Soluzione Esercizi Trasporto Fluidi Incomprimibili

a.

1. La pressione in B vale:

$$p_B = \rho g h + p_A \tag{1}$$

e dall'equazione di Bernoulli avremo:

$$p_B - p_D = 2\rho v^2 f \frac{L_{B_D}}{D} \tag{2}$$

da questa posso ricavare f:

$$f = \frac{(p_B - p_D)D}{2\rho v^2 L_{B-D}} \tag{3}$$

e posto

$$\frac{(p_B - p_D)D}{2\rho L_{B-D}} = F^2 \tag{4}$$

la 3 diventa

$$\sqrt{f} = \frac{F}{v} \tag{5}$$

con F dato da

$$F = \sqrt{\frac{(p_B - p_D)D}{2\rho L_{B_D}}} = 0.04757\ m/s \tag{6}$$

Inserendo questa espressione all'interno della formula di Colebrook $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.28 - 1.7 \ln\left[\frac{k}{D} + \frac{4.67}{Re\sqrt{f}}\right]$ otteniamo:

$$v = A\Big[2.28 - 1.7 \ln\Big(\frac{k}{D} + \frac{4.67 v\nu}{vDA}\Big)\Big] = 0.71 m/s \tag{7}$$

Avendo trovato la velocità possiamo calcolare la portata che vale $Q = 0.0223\ m^3/s$

2. Calcoliamo le perdite di carico tra C e D:

$$p_C = p_D + 2\rho v^2 f \frac{L_{C-D}}{D} \tag{8}$$

La velocità con cui si muove il fluido vale $v = 1.42\ m/s$, il fattore d'attrito è pari a $f = 0.004$ essendo Reynolds pari a $Re = 2.84 \cdot 10^5$. Sostituendo questi valori nell'espressione delle perdite di carico otteniamo:

$$p_C = 1 \cdot 10^5 + 2\rho v^2 f \frac{L_{C-D}}{D} = 3.43 \cdot 10^5 Pa \tag{9}$$

La differenza di pressione tra B e C vale:

$$p_B - p_C = 4.7 \cdot 10^4 > 0 \tag{10}$$

essendo $p_B = 3.9 \cdot 10^5$, per cui risulta che il fluido scorre da B verso C.

3. La velocità del fluido vale:

$$v = F\Big[2.28 - 1.7 \ln\Big(\frac{k}{D} + \frac{4.67\nu}{DF}\Big)\Big] \tag{11}$$

dove F ora è pari a:

$$F = \Big[\frac{(p_B - p_D)D}{2\rho L_{B_D}}\Big]^{1/2} = 0.0225 \tag{12}$$

per cui $v = 0.31 m/s$. La velocità nel ramo B-C sarà pari a:

$$v = 1.41 - 0.31 = 1.11\ m/s \tag{13}$$

Nota v determino la portata Q:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v = 3.487 \cdot 10^{-2} m^3/s \tag{14}$$

La potenza della pompa è data da

$$Pot = Q\Big[2\rho v^2 f \frac{L_{C-D}}{D}(p_B - p_C)\Big] \tag{15}$$

con f pari a 0.0042 essendo Reynolds pari a $2.22 \cdot 10^5$. La potenza da fornire alla pompa vale $16.4\ kW$.

b.

1. Applicando Bernoulli tra i punti A e B otteniamo:

$$p_A + g\rho h_A = p_B + 2\rho v^2 f \frac{L_{A,B}}{D} \tag{16}$$

Dove $p_A = p_B = p_{atm}$. Il valore di f viene calcolato iterativamente mediante la formula di Colebrook trovando che è uguale a $f = 0.00536$. Pertanto la poratat risulta essere ricavata da:

$$Q = \frac{\pi D^2 v}{4} = 5.3 \cdot 10^{-3} m^3/s \tag{17}$$

2. Applicando la continuità al nodo N abbiamo:

$$v_{A,N} = v_{N,B} + v_{N,C} \tag{18}$$

Utilizzando Bernoulli tra A e B:

$$g h_A = 2 v_{AN}^2 f \frac{L_{A,N}}{D} + 2 v_{NB}^2 f \frac{L_{N,B}}{D} \tag{19}$$

