Soluzione Homework N^o 7

a.

La traiettoria del getto può essere scritta come:

$$x = v_x t = v \cos\alpha t \quad (1)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = v \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

dove v è la velocità del getto all'uscita dell'idrante pari a

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = 21.22 m/s \quad (3)$$

Eliminando il tempo nelle due equazioni precedenti si ricava:

$$t = \frac{x}{v \cos\alpha} \quad (4)$$

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2\alpha} x^2 \quad (5)$$

che rappresenta la parabola descritta dal getto al variare dell'inclinazione α dell'idrante rispetto all'orizzontale. Poichè il getto deve raggiungere la finestra che si trova a $y = 20 - 1 = 19$ più in alto del punto di uscita del getto, la posizione del pompiere è data dalla x che risolve l'equazione:

$$f(x, \alpha) = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2v^2 \cos^2\alpha} - y = 0 \quad (6)$$

con $y = 19$. Per trovare il valore dell'inclinazione che rende massima la distanza x esprimiamo la derivata della quantità da massimizzare ($x = x(\alpha)$) in funzione delle derivate della funzione $f(x, \alpha)$. Essendo $f(x, \alpha) = 0$, è anche $\mathrm{d}f(x, \alpha) = 0$ e sviluppando il differenziale totale della funzione si ha

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x = 0 \quad (7)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\partial f / \partial\alpha}{\partial f / \partial x} \quad (8)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad (9)$$

da cui si ottiene:

$$x = \frac{v^2 \cos\alpha}{g \sin\alpha} \quad (10)$$

che sostituito nella 6 permetter di ricavare

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{v^2}{2(v^2 - gy)}} = 0,9235 \quad (11)$$

$$\alpha = 67,45 \quad (12)$$

Sostituendo questo valore otteniamo: $x = 19\ m$.

b.

1. Le componenti di velocità in direzione orizzontale (x) e verticale (y) sono rispettivamente

$$v_x = v_o \cos\alpha \quad (13)$$

$$v_y = v_o \sin\alpha - gt \quad (14)$$

   e gli spostamenti

$$x = v_o \cos\alpha t \quad (15)$$

$$y = v_o \sin\alpha t - \frac{g t^2}{2} \quad (16)$$

   da cui, ricavando t dalla prima e sostituendolo nella seconda si ricava l'equazione del getto:

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} \quad (17)$$

   Se l'inclinazione del getto è assegnata, essendo noto il punto per cui deve passare il getto (x,y)=(8,10), l'unica incognita nell'equazione 17 è la velocità iniziale di uscita del getto, v_o. Si ricava:

$$v_o = \left(\frac{g x^2}{(x \tan\alpha - y) 2 \cos^2\alpha} \right)^{0.5} \quad (18)$$

   da cui $v_o = 18.04\ m$.

2. Nel caso in cui si possa variare l'inclinazione del getto, il problema diventa un problema di ottimo, dove bisogna trovare la velocità minima al variare dell'inclinazione che permette di raggiungere l'obiettivo. Il minimo che si cerca è :

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad (19)$$

   e poiché la velocità risulta essere una funzione implicita di α dalla 17, possiamo esprimere la condizione di minimo utilizzando la funzione implicita

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} / \frac{\partial f}{\partial v_o} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad (20)$$

   Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} x - \frac{g x^2}{2 v_o^2} (-2\cos^{-3}\alpha)(-\sin\alpha) = 0 \quad (2$$

$$1 - \frac{g x \sin\alpha}{v_o^2 \cos\alpha} = 0 \quad (2$$

☺ marchioli@uniud.it

da cui $v_o^2 = gx \tan\alpha$ e $v_o = 11.66\ m/s$. Per ricavare l'inclinazione del getto, si sostituisce l'espressione di v_o^2 nella 17 e si risolve rispetto ad α. Si ottiene

$$-\frac{y}{x} + \tan\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 0 \tag{23}$$

da cui $\alpha = 70^o$.

c.

