Soluzione Homework N^o 8

a.

---

1. Il rapporto geometrico della pompa a getto è pari a:

$$\lambda = \frac{D_A}{D_B} = 0.5 \qquad (1)$$

e la velocità del fluido A è

$$v_j = \frac{4w_A}{\rho\pi(\lambda D)^2} = 21.2 m/s \qquad (2)$$

Applicando Bernoulli per il fluido A tra il pozzo sottomarino (A) e l'aspirazione (1) si ha, in assenza di perdite:

$$(B_{A-1}) \quad \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \qquad (3)$$

con $v_A = 0$ e $v_1 = v_j$. Si trova:

$$p_1 = p_A - \frac{\rho v_j^2}{2} = 2.815 \cdot 10^5 Pa \qquad (4)$$

Siccome p_1 è uniforme su tutta la sezione, applico Bernoulli per il fluido B tra il secondo pozzo (B) e l'aspirazione (1) e determino v_s (velocità del fluido da trasportare):

$$(B_{B-1}) \quad \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \qquad (5)$$

$$v_s = v_B = \sqrt{\frac{2(p_B - p_1)}{\rho}} = 7.02 \ m/s \qquad (6)$$

Risulta $v_B << v_A$, mentre per la portata di fluido B che è possibile trasmettere utilizzando il fluido A si ottiene:

$$w_B = v_s \cdot \rho \cdot \frac{\pi(D_B^2 - D_A^2)}{4} = 80 \ kg/s \qquad (7)$$

Utilizzando l'equazione della pompa a getto è possibile determinare la velocià media nelle sezioni 1 e 2 della pompa:

$$< v_1 >=< v_2 >= \lambda^2 v_j + (1-\lambda^2)v_s = 10.63 \ m/s \qquad (8)$$

e la prevalenza della pompa (cioè il recupero di pressione dovuto al mescolamento delle correnti)

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho\lambda^2(1-\lambda^2)(v_j^2 - v_s^2) = 0.279 \cdot 10^5 Pa \qquad (9)$$

da cui risulta $p_2 = 3.09 \cdot 10^5 Pa$. Tra le sezioni 2 e 3, l'allargamento della sezione produce una diminuzione della velocità e quindi un recupero di pressione. Dall'equazione di continuità :

$$v_2 A_2 = v_3 A_3 \rightarrow v_3 = 1.7 m/s \qquad (10)$$

Applicando Bernoulli tra la sezione 2 e la sezione 3 si determina la pressione a valle dell'allargamento, tenendo conto che le perdite viscose (dovute appunto all'allargamento) possono essere espresse come:

$$l_v = \frac{v_3^2}{2} \cdot (\frac{A_3}{A_2} - 1)^2 \qquad (11)$$

$$(B_{2-3}) \quad \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + l_v \qquad (12)$$

Si trova:

$$\frac{p_3 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_3^2) - \frac{v_3^2}{2} \cdot (\frac{A_3}{A_2} - 1)^2 \qquad (13)$$

Si ricava $p_3 = 3.25 \cdot 10^5 Pa$ che rappresenta la pressione in testa alla linea.

2. Le perdite lungo la linea sono date da

$$l_v = 2f\frac{L}{D}v_4^2 \qquad (14)$$

e Bernoulli tra la sezione 3 (inizio della linea) e la sezione 4 (fine della linea) fornisce

$$\frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} = \frac{v_4^2}{2} + \frac{p_4}{\rho} + l_v + gh_4 \qquad (15)$$

$$(16)$$

con $v_3 = v_4$ per continuità . Risulta:

$$p_3 - p_4 = \Delta p = \rho g h_4 + 2f\rho\frac{L}{D}v_4^2 \qquad (17)$$

Il coefficiente d'attrito f dipende dal regime del moto. Essendo:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 17000 > 2100 \qquad (18)$$

il moto è turbolento: è possibile utilizzare la relazione di Blasius per tubi lisci ottenendo $f = 0.079 Re^{-0.25} = 9.35 \cdot 10^{-3}$, e quindi per la variazione di pressione $\Delta p = 2.35 \cdot 10^5 + 0.84 \cdot = 3.19 \cdot 10^5$.

