Soluzione esercizi sul trasferimento di massa

a.

---

1. Ipotizziamo che la concentrazione di gas all'interfaccia con il liquido rimanga pari a C_{sat} lungo tutta la colonna.

   Il bilancio di massa scritto per il gas che diffonde nel volume di liquido presente in un tratto dz di colonna è dato da:

$$\frac{\mathrm{d}VC}{\mathrm{d}t} = Q(z)C(z) - Q(z+\mathrm{d}z)C(z+\mathrm{d}z) + \tag{1}$$
$$+kA_{int}(C_{sat} - C(z)) \tag{2}$$

   dove il termine a sinistra rappresenta l'accumulo di massa nel tempo nel volume di controllo e termini a destra rappresentano rispettivamente flussi convettivi in ingresso e uscita al volume di controllo (film di liquido che si muove verso l basso) e il trasferimento attraverso l'interfaccia gas/liquido. In particolare si ha:

   (a) $\frac{\mathrm{d}VC}{\mathrm{d}t} = 0$ in condizioni di stazionario
   (b) $Q(z) = Q(z+\mathrm{d}z)$ per la conservazione della massa del liquido
   (c) $A_{int} = 2\pi(R-\delta)\mathrm{d}z \simeq 2\pi R$ per l'interfaccia di scambio (superficie cilindrica su cui scorre il film liquido)

   dove $C(Z)$ è la concetrazione di gas nel liquido alla generica altezza z lungo la colonna. Utilizzando la derivata per riscrivere il flusso convettivo (o utilizzando Taylor per esprimere la concentrazione a $C(z+\mathrm{d}z)$) il bilancio di massa diventa:

$$0 = -Q(z)\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z + k2\pi R\mathrm{d}z(C_{sat} - C(z)) \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\pi kR}{Q(z)}(C_{sat} - C(z)) \tag{4}$$

   che deve essere integrata separando le variabili:

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{C_{sat} - C(z)} = \frac{2\pi R}{Q(z)}\frac{D}{z}0.69\left(\frac{zv_0}{D}\right)^{0.5}\mathrm{d}z \tag{5}$$
$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{C_{sat} - C(z)} = 0.69\frac{2\pi R}{Q(z)}\left(\frac{Dv_0}{z}\right)^{0.5}\mathrm{d}z \tag{6}$$

   tra $C(z=0) = 0$ e $C(L)$ e tra 0 e L. La concentrazione $C(z=0) = 0$ perché non c'è gas nel liquido all'inizio della colonna. Per determinare v_0 si sa che $Q(z) = Q = 2\pi R\delta v_0$ per cui $v_0 = Q/2\pi R\delta$.

2. L'integrazione dell'equazione fornisce:

$$\ln\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{0.69}{v_0\delta}(Dv_0)^{0.5}2z^{0.5} \tag{7}$$
$$\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = A\exp\left(-\frac{0.69}{v_0\delta}(Dv_0)^{0.5}2z^{0.5}\right) \tag{8}$$

   Imponendo la condizione al contorno risulta $A = 1$. Per il profilo di concentrazione si ricava:

$$C_{sat} - C(z) = \tag{9}$$
$$= (C_{sat} - C(0))\exp\left(-\frac{0.69}{v_0\delta}(Dv_0)^{0.5}2z^{0.5}\right) \tag{10}$$
$$C(z) = C_{sat}(1 - \exp\left(-\frac{0.69}{v_0\delta}(Dv_0)^{0.5}2z^{0.5}\right)) \tag{11}$$

   e imponendo $C(z=L) = 0.1C_{sat}$ si può ricavare il valore di $L = z$ per cui si ha l'assorbimento desiderato.

b.

