

Equazione di conservazione

Consideriamo un sistema di riferimento fisso F centrato in corrispondenza della sezione emissiva e con assi x , y e z orientati rispettivamente secondo la direzione principale del vento, la direzione trasversale e verticale. La conservazione della massa di una specie conservativa scritta con riferimento ad un generico volume di controllo $dx \cdot dy \cdot dz$ è :

$$\frac{dC}{dt} + u \frac{dC}{dx} + v \frac{dC}{dy} + w \frac{dC}{dz} = K_x \frac{d^2C}{dx^2} + K_y \frac{d^2C}{dy^2} + K_z \frac{d^2C}{dz^2} \quad (1)$$

dove C , $[kg/m^3]$, è la concentrazione della specie, (u, v, w) sono le componenti del campo di velocità, $[m/s]$, e K_x , K_y e K_z sono i coefficienti di dispersione turbolenta nelle tre direzioni, $[m^2/s]$.

Il termine a sinistra dell'equazione rappresenta la derivata sostanziale, ovvero la variazione della massa all'interno di un volume di controllo che si sposta Lagrangianamente, alla stessa velocità del flusso. Con riferimento a questo volume di controllo, l'unico meccanismo che promuove il trasferimento di massa è la dispersione (in assenza di trasformazione chimico/fisica). Adottando un sistema cartesiano M solidale al volume di controllo (x_M, y_M, z_M) , l'equazione nel sistema di riferimento mobile diventa

$$\frac{DC}{Dt} = K_x \frac{d^2C}{dx_M^2} + K_y \frac{d^2C}{dy_M^2} + K_z \frac{d^2C}{dz_M^2} \quad (2)$$

dove $D \bullet /Dt$ indica la derivata sostanziale.

Campo di concentrazione prodotto da rilascio discreto (puff)

Se all'istante $t = 0$ il volume di controllo contiene una quantità discreta m di massa (kg) (puff), la concentrazione è nulla altrove e il dominio non è delimitato (dominio non confinato), la soluzione analitica dell'equazione che descrive la variazione di concentrazione di specie nello spazio e nel tempo è data da (modello di Roberts, emissione discreta):

$$C_{puff}(x_M, y_M, z_M, t) = \frac{m}{8(\pi \cdot t)^{1.5}(K_x \cdot K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp \left(-\frac{1}{4t} \left(\frac{x_M^2}{K_x} + \frac{y_M^2}{K_y} + \frac{z_M^2}{K_z} \right) \right) \quad (3)$$

dove le coordinate (x_M, y_M, z_M) rappresentano la distanza di un punto rispetto all'origine del sistema mobile, solidale al volume di controllo. Se è noto il campo di moto (componenti di velocità del vento nelle tre direzioni), l'equazione 3 può essere riscritta con riferimento al sistema di assi Cartesiano fisso centrato sulla sezione di emissione del puff considerando il moto relativo tra i due sistemi cartesiani:

$$x_F = x_M + \int_0^t u \cdot dt \quad (4)$$

$$y_F = y_M + \int_0^t v \cdot dt \quad (5)$$

$$z_F = z_M + \int_0^t w \cdot dt \quad (6)$$

Per condizioni di vento prevalente (i.e. stabile in direzione e intensità per intervalli di tempo significativi), nel sistema di riferimento definito (x parallelo alla direzione prevalente) si ha $v = (u, 0, 0)$ e l'equazione del puff nel sistema di riferimento fisso diventa:

$$C_{puff}(x_F, y_F, z_F, t) = \frac{m}{8(\pi \cdot t)^{0.5}(K_x \cdot K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp \left(-\frac{1}{4t} \left(\frac{(x_F - ut)^2}{K_x} + \frac{y_F^2}{K_y} + \frac{z_F^2}{K_z} \right) \right) = \quad (7)$$

$$= m \cdot C_{puff,unit} \quad (8)$$

Nell'equazione 8, $C_{puff,unit}$ è il campo di concentrazione associato ad una emissione di massa unitaria ($m = 1$) cioè la funzione di risposta unitaria del sistema. L'equazione 3 e le equazioni 4 che descrivono lo spostamento relativo del riferimento mobile rispetto al sistema fisso danno origine alla

famiglia di modelli "a puff Lagrangiano". Questi modelli permettono di valutare l'impatto prodotto da sorgente discreta in condizioni di campo di moto non uniforme nello spazio e tempo dipendente. La massa discreta rilasciata ad ogni istante temporale viene trasportata e dispersa in funzione del campo di vento e dispersione locali e istantanei. L'equazione 7 presuppone invece l'uniformità nello spazio e la costanza nel tempo della velocità (il termine di posizione argomento del primo termine dell'esponenziale è stato ottenuto assumendo u indipendente dalla posizione e dal tempo).