Per la risoluzione dell'eserzizio si veda l'Esercizio 9 a pag. 232 del libro di testo.

d.

(a) Il bilancio di massa sul serbatoio fornisce:

$$\frac{dm}{dt} = \rho Q_{in} - \rho Q_{out} \tag{24}$$

dove $m = \rho S h$ e $Q_{out} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_{out}$, con v_{out} dato dall'applicazione dell'equazione di Bernoulli tra un punto del serbatoio e un punto della sezione di scarico:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{out}^2 \tag{25}$$

Si è scelto come piano di riferimento quello in corrispondenza dello scarico e si è considerata nulla la velocità entro il serbatoio. Risulta $v_{out} = \sqrt{2gh}$ con h altezza del liquido del serbatoio.

La massima portata Q_{in} che non fa traboccare il serbatoio è pari a quella che, nelle condizioni iniziali, può essere smaltita dal fondo di scarico e si ottiene dal bilancio di massa ponendo $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$.

Risulta:

$$Q_{in} = Q_{out} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} = 8.7 \cdot 10^{-3}\ m^3/s \tag{26}$$

(b) L'equazione del bilancio di massa 24 può essere riscritta come:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{in}}{S} - \frac{\pi D^2}{4S}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = K_1 - K_2\sqrt{h} \tag{27}$$

che integrata a partire dalla condizione iniziale $h(0) = H$ permette di ricavare la legge di variazione nel tempo del livello. L'integrale della 27 è :

$$t = \frac{2}{K_2^2}\left[K_1 \ln\frac{K_1 - K_2\sqrt{H}}{K_1 - K_2\sqrt{h}} + K_2(\sqrt{H} - \sqrt{h})\right] \tag{28}$$

da cui bisogna ricavare $K_1 (= Q_{in}/S)$ che risolve l'equazione quando $t = 240$ e $h = 0.5\ m$.

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$K_1 \ln\left(\frac{K_1 - 4.35 \cdot 10^{-3}}{K_1 - 3.0749 \cdot 10^{-3}}\right) = 9.9556 \cdot 10^{-4}$$

che va risolta per tentativi ottenendo $Q_{in} = 3.2\ l/s$ che è , come ci si poteva aspettare minore del valore calcolato al punto 1.

e.

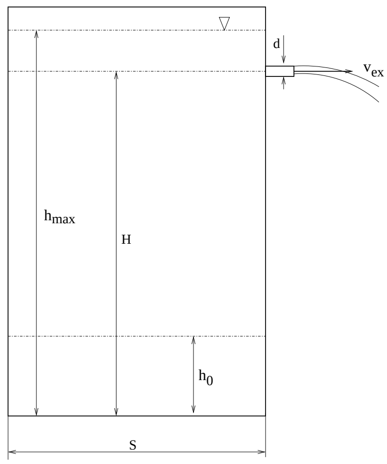

Fig. 1 Serbatoio cilindrico con tubazione di sfioro.

(a) Affinchè il condotto inizi a funzionare, il liquido deve riempire un volume $V = S \cdot (H - h_0)$, S essendo l'area della sezione cilindrica del serbatoio. Il tempo necessario a riempire tale volume è quindi:

$$t = \frac{V}{Q_0} = \frac{(H - h_0)\pi D^2}{Q_0 4} = 11938s \tag{29}$$

(b) Il livello massimo raggiunto dall'olio si ottiene nel momento in cui la portata volumetrica uscente dallo sfioro (Q_{ex}) uguaglia quella in ingresso (Q_0). La portata in uscita è pari a:

$$Q_{ex} = \frac{\pi d^2 v_{ex}}{4} \rightarrow v_{ex} = \frac{4Q_{ex}}{\pi d^2}\ . \tag{30}$$

