilascio) e la traiettoria del getto $(x, y \mid C_{max}(y, x))$ per identificare dove si accumula l'inquinante.
6. Valutare come cambia la soluzione al problema (isocontorni di concentrazione, profilo di variazione dell'indicatore di omogeneità con la posizione lungo corrente, valore della lunghezza di mescolamento) al variare
   (a) della posizione verticale dello scarico;
   (b) della portata del fiume;
   (c) del coefficiente di dispersione verticale;
7. **Opzionale:** Modificare il calcolo della funzione analitica in modo da usare per ogni punto valori di velocità e diffusione turbolenta locali definendo una legge di variazione parabolica con y per la velocità $u_x(y) = k_1 \cdot y^2$ e per la diffusione turbolenta $K_y(y) = k_2 y(h - y)$ in modo che abbiano lo stesso valor medio dei profili uniformi considerati prima (N.B. valori nulli di velocità o diffusione turbolenta possono indurre divergenza nella soluzione analitica); Valutare come cambiano gli isocontorni di concentrazione, il profilo dell'indicatore di disomogneità e la traiettoria del getto in questo caso;
8. Scrivere l'equazione del trasporto in forma adimensionale definendo le grandezze di riferimento per x, y e C ($L_{mix} = f(K_y, u_x, h)$, $C_{mix} = f(\dot{m}, Q)$);
9. Scrivere la soluzione analitica in forma adimensionale;
10. implementare la risoluzione in forma adimensionale e rappresentare i risultati in funzione dei parametri adimensionali che determinano la soluzione ($\eta = h_0/h$, altezza dello scarico sul fondo, $Pe = u_x h^2/(K_y L)$, numero di Peclet).

Risoluzione con Octave

1. Definire i dati geometrici (L, w, h, h_0) e idraulici (u_x, K_y) del problema e i valori discreti dello spazio x e y in cui calcolare la soluzione (x=linspace(0,L,Nx)...);
2. Implementare in una funzione il calcolo della soluzione analitica $C_{unbounded}$ passando i parametri necessari come lista o in condivisione (global);
3. Rappresentare gli isocontorni di concentrazione (con surf(x,y,C) o contour(x,y,C)) come grafici 2 o 3D; rappresentare il profilo $P_m(x)$ e della traiettoria del getto come grafico 1D (plot(x,Pm)). rappresentare come varia $L_{mix} = f(h_0, u_x, K_y)$ (una variabile indipendente alla volta).
4. Confrontare la soluzione analitica ottenuta considerando velocità e coefficiente di diffusione turbolenta costanti o variabili in y;

Sono disponibili sul sito due esempi di Script e funzione in Octave per la risoluzione del problema.