Mentre Bernoulli tra B e C:

$$2v_{NC}^2 f\frac{L_{NC}}{D} = 2v_{NB}^2 f\frac{L_{N,B}}{D} \tag{20}$$

Risolvendo il sistema costituito dalle tre equazioni scritte in precedenza si ottiene:

$$v_{NB} = \sqrt{\frac{gh_A D}{2f(L_{AN}2.58^2 + L_{NB})}} = 0.346m/s \tag{21}$$

$$v_{NC} = 0.546m/s \tag{22}$$

$$v_{AN} = 0.892m/s \tag{23}$$

Le portate risultano:

$$Q_{NB} = 2.7210^{-3}m^3/s \tag{24}$$

$$Q_{NC} = 4.2910^{-3}m^3/s \tag{25}$$

3. Applicando Bernoulli tra N e B e conoscendo la portata ricaviamo la pressione:

$$p_N = p_B + \rho v_{NB}^2(2f\frac{L_{N,B}}{D} - 0.5) = 1.22610^5 Pa \tag{26}$$

Da Bernoulli tra N e C e dalla formula di Colebrook, si ricava mediante iterazione il valore della velocità $v_{NC} = 1.06m/s$. Utilizzando l'espressione della continuità applicata al nodo A si ottiene la velocità $v_{AN} = 1.74m/s$. Per ricavare la potenza necessaria determiniamo il lavoro:

$$\omega_s = (p_N - p_A)/\rho - gh_A +$$

$$+2v_{AN}^2 f\frac{L_{A,N}}{D} = 112.76m^2/s^2 \tag{27}$$

Infine :

$$P = \omega_s \cdot \omega = 1.71kW \tag{28}$$

c.

-ALTERNATIVA 1 Applicando Bernoulli tra A e I:

$$gh_A = v^2 2f\frac{L}{D} \tag{29}$$

Per f viene utilizzata la formula di Blasius:

$$f = 0.079Re^{-0.25} \tag{30}$$

Mettendo in sistema le due equazioini appenma trovate si ottiene il valore del diametro $D = 0.335m$. I costi relativi a questa alternativa sono:

$$C_T = K_T DL = 335milioni \tag{31}$$

-ALTERNATIVA 2
In tal caso verrà applicato Bernoulli tra S e I:

$$\omega_s = v^2 2f\frac{L}{D} \tag{32}$$

con f ottenuto con la stesa modalità di prima. Perciò la potenza sarà uguale a:

$$P = 6.78 \cdot D^{-4,75} \tag{33}$$

Per i costi abbiamo:

$$C_T = K_T DL + P(\frac{K_P + K_E NH}{10^3}) \tag{34}$$

Minimizzando rispetto a D tale espressione si trova il diametro ottimo:

$$D_{ott} = 0.337m. \tag{35}$$

che corrispoonde ad un diametro commerciale di $D_{comm} = 0.35m$. I costi totali per questa alternativa sono 102 milioni.

Quindi tale alternativa risulta essre la più conveniente tra le due.

d.

1. Per determinare il diametro ottimo calcoliamo:

$$P = \Delta p Q \tag{36}$$

$$\Delta p = 2f\rho v^2 L/D \tag{37}$$

$$f = 0.079Re^{-0.25} \tag{38}$$

Sostituendo opportunamente si otterrà :

$$P = 75.14D^{-4.75} \tag{39}$$

Dall'equazione 7.12 del testo si deriva il costo totale rispetto al diametro ottenendo per il diametro ottimo $D = 0.27\ m$.

2. ALTERNATIVA 1:
Installare una nuova tubazione che sostituisca la precedente. Il diametro del nuovo condotto viene scelto in modo da minimizzare i costi totali dell'impianto. Tali costi sono attribuibili ai normali costi di esercizio e all'acquisto deille tubazioni che formano la nuova linea. Tutte queste quantità possono essere ricavate in funzione del diametro dei condotti.

$$P = \Delta p Q = \Delta p 2Q \tag{40}$$

Mantenendo la medesima potenza si ricava dalla formula precedente il nuovo diametro che risulta essere uguale a 0.4 m. Cosıfacendo ci si può ricalcolare dalla 7.12 del testo il costo totale che è pari a 620 milioni di lire.
ALTERNATIVA 2
Installare una nuona pompa nella linea esistente. Per calcolare la potenza necessaria per convogliare il nuovo valore di portata si segue una procedura simile al primo punto, utilizando i valori:

$$v' = 2v \tag{41}$$

$$Re' = 2Re \tag{42}$$

da cui si calcola

$$f' = 0.079Re'^{-0.25} \tag{43}$$

Si ottiene per le perdite distribuite, le uniche che variano con la portata, il nuovo valore:

$$\Delta p_L \tag{44}$$

Cosıotteniamo la prevalenza totale richiesta alla pompa Δp_{tot} a cui corrisponde una potenza:

$$P' = \Delta p_{tot} Q' \tag{45}$$

I costi associati a questa alternativa sono dati dalla somma del costo della nuova pompa da installare (C_p) e dai costi di esercizio (C_e). Il costo totale in questo caso risulterebbe uguale a 530 milioni di lire.
ALTERNATIVA 3
Costruire una seconda linea parallela. In questo caso abbiamo che si dovrà realizzare un impianto identico a quello analizzato al punto 1 e quindi con la stessa pompa e le stesse tubazioni. Otteniamo per questa alternativa un costo di 442 milioni di lire e quindi questa risulterà l'alternativa più conveniente.

e. ______________________________________

1. Le perdite di carico sono date da:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 2f\frac{L}{D}v^2 \tag{46}$$

La velocità può essere espressa in funzione della portata, nota,

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} \tag{47}$$

così come il coefficiente d'attrito

$$f = 0.079 \cdot Re^{-0.25} \tag{48}$$

essendo Reynolds funzione della portata

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \tag{49}$$

La potenza risulta pari a

$$\begin{aligned} P = \frac{\Delta p}{\rho} \cdot \rho Q = 2 \cdot 0.079 \Big(\frac{4Q}{\pi \nu}\Big)^{-0.25} \cdot L \\ \cdot \Big(\frac{4Q}{\pi}\Big)^2 \cdot \rho \cdot Q \cdot D^{-4.75} = \\ = K \cdot D^{-4.75} = \\ = 2.58 \cdot 10^8 D^{-4.75} \end{aligned}$$

L'equazione dei costi totali è la seguente

$$C_{TOT}(D) = K_T \cdot D \cdot L + \frac{K_P + K_E \cdot N \cdot H}{10^3} \cdot P \tag{50}$$

Per determinare il diametro ottimo deriviamo, i costi rispetto al diametro ed uguagliamo a zero

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{TOT}}{\partial D} = 0 \Rightarrow \\ D_{opt} = \Big(\frac{K_T \cdot L}{4.75 \cdot K \cdot K_1}\Big)^{\frac{1}{-5.75}} = 1.80\ m \end{aligned} \tag{51}$$

2. Nel caso venga aggiunto il polimero l'espressione del coefficiente di attrito risulta:

$$f = 0.1 \cdot C^{\alpha} \cdot Re^{-0.5} \tag{52}$$

e la potenza è quindi funzione del diametro della tubazione e della concentrazione del polimero:

$$\begin{aligned} P(D, C) = 2 \cdot f\frac{L}{D}v^2 \cdot \rho \cdot Q = \\ = K_{new} \cdot D^{-4.5} \cdot C^{\alpha} \end{aligned}$$

I costi totali in questo caso sono dati dai costi della tubazione, da quelli di installazione ed esercizio della pompa e dal costo del polimero che deve essere aggiunto al greggio (proporzionale alla massa utilizzata):

$$\begin{aligned} C_{TOT}(D, C) = K_T \cdot L \cdot D + \\ K_{costi} \cdot P + \\ K_{Pol} \cdot (3600 \cdot Q \cdot N \cdot H \cdot \rho) \cdot C \end{aligned} \tag{53}$$

Il minimo della funzione si determina imponendo che le derivate rispetto ad entrambe le variabili indipendenti siano nulle:

$$\frac{\partial C_{TOT}}{\partial D} = 0 \text{ e } \frac{\partial C_{TOT}}{\partial C} = 0 \tag{54}$$

da cui si ricavano

$$\frac{\partial C_{TOT}}{\partial D} = K_T \cdot L + K_{costi} \cdot \frac{\partial P}{\partial D} = 0$$
$$C^\alpha \cdot D^{-5.5} = \frac{K_T \cdot L}{4.5 \cdot K_{costi} \cdot K_{new}} \tag{55}$$

$$\frac{\partial C_{TOT}}{\partial C} = K_{costi} \cdot \frac{\partial P}{\partial C} + K_{Pol} \cdot mg = 0$$
$$C^{\alpha-1} \cdot D^{-4.5} = -\frac{K_P \cdot mg}{K_{costi} \cdot K_{new} \cdot \alpha} \tag{56}$$

Queste due equazioni costituiscono un sistema che può essere risolto per sostituzione di variabili. Facendo il rapporto tra la 55 la 56 si ottiene

$$K_F = \frac{C}{D} = -\frac{K_T \cdot L}{4.5 \cdot K_{Pol} \cdot mg} \tag{57}$$
$$\text{da cui} C = K_F \cdot D \tag{58}$$

Sostituendo nella 55 otteniamo

$$D_{opt} = \Big(\frac{K_T \cdot L}{4.5 \cdot K_{costi} \cdot K_{new} \cdot K_F^\alpha}\Big)^{\frac{1}{-5.5+\alpha}} = 1.78\ m \tag{59}$$

Il valore di concentrazione del polimero risulta dalla$C = 2.6494 \cdot 10^{-7}$ dalla 57.

f.