Applicando Bernoulli tra pelo libero dell'olio nel serbatoio e sezione di uscita dello sfioro otteniamo : $g(h_{max} - H) = v_{ex}^2/2$

$$\frac{1}{2}(\frac{4Q_{ex}}{\pi d^2})^2 = g(h_{max} - H) \tag{31}$$

$$h_{max} = H + \frac{Q_{ex}^2}{2g}(\frac{4}{\pi d^2})^2$$
$$= H + 2,066 \cdot 10^{-2} \frac{1}{d^4} \quad (32)$$

(c) Il getto esce dallo sfioro orizzontalmente, quindi $v_{ex} = v_{ex,x}$ e $v_{ex,y} = 0$. Le equazioni che descrivono la traiettoria del getto dunque sono:

$$x = v_{ex,x} \cdot t = v_{ex} \cdot t \ , \quad (33)$$
$$y = v_{ex,y} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \ , \quad (34)$$

x ed y essendo le distanze coperte dal getto in direzione orizzontale e verticale, rispettivamente. Il tempo di caduta è quindi dato da :

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \ . \quad (35)$$

Noto il tempo di caduta t ed indicata con $L = (D_m - D)/2$ la distanza coperta dal getto in orizzontale e tenendo conto che vale la condizione $Q_{ex} = Q_0$, si trova:

$$L = \frac{4Q_0}{\pi d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}} \rightarrow d = \left[\frac{4Q_0}{\pi L}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]^{0.5} \quad (36)$$

da cui si ricava $d = 0.364\ m$.
Infine, il tempo t necessario affinchè l'olio raggiunga il livello di guardia h_{max} a partire dalla quota H di sfioro, può essere determinato impostando un bilancio di massa del tutto simile a quello impostato al punto (b) dell'esercizio d. L'espressione finale per il calcolo di t è pertanto:

$$t = \frac{2}{K_2^2}\left[K_1 \ln \frac{K_1 - K_2\sqrt{H}}{K_1 - K_2\sqrt{h_{max}}} + K_2(\sqrt{H} - \sqrt{h_{max}})\right] , \quad (37)$$

dove $K_1 = 4Q_0/\pi D^2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$ e $K_2 = \sqrt{2g}(d/D)^2 = 0.181 \cdot 10^{-3}$. Si trova $t = 2514\ s$.

f.

(a) Per risolvere il problema è sufficiente impostare le equazioni di conservazione della massa sulle due fasi gas e liquido. Per il gas si ha:

$$\frac{\mathrm{d}m_g}{\mathrm{d}t} = \frac{M\mathrm{d}(pV_g)}{RT\mathrm{d}t} = 0 \quad (38)$$
$$\rightarrow \quad pV_g = cost \quad (39)$$

dove si è tenuto conto che il gas è ideale ($m_g = Mn$, $n = pV_g/RT$) e la trasformazione è isoterma.
Il volume occupato dal gas V_g è espressso in funzione del livello del liquido si ottiene quindi:

$$p(H - h) = p_0(H - h_0) = 4 \cdot 10^5 \quad (40)$$

essendo p_o e h_0 i valori di pressione e livello all'istante iniziale. Dalla conservazione della massa per il liquido si ha:

$$\frac{\mathrm{d}m_L}{\mathrm{d}t} = -\rho_L \cdot Q_{out} \quad (41)$$

Dall'equazione di Bernoulli scritta tra un punto interno al serbatoio e la sezione di sbocco si ha:

$$\frac{p}{\rho_L} + gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_{atm}}{\rho_L} + 2fv^2\frac{L}{d} \quad (42)$$

Da qui si ricava la velocità :

$$v = \sqrt{\frac{\frac{p - p_{atm}}{\rho_L} + gh}{\frac{1}{2} + 2f\frac{L}{d}}} \quad (43)$$

Nell'espressione della velocità sia p che h risultano variabili nel tempo, per cui l'equazione di conservazione della massa può essere risolta solo All'equilibrio si ha che la massa non varia nel tempo:

$$\frac{\mathrm{d}m_L}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (44)$$

ovvero che la velocità del fluido in uscita è nulla. Sostituendo l'espressione trovata per la pressione in funzione del livello nella 43 si arriva ad un'equazione di secondo grado in h che ammette un'unica soluzione fisicamente accettabile, $h = 4.1\ m$ per l'altezza di equilibrio.