☺ marchioli@uniud.it

b.

(a) Se trascuriamo le perdite di carico ($L_{AB} \simeq 0$), la pressione in B vale:

$$(B_{A-B})\frac{1}{2}v_A^2 + \frac{p_A}{\rho} + gh_A = \frac{1}{2}v_B^2 + \frac{p_B}{\rho} + gh_B \quad (19)$$

con $v_a = v_B$ per continuità . Risulta:

$$p_B = \rho g(h_A - h_B) + p_A = \rho gh + p_A \quad (20)$$

e dall'equazione di Bernoulli fra B e D avremo:

$$(B_{B-D}) \;\; p_B - p_D = 2\rho v^2 f\frac{L_{B_D}}{D} \quad (21)$$

Dall'equazione 21 posso ricavare f:

$$f = \frac{(p_B - p_D)D}{2\rho v^2 L_{B-D}} = \frac{F^2}{v^2} \quad (22)$$

dove

$$F^2 = \frac{(p_B - p_D)D}{2\rho L_{B-D}} \quad (23)$$

la 22 diventa:

$$\sqrt{f} = \frac{F}{v} \quad (24)$$

$$\rightarrow \;\; \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{v}{F} \quad (25)$$

Inserendo questa espressione all'interno della formula di Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.28 - 1.7\ln\left[\frac{k}{D} + \frac{4.67}{Re\sqrt{f}}\right]$$

con $Re = vD/\nu$. Otteniamo:

$$v = F\Big[2.28 - 1.7\ln\Big(\frac{k}{D} + \frac{4.67v\nu}{vDF}\Big)\Big] = 0.71\frac{m}{s}. \quad (26)$$

Avendo trovato la velocità possiamo calcolare la portata che vale $Q = 0.0223\ m^3/s$

(b) Calcoliamo le perdite di carico tra C e D:

$$p_C = p_D + 2\rho v^2 f\frac{L_{C-D}}{D} \quad (27)$$

con $p_D = p_{atm}$. Poichè la portata in D raddoppia, la velocità con cui si muove il fluido vale $v = 1.42\ m/s$. Il fattore d'attrito è pari a $f = 0.004$ essendo Reynolds pari a $Re = 2.84 \cdot 10^5$. Sostituendo questi valori nell'espressione delle perdite di carico otteniamo:

$$p_C = 1 \cdot 10^5 + 2\rho v^2 f\frac{L_{C-D}}{D} = 3.43 \cdot 10^5 Pa \quad (28)$$

La differenza di pressione tra B e C vale:

$$p_B - p_C = 4.7 \cdot 10^4 > 0 \quad (29)$$

essendo $p_B = 3.9 \cdot 10^5$, per cui risulta che il fluido scorre da B verso C.

(c) La velocità del fluido nel ramo B-C senza la pompa vale:

$$v = F\Big[2.28 - 1.7\ln\Big(\frac{k}{D} + \frac{4.67\nu}{DF}\Big)\Big] \quad (30)$$

dove F ora è pari a:

$$F = \Big[\frac{(p_B - p_C)D}{2\rho L_{B-C}}\Big]^{1/2} = 0.0225 \quad (31)$$

per cui $v = 0.31 m/s$. La velocità nel ramo B-C con la pompa per la continuità al nodo B sarà pari a:

$$v = 1.42 - 0.31 = 1.11\ m/s \quad (32)$$

Nota v determino la portata Q:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}v = 3.487 \cdot 10^{-2} m^3/s \quad (33)$$

La potenza della pompa è data da

$$Pot = \rho Q \cdot w_s =$$

$$\rho Q\Big[2\rho v^2 f\frac{L_{C-B}}{D} - (p_B - p_C)\Big] = 16.4\ kW \quad (34)$$

con f pari a 0.0042 essendo Reynolds pari a $2.22 \cdot 10^5$. La potenza da fornire alla pompa vale 16.4 kW.

c.

