Soluzione esercizi trasporto fluidi comprimibili

a.

1. Applicando la conservazione della massa al volume di controllo del serbatoio si ha:
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -AG \tag{1}$$
dove
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Mn}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{MpV}{RT}\right) \tag{2}$$
con M massa molare, n numero di moli e, per la legge dei gas ideali, $n = pV/RT$ con p pressione del gas, V volume del serbatoio, T temperatura del gas nel serbatoio ed R costante universale dei gas. La sezione A è quella del foro di uscita:
$$A = \frac{\pi d^2}{4} \tag{3}$$
Considerata l'elevata differenza di pressione tra serbatoio e ambiente di sbocco, ipotizziamo che l'efflusso sia inizialmente critico, per cui il flusso specifico G è dato da:
$$G = \sqrt{\gamma p_1 \rho_1} \tag{4}$$
con p_1 e ρ_1 condizioni del gas alla sezione di sbocco e γ esponente della trasformazione adiabatica ($\gamma = 1.4$ per gas biatomici). Si osservi che $p_1 > p_{atm}$ finché il flusso rimane sonico (al limite, $p_1 = p_{atm}$ quando il flusso passa da sonico a non sonico). Le condizioni alla sezione di sbocco dipendono dalle condizioni all'interno del serbatoio attraverso l'equazione di Bernoulli, dove si tiene conto che il gas subisce una trasformazione adiabatica tra l'interno del serbatoio e la sezione di sbocco. Risulta che:
$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_{crit} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{5}$$
e dall'adiabatica:
$$\frac{p_1}{\rho_1}^{\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0}^{\gamma} \tag{6}$$
che sostituiti nell'equazione 4 danno:
$$G = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \tag{7}$$
che tenendo conto della relazione di stato tra p, T e ρ nel serbatoio diventa:
$$G = p_0\sqrt{\gamma \frac{M}{RT_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = kp_0 \tag{8}$$
Questa equazione indica che, finché il flusso rimane critico, il flusso specifico uscente varia linearmente con la pressione dentro il serbatoio. L'equazione di conservazione della massa diventa:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{MpV}{RT}\right) = \frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi d^2}{4}Kp_0 \tag{9}$$
ovvero
$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi d^2}{4}Kp_0 = K_1 p_0 \tag{10}$$
che va integrata tra la pressione iniziale $p_0(0) = 10\ atm$ e la pressione alla quale il deflusso da serbatoio cessa di essere critico. Questo valore si calcola come:
$$p_0(t^*) = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)_{crit} p_{atm} \tag{11}$$
poiché nell'ultimo istante di flusso critico, il rapporto tra pressione dentro il serbatoio e allo sbocco dipende dal rapporto critico e la pressione allo sbocco coincide con la pressione dell'ambiente di sbocco. Nel caso in esame:
$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_{crit} = 0.528 \tag{12}$$
$$\rightarrow \quad p_0(t^*) = 1.89 p_{atm} = 1.89 \cdot 10^5\ Pa \tag{13}$$
Dalla conservazione della massa si ha:
$$\int_{p_0(0)}^{p_0(t^*)} \frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} = -K_1 t^* \tag{14}$$
$$t^* = \frac{1}{K_1}\ln\frac{p_0(t^*)}{p_0(0)} \tag{15}$$

2. Quando la pressione nel serbatoio scende a $1.89 \cdot 10^5\ Pa$ (e valori inferiori) il flusso in uscita è subsonico e cambia l'espressione per G. Per calcolare il tempo necessario perché la pressione scenda a $1.1\ atm$ si deve risolvere l'equazione:
$$\frac{MpV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi d^2}{4}G \tag{16}$$
dove G è dato da:
$$G = \rho_1\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)} \tag{17}$$
dove p_1 e ρ_1 sono le condizioni nell'ambiente di uscita. Questa equazione può essere semplificata nella forma:
$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -K_2\sqrt{K_3(p_0^2 - K_4)} \tag{18}$$

dove K_2, K_3 e K_4 sono valori numerici, e diventa

$$\int_{1.1\ atm}^{1.1\ atm} \frac{\mathrm{d}p_0}{\sqrt{K_3(p_0^2 - K_4)}} = -K_2 t \tag{19}$$

L'equazione 19 non è integrabile in modo semplice per via analitica. L'equazione 18 può essere risolta per via numerica utilizzando un foglio Excel facendo le seguenti assunzioni:

- derivata approssimata con rapporto incrementale:

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = \frac{p_0(t+1) - p_0(t)}{\Delta t} \tag{20}$$

- Termine a destra valutato in modo esplicito, in funzione delle variabili all'istante t:

$$-K_2\sqrt{K_3(p_0^2 - K_4)} = -K_2\sqrt{K_3(p_0(t)^2 - K_4)} \tag{21}$$

In questo modo, risolvendo rispetto a $p_0(t+1)$, si ottiene una equazione per il calcolo della variazione di p_0 nel tempo:

$$p_0(t+1) = p_0(t) - \Delta t K_2\sqrt{K_3(p_0(t)^2 - K_4)} \tag{22}$$

b.

1. L'equazione di Bernoulli tra 0 ed 1 dà

$$\frac{dp}{\rho} = dw_s \tag{23}$$

$$\int_0^1 \frac{dp}{\rho} = w_s \tag{24}$$

La trasformazione che avviene nel tratto $0-1$ è isoterma e quindi ρ è data da:

$$\rho = \frac{pM}{RT} \tag{25}$$

che sostituita nell'espressione di w_s dà :

$$w_s = \frac{RT}{M}\ln\frac{p_1}{p_0} \quad . \tag{26}$$

La portata sarà uguale a:

$$w = GA \tag{27}$$

e la potenza risulta

$$P = w \cdot w_s \quad . \tag{28}$$

La pressione nel punto 1 deve essere determinata applicando Bernoulli al tratto 0-1:

$$\frac{1}{2}d(v^2) + \frac{dp}{\rho} = -\frac{2fv^2}{D}dx$$

$$G^2\ln\frac{p_1}{p_0} + \frac{M}{2RT}(p_0^2 - p_1^2) + 2f\frac{LG^2}{D} = 0$$

$$p_1 = \sqrt{p_0^2 + 4\frac{RT}{M}\cdot\frac{fLG^2}{D}} \tag{29}$$

Poiché G è data da

$$G = \frac{4w}{\pi D^2} \tag{30}$$

sostituendo G e p_1 nell'espressione della potenza si ottiene

$$P = \frac{RT}{M}w\ln\frac{\sqrt{p_0^2 + \frac{4RT}{M}\frac{fL16w^2}{\pi^2 D^3}}}{p_0} \tag{31}$$

2. Il costo totale è dato da

$$C_{TOT} = C_T + C_P + K_E \cdot H \cdot N \cdot P \tag{32}$$

dove il costo delle tubazione e il costo della stazione valgono:

$$C_T = K_T \cdot D \cdot L \tag{33}$$

$$C_P = K_P \cdot P = K_P \cdot w\frac{RT}{M}\ln\frac{p_1}{p_0} \tag{34}$$

Derivando l'espressione dei costi totale si ottiene

$$\frac{\partial C_{TOT}}{\partial D} = K_T \cdot L + (K_E \cdot N \cdot H + K_P)\cdot\frac{\partial P}{\partial D} \tag{35}$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial D} &= \frac{-K_T L}{K_P + K_E \cdot N \cdot H} = \\ &= \frac{RT}{2M}w\frac{fL\frac{16w^2(-5)}{\pi^2 D^6}}{\frac{Mp_0^2}{4RT} + fL\frac{16w^2}{\pi^2 D^5}} \\ \frac{K_T L}{K_P + K_E \cdot N \cdot H} &= \frac{RT}{2M}w\frac{3}{\frac{\pi^2 D^6 M p_0^2}{4RTfL16w^2} + D} \end{aligned} \tag{36}$$

Da questa equazione si può ricavare il valore del diametro ottimo se sono note le costanti di costo. In generale, valori minori del diametro ottimo si hanno quando i costi della tubazione K_T sono maggiori rispetto ai costi di pompaggio. Valori minori del diametro corrispondono a possibili condizioni di flusso sonico. Solo se i costi della tubazione sono molto maggiori rispetto ai costi di pompaggio può essere economicamente conveniente trasportare fluido in condizioni soniche.

c.

Assumiamo che le perdite di pressione all'imbocco (1) e allo sbocco (2) siano trascurabili rispetto alle perdite di pressione lungo la linea per cui $p_A \sim p_1$ e $p_2 \sim p_B$.