(b) Per il calcolo del tempo si utilizza la conservazione di massa dell'olio:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -v\frac{d^2}{D^2} \quad (45)$$

che va integrata tra la condizione iniziale e finale per il livello

$$\int_{h=6}^{4.1} \mathrm{d}h = \int_0^t -v(t)\frac{d^2}{D^2}\mathrm{d}t \quad (46)$$

Il raggiungimento delle condizioni di equilibri si raggiunge asintoticamente per $t \rightarrow \infty$.

g.

(a) La forza orizzontale è

$$F_x = w_0 v_0 = \frac{\rho Q^2 4}{\pi D^2} \tag{47}$$

Per l'equilibrio dei momenti:

$$F_x L/2 = RL \tag{48}$$

Perciò

$$R = \frac{\rho Q^2 2}{\pi D^2} \tag{49}$$

(b) La condizione di equilibrio a rotazione per la lastra corrisponde all'uguaglianza del momento della forza peso e della forza esercitata dal getto:

$$M_{getto} = F_x \cos\alpha L/2 \tag{50}$$

$$M_{peso} = g m_l \sin\alpha L/2 \tag{51}$$

da cui

$$\tan\alpha = \frac{F_x}{g m_l} = \frac{4Q^2\rho}{\pi D^2 g m_l} \tag{52}$$

h.

(a) Il rendimento è definito come

$$\eta = \frac{\text{Potenza trasmessa}}{\text{Potenza fornita}} = 0.5\ . \tag{53}$$

La potenza trasmessa può essere calcolata determinando la quantità di moto (qdm) effettivamente ceduta dal getto alle pale. Detta $v = \Omega R$ la velocità delle pale e u la velocità del getto, si ha:

$$Pot_{tr} = F \cdot v = \frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t} \cdot v = \left(u \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right) \cdot v = \\ = (uw)v = u \cdot v \left[\rho(u-v)\frac{\pi d^2}{4}\right] = \\ = \rho\pi\frac{d^2}{4} u(u-v)v\ . \tag{54}$$

In questo caso si è tenuto conto del fatto che la portata "utile" si riduce se ciascuna pala si muove con velocità costante piuttosto che essere ferma. In tal caso, infatti, il getto è costretto ad allungarsi sprecando una frazione di portata (da non considerarsi nel calcolo della qdm ceduta).

La potenza fornita può essere calcolata determinando l'energia cinetica resa disponibile dal getto:

$$Pot_{for} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m u^2\right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \\ \frac{1}{2} u^2 \left(\rho u \frac{\pi d^2}{4}\right) = \frac{1}{8}\rho\pi d^2 u^3\ . \tag{55}$$

Si trova pertanto:

$$0.5 = \frac{\rho\pi\frac{d^2}{4} u(u-v)v}{\frac{1}{8}\rho\pi d^2 u^3} = \frac{v(u-v)}{\frac{1}{2}u^2} \tag{56}$$

da cui si ricava $u = 2v$.

(b) La pressione di mandata fornita dalla pompa deve essere tale da vincere le perdite di carico lungo il tubo e dare in uscita dal tubo il getto alla velocità desiderata. Scrivendo Bernoulli tra la sezione di uscita dalla pompa (1) e la sezione di sbocco del getto (2) si ha

$$p_1 = p_2 + \rho l_v \tag{57}$$

dove

$$l_v = 2f\frac{L}{d}u^2 \tag{58}$$

f è dato dalla legge di Blasius e u è la velocità desiderata del getto.