(a) Applicando Bernoulli tra i punti A e B otteniamo:

$$\frac{1}{2}v_A^2 + p_A + g\rho h_A =$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 + p_B + g\rho h_B + 2\rho v^2 f\frac{L_{A,B}}{D} \quad (35)$$

I termini cinetici spariscono perchè $v_A = v_B = 0$, i termini di pressione spariscono perchè $p_A = p_B = p_{atm}$. Si trova:

$$v = \sqrt{\frac{g\Delta hD}{2fL}} = 0.676 m/s. \quad (36)$$

Dove $p_A = p_B = p_{atm}$. Il valore di f viene calcolato iterativamente mediante la formula di Colebrook trovando che è uguale a $f = 0.00536$. Pertanto la portata risulta essere:

$$Q = \frac{\pi D^2 v}{4} = 5.3 \cdot 10^{-3} m^3/s \quad (37)$$

(b) Applicando la continuità al nodo N abbiamo:

$$v_{A,N} = v_{N,B} + v_{N,C} \tag{38}$$

essendo costante il diametro della condotta. Utilizzando Bernoulli tra A e B:

$$gh_A = 2v_{AN}^2 f \frac{L_{A,N}}{D} + 2v_{NB}^2 f \frac{L_{N,B}}{D} \tag{39}$$

Mentre Bernoulli tra B e C:

$$2v_{NC}^2 f \frac{L_{NC}}{D} = 2v_{NB}^2 f \frac{L_{N,B}}{D} \tag{40}$$

Per trovare le tre incognite $v_{A,N}, v_{N,B}, v_{N,C}$ basta risolvere il sistema costituito dalle tre equazioni scritte in precedenza. Si ottiene:

$$v_{NB} = \sqrt{\frac{gh_A D}{2f(L_{AN} 2.58^2 + L_{NB})}} = 0.346 m/s \tag{41}$$

$$v_{NC} = 0.546 m/s \tag{42}$$

$$v_{AN} = 0.892 m/s \tag{43}$$

Le portate risultano:

$$Q_{NB} = 2.72 10^{-3} m^3/s \tag{44}$$

$$Q_{NC} = 4.29 10^{-3} m^3/s \tag{45}$$

(c) Deve essere $Q_{NB} = 5.3 \cdot 10^{-3} m^3/s$ ossia $v_{NB} = 0.676 m/s$. Applicando Bernoulli tra N e B e conoscendo la portata ricaviamo la pressione:

$$\frac{1}{2}v_N^2 + gh_N + \frac{p_N}{\rho} = \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B + \frac{p_B}{\rho} + lv_{NB} \tag{46}$$

Essendo $v_N = v_{NB}$, $v_B = 0$, $h_N = h_B$ e $p_B = p_{atm}$ si trova:

$$p_N = p_B + \rho v_{NB}^2 (2f \frac{L_{N,B}}{D} - 0.5) = = 1.226 10^5 Pa \tag{47}$$

Da Bernoulli tra N e C e dalla formula di Colebrook, si ricava mediante iterazione il valore della velocità $v_{NC} = 1.06 m/s$. Utilizzando l'espressione della continuità applicata al nodo A si ottiene la velocità $v_{AN} = 1.736 m/s$. Per ricavare la potenza necessaria determiniamo la prevalenza applicando Bernoulli tra A ed N:

$$w_s = (p_N - p_A)/\rho - gh_A + \frac{1}{2}v_{AN}^2 + +2v_{AN}^2 f \frac{L_{A,N}}{D} = 139.6 m^2/s^2 \tag{48}$$

Infine :

$$P = w_s \cdot w = 1.9 kW \tag{49}$$

d.

(a) Per determinare la potenza minima della pompa che consente di realizzare il trasporto si devono considerare due cose:

i. si devono vincere le perdite di carico lungo la linae da A a B;
ii. lungo il percorso si ha una notevole variazione di quota, per cui la pressione potrebbe localmente diventare più bassa della tensione di vapore del fluido producendo cavitazione.