1. Nel caso che le perdite per attrito siano trascurabili Bernoulli sulla linea di trasporto è dato da:

$$\frac{1}{2}dv^2 + \frac{dp}{\rho} + gdh = 0 \tag{37}$$

che può essere integrato come:

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g(h_2 - h_1) + \frac{RT}{M}\ln\frac{p_B}{p_A} = 0 \tag{38}$$

dove $v_2 = G/\rho_2$ e $v_1 = G/\rho_1$ con ρ_1 e ρ_2 ricavabili dalla pressione nei serbatoi e dalla T attraverso la legge dei gas $\rho = pM/RT$. Risulta:

$$\frac{G^2}{2}\left(\frac{RT}{M}\right)^2\left(\frac{1}{p_B^2}-\frac{1}{p_A^2}\right)+ \\ +g(h_2-h_1)+\frac{RT}{M}\ln\frac{p_B}{p_A}=0 \tag{39}$$

da cui si ricava G.

2. Nel caso che le perdite di attrito abbiano grandezza paragonabile alle perdite viscose, Bernoulli risulta:

$$\frac{1}{2}dv^2+\frac{dp}{\rho}+gdh=-2\frac{f}{D}v^2dx \tag{40}$$

É anche $dx = dh/cos\alpha$ e, poichè non si sa come varia v lungo il tubo, bisogna esprimere v attraverso G (costante lungo il tubo). Si ottiene:

$$-G^2\frac{d\rho}{\rho}+\rho dp+2\frac{f}{D}G^2dx+\rho^2gdh=0 \tag{41}$$

Sostituendo dx e dp si ricava:

$$\Big(-\frac{G^2}{\rho}+\rho\frac{RT}{M}\Big)d\rho=-\Big(\frac{2fG^2}{D\cos\alpha}+\rho^2g\Big)dh \tag{42}$$

e separando le variabili si ottiene:

$$\frac{-G^2/\rho+\rho RT/M}{2fG^2/D\cos\alpha+\rho^2g}\mathrm{d}\rho=-\mathrm{d}h$$

o, più semplicemente

$$f(\rho)\cdot d\rho=-dh \quad . \tag{43}$$

L'integrale può essere risolto scomponendo la funzione $f(\rho)$ in fattori, essendo il grado del polinomio del numeratore inferiore a quello del denominatore. L'espressione, una volta integrata, consente di esplicitare il flusso specifico G trasmesso tra i due serbatoi.

1. Per determinare la portata uscente all'istante iniziale dal pozzo, bisogna determinare i flusso specifico G. La pressione nel serbatoio è abbastanza alta da far supporre che il flusso sia sonico, tuttavia, è possibile identificare a priori il regime di flusso considerando che:

   - assumiamo che, essendo la linea lunga, la caduta di pressione tra serbatoio e inizio line a sia trascurabile rispetto a quella lungo la linea ($p_0 \simeq p_1$);
   - per trasformazioni isoterme e flusso critico, il rapporto tra le pressioni a inizio linea, p_1, e fine linea, p_2, è dato

$$\ln\frac{p_1}{p_2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right)+2f\frac{L}{D}=0 \tag{44}$$

Questa equazione può essere risolta per via iterativa se sono note le caratteristiche della linea e se si ipotizza un valore per il coefficiente f (per esempio, $f = 0.003$) assumendo:

$$\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent}=\sqrt{1+4f\frac{L}{D}} \tag{45}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent}=\sqrt{1+4f\frac{L}{D}+2\ln\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent}} \tag{46}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{III\ tent}=\sqrt{1+4f\frac{L}{D}+2\ln\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent}} \tag{47}$$

$$... \tag{48}$$

$$\tag{49}$$

che converge dopo un paio di iterazioni. Nel caso specifico, dopo 2 iterazioni, si ottiene un valore stabile:

$$\frac{p_1}{p_2}_{crit}=10.08 \tag{50}$$

da cui è possibile verificare che il flusso dal pozzo sarà sonico finché la pressione all'interno del giacimento non scende sotto $p_{0,min,crit} = 10.08\ p_{atm} = 10.08 \cdot 10^5 Pa$. Nelle condizioni iniziali è $p_0 = 25 \cdot 10^5 Pa > p_{0,min,crit}$ per cui il flusso è sonico.