Il profilo di concentrazione prodotto dal rilascio discreto è Gaussiano nelle tre direzioni dello spazio. Indicato l'allargamento del puff nelle tre direzioni con σ_x , σ_y e σ_z , in $[m]$, dove

$$\sigma_x = \sqrt{2K_x t} \quad (9)$$

$$\sigma_y = \sqrt{2K_y t} \quad (10)$$

$$\sigma_z = \sqrt{2K_z t} \quad (11)$$

l'equazione 7 può essere espressa come (modello di Pasquill-Gifford, emissione discreta):

$$C_{puff}(x_F, y_F, z_F, t) = \frac{m}{(2\pi)^{1.5} \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_F - ut)^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_F^2}{\sigma_y^2} + \frac{z_F^2}{\sigma_z^2} \right) \right) \quad (12)$$

Con il passare del tempo, un rilascio discreto di forma inizialmente sferica risulterebbe progressivamente traslato nella direzione del vento e allargato nelle tre direzioni dello spazio in misura proporzionale alla radice del coefficiente di dispersione e del tempo trascorso dal rilascio.

Campo di concentrazione prodotto da rilascio continuo (plume)

Ogni emissione continua può essere rappresentata come una sequenza di emissioni discrete nel tempo:

$$m(t) = \int_0^t \dot{m}(\tau) d\tau \quad (13)$$

dove \dot{m} , $[kg/s]$ è il rateo emissivo. L'equazione che descrive la conservazione della massa è lineare e vale la sovrapposizione degli effetti, per cui l'impatto di una successione di emissioni discrete può essere calcolato come somma degli impatti prodotti dalle singole emissioni. Il campo di concentrazione dovuto ad una sequenza di emissioni è quindi dato da:

$$C_{plume}(x_M, y_M, z_M, t) = \sum_{k=1, n} \frac{m_k}{8(\pi \cdot (t - t_k))^{1.5} (K_x \cdot K_y \cdot K_z)^{0.5}} \cdot \quad (14)$$

$$\exp \left(-\frac{1}{4(t - t_k)} \left(\frac{x_M^2}{K_x} + \frac{y_M^2}{K_y} + \frac{z_M^2}{K_z} \right) \right)$$

dove m_k è la massa discreta associata ad ogni puff e t_k è il tempo di emissione del singolo puff. Passando al continuo, se τ è l'istante di emissione di ogni pacchetto di massa discreto

$$C_{plume}(x_M, y_M, z_M) = \int_0^\infty \frac{\dot{m}(\tau) d\tau}{8(\pi \cdot (t - \tau))^{1.5} (K_x \cdot K_y \cdot K_z)^{0.5}} \cdot \quad (15)$$

$$\exp \left(-\frac{1}{4(t - \tau)} \left(\frac{x_M^2}{K_x} + \frac{y_M^2}{K_y} + \frac{z_M^2}{K_z} \right) \right) = \int_0^\infty C_{puff, unit}(x_M, y_M, z_M, t - \tau) \dot{m} d\tau \quad (16)$$

Nell'equazione 16, il termine integrale è un integrale di convoluzione (somma di risposte impulsive opportunamente traslate nel tempo, pesate secondo l'entità istantanea del rateo emissivo).

Nel caso di (i) vento prevalente e (ii) rateo emissivo costante, il campo di concentrazione nel sistema di riferimento fisso centrato sulla sezione di emissione è dato da (modello di Roberts, emissione continua):

$$C_{plume}(x_F, y_F, z_F) = \frac{\dot{m}}{4\pi x_F (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp \left(-\frac{u}{4x_F} \left(\frac{y_F^2}{K_y} + \frac{z_F^2}{K_z} \right) \right) \quad (17)$$

dove la dipendenza dal tempo sparisce trattandosi di condizioni stazionarie (emissione, vento e dispersioni tempo invarianti). Anche in questo caso, l'equazione può essere riscritta in funzione

dell'allargamento del pennacchio in direzione trasversale e verticale (modello di Pasquill-Gifford, emissione continua) come:

$$C_{plume}(x_F, y_F, z_F) = \frac{\dot{m}}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_F^2}{\sigma_y^2} + \frac{z_F^2}{\sigma_z^2} \right)\right) \quad (18)$$

Le equazioni 12 e 18 basate sull'allargamento del puff/plume utilizzano espressioni analitiche per le quantità σ_x , σ_y e σ_z che risultano dipendere dalle (i) condizioni di stabilità atmosferica (classi di Pasquill-Gifford), (ii) dalla distanza x a valle del punto di emissione a cui si valuta l'allargamento del puff/plume e (iii) dalla tipologia di terreno (vedi Briggs.pdf).