---

1. Il fiume è un sistema in flusso convettivo che scambia ossigeno attraverso l'interfaccia con l'aria esterna. Presa x la coordinata nella direzione del flusso, il bilancio di massa è dato da:

$$\frac{VC(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)C(x) - Q(x+\mathrm{d}x)C(x+\mathrm{d}x) + \tag{12}$$
$$+kA_{int}(C_{sat} - C(x)) \tag{13}$$

   dove $C(x)$ è la concentrazione di ossigeno disciolto nell'acqua alla generica posizione x lungo il fiume e C_{sat} è la concentrazione di ossigeno all'interfaccia aria/liquido. Il primo termmine è la variazione di massa di ossigeno nel volume di controllo, nulla in condizioni di stazionario. Il bilancio può essere riscritto come:

$$0 = -Q\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + k_lA_{int}(C_{sat} - C(x)) \tag{14}$$

   dove $Q = Q(x) = Q(x+\mathrm{d}x)$ e $A_{int} = w\mathrm{d}x$ con w larghezza del fiume. Questa equazione deve essere integrata tra $C(x=0) = 2\ mg/l$ e $C(L)$.

2. Integrando l'equazione per separazione di variabili si ha:

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{k_lw}{Q}(C_{sat} - C(x)) \tag{15}$$
$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{C_{sat} - C(x)} = \frac{k_lw}{Q}\mathrm{d}x \tag{16}$$
$$\ln\frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{k_lw}{Q}x \tag{17}$$
$$\frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = A\exp(-\frac{k_lw}{Q}x) \tag{18}$$

   imponendo le condizioni al contorno si ricava $A = 1$, e la variazione di concentrazione lungo il fiume risulta:

$$C_{sat} - C(x) = (C_{sat} - C(0))\exp(-\frac{k_lw}{uwh}x) \tag{19}$$
$$C(x) = C_{sat} - (C_{sat} - C(0))\exp(-\frac{k_lw}{uwh}x) \tag{20}$$

Sostituendo a $C(x = L) = 6\ mg/l$ si ricava il valore di $x = L$ entro cui il livello di ossigeno risale a valori accettabili.

c.

---

1. Il bilancio di massa relativo al gas assorbito in fase liquida dà :

$$\frac{\mathrm{d}VC(z)}{\mathrm{d}z} = Q(z)C(z) - Q(z+\mathrm{d}z)C(z+\mathrm{d}z) + \quad (21)$$

$$+kA_{int}(C_{sat} - C(z)) \quad (22)$$

dove il rimo termine a sinistra è nullo in condizioni di stazionario, il flusso convettivo può essere riscritto come:

$$Q(z)C(z) - Q(z+\mathrm{d}z)C(z+\mathrm{d}z) = -Q\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \quad (23)$$

e l'area di interfaccia è data da $A_{int} = 2\pi R\mathrm{d}z$. Il bilancio si semplifica in:

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{k2\pi R}{Q}(C_{sat} - C(z)) \quad (24)$$

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{k}{\Gamma}(C_{sat} - C(z)) \quad (25)$$

$$(26)$$

In questa esporessione, k è il coefficiente di trasferimento di massa locale che dobbiamo legare al coefficiente di massa k_L dato, misurato a distanza L. Integrando tra 0 ed L si ha:

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{C_{sat} - C(z)} = \frac{k}{\Gamma}\mathrm{d}z \quad (27)$$

$$\ln\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{k}{\Gamma}z \quad (28)$$

$$\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = A\exp(-\frac{k}{\Gamma}z) \quad (29)$$

Dalle condizioni al controno risulta $A = 1$. La variazione di concentrazione lungo la colonna è data da:

$$C_{sat} - C(z) = (C_{sat} - C(0))\exp(-\frac{k}{\Gamma}z) \quad (30)$$

$$C(z) = C_{sat} - (C_{sat} - C(0))\exp(-\frac{k}{\Gamma}z) \quad (31)$$

La portata in moli di gas assorbita nel liquido a distanza z è data da: $\dot{n}_{gas}(z) = C(z)Q(z) - C(0)Q(0) = C(z)Q(z) == C(z)\Gamma 2\pi R$ essendo $C(0) = 0$. Questa portata in massa trasferita può essere espressa utilizzando il coefficiente di trasferimento globale k_L come:
$\dot{n}_{gas}(L) = k_L A_{int,L}(C(L) - C(0))$
dove $A_{int,L} = 2\pi RL$. Questa può essere legata al coefficiente di trasferimento di massa locale nel modo seguente:

$$C(L)\Gamma 2\pi R = k_L 2\pi RL(C(L) - C(0)) \quad (32)$$

dove Γ va espresso in funzione di k attraverso la 31:

$$\Gamma = \frac{kL}{\ln\frac{C_{sat}-C(0)}{C_{sat}-C(L)}} \quad (33)$$

da cui:

$$\frac{k2\pi RL}{\ln\frac{C_{sat}-C(0)}{C_{sat}-C(L)}}C(L) = k_L 2\pi RL(C(L) - C(0)) \quad (34)$$

$$\frac{k2\pi RL}{\ln\frac{C_{sat}-C(0)}{C_{sat}-C(L)}}\cdot \quad (35)$$

$$\cdot[C(L) - C_{sat} - (C(0) - C_{sat})] = \quad (36)$$

$$= kA_{int}\frac{[C(L) - C_{sat} - (C(0) - C_{sat})]}{\ln\frac{C_{sat}-C(0)}{C_{sat}-C(L)}} = \quad (37)$$

$$= kA_{int}\Delta C_{ml} = k_L A_{int}(C(L) - C(0)) \quad (38)$$

$$(39)$$

d.

---

1. In questa configurazione, le gocce di liquido entrano dalla sommità dello scrubber a concentrazione di VOC $C(0) = 0$ mentre si muovono verso il basso per gravità , si arricchiscono per effetto del trasferimento di massa attraverso l'interfaccia $A_{int} = \pi D_p^2/4$, con D_p diametro della goccia, in concentrazione di VOC. Il bilancio di conservazione della massa di VOC presente in fase assorbita sulla singola goccia che si muove lungo la colonna è dato da:

$$\frac{\mathrm{d}VC(t)}{\mathrm{d}t} = A_{int}J(z) \quad (40)$$

In questo caso il trasferimento non avviene a stazionario rispetto al volume della goccia ($V\mathrm{d}C/\mathrm{d}t \neq 0$). Ipotizzando che la goccia si muova alla suao velocità terminale $v_p = cost$, la coordinata temporale (tempo dall'ingresso della goccia nella colonna) e quella spaziale (spazio percorso lungo la colonna) sono tra loro legati come:
$z = v_p t \rightarrow t = z/v_p$
per cui l'equazione di bilancio può essere riscritta come:

$$\frac{V\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{Vv_p\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = A_{int}J(z) \quad (41)$$

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{A_{int}}{Vv_p}J(z) = \quad (42)$$

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi D_p^2 6}{\pi D_p^3 v_p}D\frac{C_{sat} - C(z)}{D_p/2} \quad (43)$$

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{3D}{D_p^2 v_p}(C_{sat} - C(z)) \quad (44)$$

2. L'equazione in questa forma può essere integrata nella coordinata z.

$$\frac{\mathrm{d}C(z)}{C_{sat} - C(z)} = \frac{12D}{D_p^2 v_p}\mathrm{d}z \tag{45}$$

$$\ln\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = \frac{12D}{D_p^2 v_p} z \tag{46}$$

$$\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = A \exp\left(\frac{12D}{D_p^2 v_p} z\right) \tag{47}$$

Dalle condizioni al contorno si ricava $A = 1$. Risulta:

$$C_{sat} - C(z) = (C_{sat} - C(0)) \exp\left(\frac{12D}{D_p^2 v_p} z\right) \tag{48}$$

da cui sapendo quale si vuole sia la $C(z = L)$, esprimendo la velocità terminale v_p come

$$v_p = \tau_p g = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} g \tag{49}$$

è possibile ricavare D_p che permette di realizzare il trasferimento di massa nella lunghezza disponibile.