---

1. Applicando Bernoulli tra A e B avremo

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + w_s = \frac{p_{atm}}{\rho} + gh_B + 2f\frac{L_{AB}}{D} \cdot v^2 \tag{60}$$

con

$$w_s = \frac{P}{w} = \frac{4P}{\rho\pi D^2 v} = \frac{K}{v} \tag{61}$$
$$\tag{62}$$

e

$$f = 0.079 \cdot Re^{-0.25} =$$
$$0.079 \cdot \Big(\frac{\rho D}{\mu}\Big)^{-0.25} \cdot v^{-0.25} = K_1 \cdot v^{-0.25} \tag{63}$$

con K_1

$$K_1 = 0.079\Big(\frac{10^3 \cdot 0.1}{10^{-3}}\Big)^{-0.25} \cdot 10^5 =$$
$$= 7.9 \cdot 10^{-4} \tag{64}$$
$$\tag{65}$$

L'equazione di Bernoulli risulta in funzione della sola velocità

$$K_A \cdot v^{1.75} - \frac{K}{v} + gh_B = 0 \tag{66}$$

con

$$K_A = 2K_1 \cdot \frac{L_{AB}}{D} = 15.8 \tag{67}$$

Risolvendo per tentativi la 66 si ricava $v = 0.78 m/s$ e quindi la portata sarà $Q = 6.12 \cdot 10^{-3} m^3/s$

2. Indichiamo rispettivamente con 1 e 2 i punti in cui i condotti dal serbatoio A e B raggiungono il parallelo. Le velocità nei tratti 1-A e B-1 sono uguali e valgono

$$v_A = v_B = \frac{4Q}{\pi d^2} = 0.637\ m/s \tag{68}$$

visto che è data la portata che va da B ad A. Applicando Bernoulli tra il punto B e il punto 2 avremo:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh_B = \frac{p_2}{\rho} + 2f\frac{L_{B2}}{D} \cdot v_B^2 \tag{69}$$

Il coefficiente d'attrito in questo tratto è pari a $f = 0.005$. La pressione nel punto 2 risulta

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h_B - 2f\frac{L_{B2}}{D} \cdot v_B^2 \rho =$$
$$2.399 \cdot 10^5\ Pa \tag{70}$$

Applicando Bernoulli tra 1 e A si ha

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} + 2f\frac{L}{D} \cdot v_A^2 \tag{71}$$

da cui si ricava una pressione pari a $p_1 = 1.081 \cdot 10^5\ Pa$. Per il tratto di parallelocon la pompa, l'equazione di Bernoulli è

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{P}{w} = \frac{p_2}{\rho} + 2f\frac{L}{D} \cdot v_{sup}^2 \tag{72}$$

Sostituendo i valori noti, si ricava con

$$w = \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_{sup} \tag{73}$$

la velocità $v_{sup} = 0.88\ m/s$, con un coefficiente d'attrito pari a

$$f = 0.079 \cdot \Big(\frac{\rho D}{\mu}\Big)^{-0.25} \cdot v_{sup}^{-0.25} \tag{74}$$

La velocità nel tratto inferiore del parallelo (da 2 a 1) sarà pari a

$$v_{inf} = v_{sup} + v_A = 0.88 + 0.637 =$$
$$= 1.517\ m/s \tag{75}$$

Note le pressioni p_1 e p_2 ai capi del parallelo e la velocità del ramo è possibile calcolare L_{TOT} lunghezza totale corrispondente alle perdite distribuite ($L = 600$) e concentrate (L_{eq}). Risulta

$$L_{TOT} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \cdot \frac{D}{2fv_{inf}^2} = 4877.7\ m \tag{76}$$

da cui

$$L_{eq} = L_{TOT} - 600 = 4277.7\ m \tag{77}$$

Sapendo che L_{eq} è definito come

$$L_{eq} = 7500(1 - \alpha) \tag{78}$$

il grado di apertura α risulta pari a $\alpha = 0.430$.