Il campo di concentrazione descritto dall'equazione 17 indica (i) profilo Gaussiano in direzione trasversale e verticale, con massimo in corrispondenza di $y_F = 0$ e $z_F = 0$ (linea centrale/asse del pennacchio) e (ii) variazione della concentrazione lungo x_F decrescente data da

$$C_{plume}(x) \propto \frac{1}{x_F} \quad (19)$$

Effetto del dominio confinato

Nei problemi di dispersione atmosferica la posizione della sorgente emissiva può essere più o meno elevata rispetto al terreno che rappresenta una superficie non valicabile per il trasporto degli inquinanti.

Il campo di concentrazione in corrispondenza del suolo è utilizzato per valutare il potenziale impatto dell'emissione perchè il flusso di deposizione al suolo di inquinanti è controllato dal valore di concentrazione in prossimità della superficie di deposizione.

Le "curve di impatto" sono quindi ricavate come isocontorni di concentrazione in corrispondenza del livello del terreno.

È opportuno definire un sistema di riferimento T con origine in corrispondenza del suolo, anzichè in corrispondenza della sezione emissiva F . La trasformazione di coordinate da utilizzare per passare da uno all'altro sistema di riferimento è :

$$x_T = x_F \quad (20)$$

$$y_T = y_F \quad (21)$$

$$z_T = z_F + H \quad (22)$$

dove H , [m] è l'altezza della sezione emissiva nel riferimento T .

Nel sistema con origine sul terreno il campo di concentrazione associato alla sorgente continua risulta:

$$C_{plume}(x_T, y_T, z_T) = \frac{\dot{m}}{4\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \left(\frac{y_T^2}{K_y} + \frac{(z_T - H)^2}{K_z} \right)\right) \quad (23)$$

Anche in questo caso, l'equazione può essere riscritta in funzione dell'allargamento del pennacchio in direzione trasversale e verticale (modello di Pasquill-Gifford, emissione continua, sorgente elevata) come:

$$C_{plume}(x_F, y_F, z_F) = \frac{\dot{m}}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_F^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z_F - H)^2}{\sigma_z^2} \right)\right) \quad (24)$$

Quando l'allargamento verticale del pennacchio risulterà superiore ad H , sarà necessario aggiungere alla soluzione il contributo della sorgente virtuale (situata a $z_T = -H$). Usando ancora il principio di sovrapposizione degli effetti, la concentrazione di emissione continua da sorgente elevata in dominio confinato risulterà data da:

$$\begin{aligned} C_{plume}(x_T, y_T, z_T) &= \frac{\dot{m}}{4\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \left(\frac{y_T^2}{K_y} + \frac{(z_T - H)^2}{K_z} \right)\right) + \\ &+ \frac{\dot{m}}{4\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \left(\frac{y_T^2}{K_y} + \frac{(z_T + H)^2}{K_z} \right)\right) = \\ &= \frac{\dot{m}}{4\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \frac{y_T^2}{K_y}\right) \cdot \left[\exp\left(-\frac{u(z_T - H)^2}{4x_T K_z}\right) + \exp\left(-\frac{u(z_T + H)^2}{4x_T K_z}\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Il profilo è ancora Gaussiano in direzione trasversale con massimo a $y_T = 0$, in corrispondenza del piano verticale passante per l'asse del pennacchio. In corrispondenza del suolo ($z_T = 0$), la curva di impatto è data da:

$$C_{plume}(x_T, y_T, 0) = \frac{2\dot{m}}{4\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \frac{y_T^2}{K_y}\right) \cdot \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \left(\frac{H^2}{K_z}\right)\right) \quad (26)$$

I valori massimi di concentrazione al suolo si hanno in corrispondenza dell'asse del pennacchio, $y_T = 0$, con legge data da:

$$C_{plume}(x_T, 0, 0) = \frac{\dot{m}}{2\pi x_T (K_y \cdot K_z)^{0.5}} \exp\left(-\frac{u}{4x_T} \left(\frac{H^2}{K_z}\right)\right) \propto \frac{1}{x_T} \exp\left(-\frac{H^2 u}{4K_z x_T}\right) \quad (27)$$