L'equazione di Bernoulli tra il punto A e il punto H ad altezza massima fornisce:

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gh_A + \frac{p_A}{\rho} = \frac{1}{2}v_H^2 + gh_H + \frac{p_H}{\rho} + lv_{A-H} \tag{50}$$

$$w_s = \frac{p_H - p_{atm}}{\rho} + gh_H + 2fv^2 \frac{L}{D} \tag{51}$$

con $L = 20\ km$ e trascurando i termini cinetici non nulli. La velocità nel tubo è nota ($v = 4w/\rho\pi D^2 = 1.27\ m/s$) e si può calcolare il fattore di attrito utilizzando la formula di Blasius per tubi lisci, $f = 0.079 Re^{-0.25} = 2.96 \cdot 10^{-3}$ con $Re = \rho v D/\mu = 508000$. In H, punto di minima pressione, imponiamo $p_H = p_{min} = 1.1 \cdot 10^5 Pa$. La prevalenza della pompa che consente di arrivare in H senza scendere al di sotto del valore minimo imposto per la pressione risulta $w_s = 3.3371 \cdot 10^3 m^2/s^2$. Verifichiamo che con questa prevalenza è possibile trasferire il fluido fino al serbatoio B. Applicando Bernoulli da A a B abbiamo:

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gh_A + \frac{p_A}{\rho} + w_s = \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B + \frac{p_B}{\rho} + lv_{A-B} \tag{52}$$

da cui:

$$w_s = \frac{p_B - p_{atm}}{\rho} + 2fv^2 \frac{L_{AB}}{D} \tag{53}$$

dove f e v hanno il valore già calcolato e la lunghezza della tubazione è $L_{AB} = 50\ km$. Sostituendo i valori risulta $w_s = 953.95\ m^2/s^2$, che è minore del valore calcolato in precedenza. Se il circuito fosse in piano, basterebbe questo valore di prevalenza della pompa per realizzare il trasporto. Con un dislivello di 300 m, questa prevalenza non sarebbe sufficiente per superarlo. La pompa va quindi dimensionata rispetto al primo valore calcolato. La potenza risulta

$$P = w \cdot w_s = 200 \cdot 3.3371 \cdot 10^3 = 667,42\ kW \tag{54}$$

e.

(a) Applicando Bernoulli tra i serbatoi A e B ($v_A = v_B = 0, p_A = p_B = p_{atm}, h_A = 0$) avremo

$$w_s = gh_B + 2f\frac{L_{AB}}{D} \cdot v^2 \tag{55}$$

con

$$w_s = \frac{P}{w} = \frac{4P}{\rho \pi D^2 v} = \frac{K}{v} \tag{56}$$

(57)

e

$$f = 0.079 \cdot Re^{-0.25} = 0.079 \cdot \left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.25} \cdot v^{-0.25} = K_1 \cdot v^{-0.25} \tag{58}$$

con K_1

$$K_1 = 0.079\left(\frac{10^3 \cdot 0.1}{10^{-3}}\right)^{-0.25} \cdot 10^5 = = 7.9 \cdot 10^{-4} \tag{59}$$

(60)

L'equazione di Bernoulli può quindi essere scritta in funzione della sola velocità :

$$K_A \cdot v^{1.75} - \frac{K}{v} + gh_B = 0 \tag{61}$$

con

$$K_A = 2K_1 \cdot \frac{L_{AB}}{D} = 15.8 \tag{62}$$

Risolvendo per tentativi la 61 si ricava $v = 0.78 m/s$ e quindi la portata sarà $Q = 6.12 \cdot 10^{-3} m^3/s$.