Essendo il flusso sonico, il flusso specifico uscente dipende dalle condizioni che si instaurano sulla sezione di sbocco, che sono diverse da quelle dell'ambiente di sbocco e legate attraverso il rapporto critico a quelle all'interno del giacimento. Si ha:

$$G=\sqrt{p_2\rho_2}=\sqrt{\frac{M}{RT}p_2^2}=\sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 \tag{51}$$

dove si è utilizzata la legge dei gas per legare ρ_2 e p_2 all'uscita, e utilizzando il rapporto critico tra le pressioni:

$$G=\sqrt{\frac{M}{RT}}\frac{p_1}{p_2}_{crit}^{-1}p_1=K_1p_1 \tag{52}$$

Da questa si calcola $G = 635.62\ kg/m^2s$, e quindi una portata $\dot{m} = G \cdot A = 4.99\ kg/s$.

2. Si osserva che la pressione a testa pozzo a inizio svuotamento è data da:

$$p_2(0)=\frac{p_1}{p_2}_{crit}^{-1}p_1(0)=2.48\ atm \tag{53}$$

maggiore di quella a cui è sufficiente avere il gas in uscita. La valvola di regolazione a testa pozzo indurrà perdite di carico aggiuntive riducendo la pressione a fine linea da 2.48 atm al valore desiderato finché sarà necessario, cioè finché la pressione nel giacimento riuscirà a spingere la portata fissata. Il tempo di esaurimento è determinato dal valore di pressione per cui il gas arriva a testa pozzo esattamente con la pressione di $1.5 \cdot 10^5$ in assenza di laminazione (valovola di regolazione completamente aperta). Il flusso specifico convogliato utilizzando la valvola di regolazione è in valore inferiore al minimo flusso sonico, dato da:

$$G_{min,crit} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_{atm} = 256.28\ kg/s \tag{54}$$

per cui la relazione tra la pressione in testa pozzo e la pressione a fine pozzo è data da (Bernoulli isotermo lungo tubazione):

$$G^2 \ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{M}{2RT}\left(p_2^2 - p_1^2\right) + \frac{2fL}{D} G^2 = 0 \tag{55}$$

che trascurando il termine logaritmico può essere risolta per p_1 note $p_2 = 1.5\ atm$ e $G = 180\ kg/s$. Questo valore di p_1^* è quello che identifica l'esaurimento del giacimento. Ipotizzando che, a parte un trascurabile istante iniziale, la portata uscente sia regolata dalla valvola, il tempo di esaurimento si calcola come:

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi d^2}{4} G \tag{56}$$

$$\int_{p_1(0)}^{p_1^*} \mathrm{d}p_1 = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi D^2}{4} G t^* \tag{57}$$

da cui si ricava

$$t^* = \frac{4MV(p_1(0) - p_1^*)}{\pi D^2 GRT} \tag{58}$$

d.

---

1. Il bilancio di massa eseguito sul fluido contenuto nel serbatoio fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{VM}{RT}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -AG \tag{59}$$

Questa equazione deve essere integrata utilizzando per G l'espressione più adatta in base al regime di flusso (sonico o non sonico). Il valore di pressione nel serbatoio ($1\ MPa = 10\ atm$) lascia supporre che il flusso sia sonico. Tuttavia, si può identificare analiticamente se questa ipotesi è corrretta: per trasformazioni isoterme e flusso critico, il rapporto tra le pressioni a inizio linea, $p_1 \simeq p_0$, e fine linea, p_2, è dato

$$\ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \tag{60}$$

Questa equazione può essere risolta per via iterativa se sono note le caratteristiche della linea e se si ipotizza un valore per il coefficiente f (per esempio, $f = 0.003$) assumendo:

$$\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D}} \tag{61}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + 2\ln\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent}} \tag{62}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{III\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + 2\ln\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent}} \tag{63}$$

$$\ldots \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

che converge dopo un paio di iterazioni. Nel caso specifico, dopo 3 iterazioni, si ottiene un valore stabile:

$$\frac{p_1}{p_2}_{crit} = 3.97 \tag{66}$$

e indica che ci saranno condizioni di flusso somico finché la pressione nel serbatoio non scenderà a $p_1^* = 3.97 p_{atm}$. Questo valore fornisce l'estremo inferiore di integrazione per determinare la durata del flusso sonico. Per integrare l'equazione 70 bisogna trovare l'espressione per G che è :

$$G = \sqrt{p_1 \rho_1} \tag{67}$$

con p_2 e ρ_2 condizioni del gas alla sezione di sbocco, legate alle condizioni a inizio linea attraverso il rapporto critico delle pressioni,

$$G = \sqrt{\frac{M}{RT}p_2^2} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_2 = \tag{68}$$

$$= \sqrt{\frac{M}{RT}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{crit}^{-1} p_1 = K_1 p_1 \tag{69}$$