Questa funzione è nulla per $x_T = 0$ e $x_T = \infty$ e positiva, con massimo, all'interno dell'intervallo. Per trovare la posizione del massimo (distanza dalla sorgente del punto di massima ricaduta), è sufficiente eguagliare a zero la derivata della funzione:

$$\frac{dC_{plume}}{dx} = 0 = -\frac{1}{x_T^2} \exp\left(-\frac{H^2 u}{4K_z x_T}\right) + \frac{1}{x_T} \exp\left(-\frac{H^2 u}{4K_z x_T}\right) \cdot \left(-\frac{H^2 u}{4K_z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x_T^2}\right) \quad (28)$$

da cui semplificando si ottiene

$$0 = -1 + \frac{1}{x_T} \cdot \left(\frac{H^2 u}{4K_z} \cdot \frac{1}{x_T}\right) \quad (29)$$

da cui

$$x_{T,max} = \frac{H^2 u}{4K_z} \quad (30)$$

La posizione del massimo di ricaduta è quindi:

- tanto più lontano dalla sorgente quanto maggiore è l'altezza H ($\propto H^2$) e la velocità u del vento;
- tanto più vicina quanto maggiore è la costante di dispersione verticale.

Sostituendo $x_{T,max}$ nella 27 si ottiene il valore del massimo di concentrazione:

$$C_{plume,max} = \frac{2\dot{m} \exp(-1)}{\pi u H^2} \left(\frac{K_z}{K_y}\right)^{0.5} \propto \frac{\dot{m}}{u H^2} \left(\frac{K_z}{K_y}\right)^{0.5} \quad (31)$$

che risulta:

- linearmente proporzionale al rateo emissivo, \dot{m} ;
- inversamente proporzionale alla velocità del vento, u , e all'altezza dell'emissione, H ;
- direttamente proporzionale al coefficiente di dispersione verticale, K_z , e inversamente proporzionale al coefficiente di dispersione trasversale, K_y .

L'elevata dispersione verticale promuove l'allargamento verticale del pennacchio nelle zone prossime al punto di emissione, con ricaduta potenzialmente maggiore; l'elevata dispersione trasversale promuove l'allargamento orizzontale del pennacchio, con una diluizione maggiore della specie inquinante prima che il pennacchio arrivi al suolo.

In termini di modello di Pasquill-Gifford, gli isocontorni di ricaduta al suolo sono dati da

$$C_{plume}(x_F, y_F, 0) = \frac{\dot{m}}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_F^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \cdot 2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{H^2}{\sigma_z^2}\right) \quad (32)$$

e la concentrazione al suolo a valle del punto emissivo lungo l'asse del plume è data da:

$$C_{plume}(x_F, 0, 0) = \frac{\dot{m}}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{H^2}{\sigma_z^2}\right) \quad (33)$$

Velocità [m/s]	Insolazione			Copertura nuvolosa/notturna	
	forte	moderata	leggera	molto nuvoloso	poco nuvoloso
< 2	A	A-B	B	E	F
2 – 3	A-B	B	C	E	F
3 – 5	B	B-C	C	D	E
5 – 6	C	C-D	D	D	D
> 6	C	D	D	D	D

Tabella 1: Classi di Pasquill per la descrizione delle condizioni di stabilità atmosferica.

Effetto della stabilità atmosferica

Si riporta la Tabella relativa alle categorie di stabilità atmosferica definite da Pasquill che vengono utilizzate per identificare espressioni idonee per i coefficienti di allargamento trasversale e verticale dei pennacchi.

Nell'equazione 33 la dipendenza della concentrazione al suolo dalla coordinata x è implicita nei valori di $\sigma_y(x)$ e $\sigma(z)$ per cui non è facile vedere da queste formule l'effetto della variazione di velocità sulla posizione del massimo. Anche il valore di massima ricaduta non è direttamente valutabile: per una data classe di stabilità (valori di σ_y e σ_z), diminuisce all'aumentare della velocità; tuttavia, all'aumentare della velocità cambia, a parità di grado di insolazione, la classe di stabilità con un progressivo aumento dei coefficienti di dispersione trasversale e verticale. Per il coefficiente trasversale, maggiore è σ_y e più basso è il massimo di ricaduta, mentre per σ_z si ha che, all'aumentare del parametro, il plume si allarga di più ed è in grado di interagire prima (quando il pennacchio è più concentrato) con il terreno.