(b) Indichiamo rispettivamente con 1 e 2 i punti in cui i condotti dal serbatoio A e B raggiungono il parallelo. Le velocità nei tratti 1-A e B-1 sono uguali e valgono

$$v_A = v_B = \frac{4Q}{\pi d^2} = 0.637\ m/s \tag{63}$$

visto che è data la portata che va da B ad A. Applicando Bernoulli tra il punto B e il punto 2 avremo:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh_B = \frac{p_2}{\rho} + 2f\frac{L_{B2}}{D} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \tag{64}$$

Il coefficiente d'attrito in questo tratto è pari a $f = 0.005$, usando Blasius ed essendo $Re = 637.000$. Trascurando il termine cinetico $1/2v_2^2$, la pressione nel punto 2 risulta:

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h_B - 2f\frac{L_{B2}}{D} \cdot v_B^2 \rho = 2.4 \cdot 10^5\ Pa \tag{65}$$

Applicando Bernoulli tra 1 e A nell'ipotesi di termini cinetici trascurabili (quando non nulli) si ha:

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} + 2f\frac{L}{D} \cdot v_A^2 \tag{66}$$

da cui si ricava una pressione pari a $p_1 = 1.09 \cdot 10^5\ Pa$. Per il tratto di parallelo con la pompa (flusso da 1 a 2), l'equazione di Bernoulli è

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{P}{w} = \frac{p_2}{\rho} + 2f\frac{L}{D} \cdot v_{sup}^2 \tag{67}$$

Sostituendo i valori noti, si ricava:

$$w = \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_{sup} \rightarrow v_{sup} = 0.88\ m/s \tag{68}$$

con un coefficiente d'attrito espresso come:

$$f = 0.079 \cdot \left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.25} \cdot v_{sup}^{-0.25} \tag{69}$$

Per continuità , la velocità nel tratto inferiore del parallelo (flusso da 2 a 1) sarà pari a

$$v_{inf} = v_{sup} + v_A = 0.88 + 0.637 = = 1.517\ m/s \tag{70}$$

Note le pressioni p_1 e p_2 ai capi del parallelo e la velocità del ramo è possibile calcolare L_{TOT} lunghezza totale corrispondente alle perdite distribuite ($L = 600$) e concentrate (L_{eq}). Applicando Bernoulli al tratto 2-V-1 con la valvola, risulta:

$$L_{TOT} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \cdot \frac{D}{2fv_{inf}^2} = 1189.4\ m \tag{71}$$

da cui

$$L_{eq} = L_{TOT} - 600 = 589.34\ m \tag{72}$$

Sapendo che L_{eq} è definito come

$$L_{eq} = 7500(1 - \alpha) \tag{73}$$

il grado di apertura α risulta pari a $\alpha = 0.92$.

f.

(a) Impostando l'equazione di Bernoulli tra il punto a e il punto h troviamo:

$$\omega_s = \frac{p_h - p_{atm}}{\rho} + gh_H + 2fv^2\frac{L}{D} \tag{74}$$

in cui si è trascurato il termine cinetico $\frac{1}{2}v_H^2$. Il fattore d'attrito f si trova utilizzando Balsius:

$$f = 0,079Re^{-0,25} \tag{75}$$

dove il numero di Reynolds è calcolato mediante la portata. In questo modo troviamo la potenza nella forma:

$$P = \omega \cdot \omega_s = k_1 + k_2 D^{-4,75} = \tag{76}$$

$$= 5,911 \cdot 10^5 + 2850,6 \cdot D^{-4,75} \tag{77}$$

(b) I costi dell'impianto risultano essere:

$$C_{TOT}(D) = k_T \cdot LD + \frac{k_P + K_E \cdot NH}{10^3}P$$
$$= 3 \cdot 10^{10} \cdot D + 7.684 \cdot 10^9 + 3.705 \cdot 10^7 \cdot D^{-4.75} \tag{78}$$

Derivando l'equazione del costo rispetto al diametro si trova il diametro ottimo:

$$\frac{\mathrm{d}C_{TOT}}{\mathrm{d}D} = 0 \rightarrow D_{ott} = 0,41\ m\ .$$

Con questo diametro il costo annuale dell'impianto è 902 milioni per una potenza di 788 kW.