La conservazione della massa diventa:

$$\frac{VM}{RT}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = -AK_1 p_1 \tag{70}$$

che può essere integrata come:

$$\int_{p_1(0)}^{p_1^*} \frac{\mathrm{d}p_1}{p_1} = \frac{AK_1RT}{MV} t \tag{71}$$

da cui

$$t = \ln\frac{p_1(0)}{p_1^*}\frac{MV}{AK_1RT} \tag{72}$$

2. Se il serbatoio scaricasse direttamente in atmosfera, cambierebbe il flusso specifico G e la relazione tra questo e la portata all'interno del serbatoio. In particolare, ripartendo dall'equazione di Bernoulli scritta per lo svuotamento del serbatoio senza condotto, utilizzando la trasformazione isoterma per

integrare il termine $\mathrm{d}p/\rho$ e derivando rispetto a p_2, pressione allo sbocco, per indivuduare le condizioni di flusso critico si ottiene:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{crit} = \ln 2 = 0.69 \tag{73}$$

Nell'equazione di conservazione si modificano:

- l'estremo di integrazione $p_1^* = p_{atm}/0.69$
- il valore della costante K_1, che contiene il nuovo valore del rapporto critico.

e.

---

1. Per ogni tratto dii metanodotto compreso tra due stazioni di ricompressione, il punto di minima pressione è collocato a fondo linea (p_1), prima della stazione di ricompressione successiva (condizione periodica). Quindi imponiamo $p_1 = 1.2 \cdot 10^5 Pa$. La portata del gas è data come portata in volume per condizioni diverse da quelle in cui il gas fluisce nella linea ($p_{rif} = 1\ atm$) per cui è necessario ricavare la portata in massa in modo da ricostruire il flusso specifico che si mantiene costante nel tempo. La densità nelle condizioni di temperatura e pressione indicate è :

$$\rho_{rif} = \frac{p_{rif} M}{M T_{rif}} = 0.656\ kg/m^3 \tag{74}$$

per cui la portata in massa risulta $\dot{m} = 3.284\ kg/s$ e il flusso specifico $G = \dot{m}/A = 104.54\ kg/m^2 s$. Affinché questo flusso specifico si muova lungo il condotto, il compressore deve fornire l'energia necessaria a vincere le perdite di carico nel tratto 0-1. Applicando Bernoulli isotermo (non critico, non essendoci ambiente di sbocco) lungo la tubazione si ha:

$$G^2 \ln\frac{p_0}{p_1} + \frac{M}{2RT}\left(p_1^2 - p_0^2\right) + \frac{2fLG^2}{D} = 0 \tag{75}$$

dive l'unica incognita è p_0. Possiamo trascurare il primo termine (verificando a posteriori che le perdite inerziali sono molto minori delle perdite viscose, ultimo termine) e ricavare p_0:

$$p_0 = \sqrt{p_1^2 + \frac{2fLG^2}{D}\frac{2RT}{M}} \tag{76}$$

che risulta $p_0 = 10 \cdot 10^5 Pa$.

2. Per calcolare la potenza del compressore si deve determinare l'energia per unità di massa che viene fornita al fluido nel tratto 1-0. Applicando Bernoulli differenziale e le perdite viscose, rimane:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{\mathrm{d}v^2}{2} = \mathrm{d}w_s \quad \rightarrow w_s = \int_1^0 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{\mathrm{d}v^2}{2} \tag{77}$$

che può essere integrato assumendo trasformazione adiabatica tra 1 e 0 per dare:

$$\int_1^0 \frac{\mathrm{d}v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \tag{78}$$

$$\int_1^0 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) \tag{79}$$

Si può verificare che il termine cinetico è trascurabile rispetto a quello di pressione. In particolare:

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{RT} = 0.788\ kg/m^3 \tag{80}$$

$$\rho_0 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma} = 3.583\ kg/m^3 \tag{81}$$

$$v_1 = \frac{G}{\rho_1} = 132.66\ m/s \tag{82}$$

$$v_0 = \frac{G}{\rho_0} = 29.176\ m/s \tag{83}$$

per cui i due termini di prevalenza risultano:

$$w_s = -8373.72 + \frac{1.4}{0.4}\left(\frac{10 \cdot 10^5}{3.583} - \frac{1.2 \cdot 10^5}{0.788}\right) = \tag{84}$$

$$= 4.356 \cdot 10^5 \tag{85}$$

con il primo molto minore del secondo, da cui la potenza si calcola come:

$$P = w \cdot w_s = 1.43\ MW \tag{86}$$

3. In caso di rottura del tubo in prossimità della parte terminale del condotto, la pressione dovrebbe essere abbastanza prossima a quella atmosferica ($\simeq 1.2 \cdot 10^5 Pa$) per avere flusso non sonico. L'equazioni di Bernoulli scritta tra il punto 0 a valle del compressore ed il punto R di rottura diventa:

$$G_1^2 \ln\frac{p_0}{p_R} + \frac{M}{2RT}\left(p_R^2 - p_0^2\right) + 2f\frac{L_1}{D}G_1^2 = 0 \tag{87}$$

tra il punto di rtottura e a presa di monte del compressore diventa:

$$G_2^2 \ln\frac{p_R}{p_1} + \frac{M}{2RT}\left(p_1^2 - p_R^2\right) + 2f\frac{L_2}{D}G_2^2 = 0 \tag{88}$$

e la conservazione della massa scritta in corrispondenza del punto di rottura dà :

$$G_1^2 D^2 = G_2^2 D^2 + A G_R \tag{89}$$

La portata uscente dal foro è data da Bernoulli isotermo scritto tra il punto interno al tubo prossimo alla rottura e l'ambiente esterno:

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{2} + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0 \tag{90}$$

$$\frac{v_{out}^2}{2} + \frac{RT}{M}\ln\frac{p_{atm}}{p_R} = 0 \tag{91}$$

$$\rightarrow \quad v_{out} = \sqrt{\frac{2RT}{M}\ln\frac{p_{atm}}{p_R}} \tag{92}$$

Questo sistema di 4 equazioni in 4 incognite può essere risolto in modo semplificato assumendo che il flusso lungo la tubazione prima (G_1) e dopo (G_2) la rottura non vari sostanzialmente per effetto dell'uscita dal foro di rottura (ipotesi plausibile essendo la sezione della rottura, 10 cm^2, molto inferiore alla sezione del tubo, 314 cm^2). Assumendo quindi $G_1 = G_2 = 104.54\ kg/s$ si ricava: $p_R = 1.471 \cdot 10^5 Pa$, $v_{out} = 342.8\ m/s$ (minore della velocità del suono a condizioni atmosferiche, 390 m/s) e una portata in massa uscente pari a $w_{out} =$
$rho_{atm} v_{out} A = 0.225\ kg/s$ che rappresenta circa il 6% della portata trasferita.

f.

---

1. Assumiamo che, essendo tubo lungo, la perdita di carico tra serbatoio e inizio linea sia trascurabile rispetto alla perdita di carico lungo la linea, per cui $p_0 - p_1 << p_1 - p_2 \quad \rightarrow p_0 \simeq p_1$. Per determinare se le condizioni di efflusso sono soniche o non soniche, calcoliamo il rapporto criticoo delle pressioni (da Bernoulli isotermo critico lungo la tubazione). Si ha:

$$\ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \tag{93}$$

che per tentativi fornisce $(p_1/p_2)_{crit} = 5.32$. In condizioni di deflusso minimo critico, la pressione di sbocco è $p_2 = p_{atm}$ a cui corrispondono nel serbatoio $p_1 = (p_1/p_2)_{crit} p_{atm} = 5.32 \cdot 10^5 Pa$. Il deflusso da serbatoio si manterrà critico fiché la pressione nel serbatoio rimarrà supieriore a questo valore. In condizioni iniziali, $p_1 = 8 \cdot 10^5 Pa$ per cui il flusso è sonico. Il flusso specifico uscente all'istante iniziale è :

$$G = \sqrt{p_2 \rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_2 = \tag{94}$$

$$= \sqrt{\frac{M}{RT}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}_{crit} p_1 = 382.14\ kg/m^2 s \tag{95}$$

2. La durata della fase di efflusso sonico corrisponde al tempo necessario affinché la pressione nel serbatoio scenda da 8 a 5.32 atm. Il bilancio di massa sul serbatoio fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -AG \tag{96}$$

dove G è sonico per cui il bilancio diventa:

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi D^2}{4} k p_0 \tag{97}$$

con $k = 4.777 \cdot 10^{-4}$. Separando le variabili e integrando tra 8 a 5.32 atm il temine di pressione si ottiene:

$$\int_8^{5.32} \frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi D^2}{4} k t^* \tag{98}$$

$$\rightarrow \quad t^* = \frac{MV}{RT}\frac{4}{\pi D^2 k} \ln \frac{8}{5.32} = 28\ s \tag{99}$$

3. La massa di gas uscita in questo tempo si pucò calcolare in 2 modi:
   (a) Integrando nel tempo l'espressione di $G = f(p_0(t))$, procedura complessa, oppure
   (b) considerando la variazione di stato nel serbatoio tra istante iniziale e finale. La massa nel serbatoio è infatti $m = M \cdot n$ dove n è il numero di moli presenti e per la legge dei gas $n = pV/RT$. Poiché conosciamo le pressioni a inizio e fine fase critica, possiamo ricavare il numero di moli corrispondente e calcolare la variazione in massa come:

$$\Delta m = m(0) - m(t^*) = M(n(0) - n(t^*)) = \tag{100}$$

$$= \frac{MV}{RT}(p_0 - p_0^*) = 17.307\ kg \tag{101}$$

g.

---

1. Il bilancio di massa sul serbatoio risulta:

$$\frac{MV}{RT}\frac{dp_0}{dt} = -w_{out} + w_{in} = -G_{out}A + G_{in}A \tag{102}$$

dove w_{out} e w_{in} sono le portate in massa uscenti ed entranti. Per condizioni di funzionamento a stazionario ($\mathrm{d}p_0 \mathrm{d}t = 0$) si semplifica in $w_{out} = w_{in}$ e $p_0 =$ cost. Dai dati del problema, il flusso specifico uscente risulta:

$$G_{out} = \frac{4w_{in}}{\pi D^2} = 318\ kg/m^2 s \tag{103}$$

che può essere confrontato con il valore di flusso critico minimo per capire se siamo o meno in condizioni di deflusso sonico. Il flusso minimo critico è :

$$G_{min,crit} = \sqrt{p_2 \rho_2} \tag{104}$$

con p_2 e ρ_2 condizioni dell'ambiente di sbocco (minimo critico), per cui risulta:

$$G_{min,crit} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_{atm} = 254\ kg/m^2 s \tag{105}$$

Poiché è $G_{out} > G_{min,crit}$ il flusso lungo il tubo è sonico. La pressione di sbocco sarà maggiore della pressione atmosferica e per trasferire esattamente G_{out} deve essere:

$$G_{out} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_2 \rightarrow \quad p_2 = 1.25 \cdot 10^5 Pa \tag{106}$$

La pressione nel serbatoio è legata alla pressione allo sbocco attraverso il Bernoulli isotermo critico:

$$\ln\frac{p_1}{p_2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right)+2f\frac{L}{D}=0 \tag{107}$$

che per i dati del problema permette di calcolare un rapporto critico delle pressioni pari a $(p_1/p_2)_{crit} = 10$. La pressione del serbatoio a stazionario sarà quindi pari a $p_0 \simeq p_1 = (p_1/p_2)_{crit}p_2 = 12.5 \cdot 10^5 Pa$.

2. Se il serbatoio continua ad essere alimentato senza scaricare lungo la linea, la conservazione della massa si modifica in:

$$\frac{MV}{RT}\frac{dp_0}{dt}=+w_{in} \tag{108}$$

con w_{in} = cost. L'andamento della pressione può essere integrato per dare:

$$p_0(t)=p_0(0)+\frac{RT}{MV}+w_{in}t \tag{109}$$

da cui si ricava t^* per cui la pressione raggiunge le 25 atm:

$$t^*=\frac{p_0(t^*)-p_0(0)MV}{RTw_{in}}=3229\ s\simeq 54\ min \tag{110}$$

3. la portata specifica di gas uscente dalla valvola si calcola considerando efflusso isotermo critico da serbatoio: il rapporto critico tra le pressioni dentro il serbatoio e allo sbocco è

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)_{crit}=e^{1/2}=1/0.606 \tag{111}$$

la pressione allo sbocco risulta

$$p_1=\left(\frac{p_0}{p_1}\right)_{crit}=25\cdot 10^5\cdot 0.606=15.16\cdot 10^5 Pa \tag{112}$$

e il flusso specificio uscente è

$$G_{crit}=\sqrt{\frac{M}{RT}}p_1=3852\ kg/m^2s \tag{113}$$