Soluzione Homework N^o 5

a

---

1. Disco in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_z \mathbf{k}$:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\Omega_z \mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \Omega_z(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega_z \mathbf{k}.$$

2. Fluido in rotazione con moto torsionale: $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = \frac{R^2\Omega}{r} = f(r)$.

$$\omega = \mathbf{e}_r \left(-\frac{\partial(v_\theta)}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \cdot 0 + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} \right) = 0.$$

3. Moto di Couette: $v_x = \frac{U}{H} y$.

$$\omega = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{H} y \right) \right] \mathbf{k} = -\frac{U}{H} \mathbf{k}.$$

4. Moto di Poiseuille: $v_x = \frac{H^2}{8\mu} \left(-\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} \right) \left(1 - \frac{4y^2}{H^2} \right)$.

$$\omega = \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\frac{H^2}{8\mu} \left(-\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{4y^2}{H^2} \right) \mathbf{k}$$

$$= \frac{y}{\mu} \left(-\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} \right) \mathbf{k}.$$

b

$$2\eta f' + \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}\eta} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}f'}{f'} = -2\eta \mathrm{d}\eta \rightarrow \ln f' = -\eta^2 + C$$

$$\rightarrow f' = C \exp(-\eta^2) \rightarrow \int_{f(0)}^{f(\eta)} f' \mathrm{d}\eta = C \int_0^\eta \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta$$

$$\rightarrow f(\eta) = f(0) + C \int_0^\eta \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta$$

.

Dalle condizioni al contorno si ha: $f(0) = 1$, $f(\eta \rightarrow \infty) = 1 + C \int_0^\infty \exp(-\eta^2)\mathrm{d}\eta = 1 + C \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow 0$ da cui $C = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Si ricava quindi:

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta$$

.

c

Il problema è quello della lastra piana decelerata istantaneamente:

$$v_x = v_x(y,t) \qquad v_y = v_z = 0$$

Le equazioni di continuità e N-S diventano:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

(che è identicamente soddisfatta) e

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Dalle ultime due si deduce P =cost. Si ipotizza che la soluzione per v_x abbia la forma:

$$v_x(y,t) = u_\infty \left(\frac{y}{\delta(t)} \right) = u_\infty \phi(\eta)$$

dove $\eta = y/\delta(t)$. Sostituendo questa espressione di v_x si ha

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -u_\infty \frac{\eta}{\delta(t)} \frac{d\delta}{dt} \frac{d\phi}{d\eta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = u_\infty \frac{1}{\delta^2(t)} \frac{d^2\phi}{d\eta^2} \tag{3}$$

per cui la (1) risulta

$$\eta\ \delta(t) \frac{d\delta}{dt} \frac{d\phi}{d\eta} + \nu \frac{d^2\phi}{d\eta^2} = 0 \tag{4}$$

$$\eta\ \delta(t) \frac{d\delta}{dt} \phi^{'} + \nu \phi^{''} = 0$$

ma essendo $\delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$, la (4) diventa

$$2\ \eta\ \phi^{'} + \phi^{''} = 0 \tag{5}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$y \rightarrow +\infty\ ,\quad v_x = u_\infty \qquad \Rightarrow \qquad \eta \rightarrow +\infty\ ,\quad \phi = 1$$

$$y \rightarrow 0\ ,\quad v_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \eta \rightarrow 0\ ,\quad \phi = 0$$

☺ marchioli@uniud.it

Risolvendo si ottiene:

$$\phi = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \ + C_2 \tag{6}$$

ed applicando le condizioni al contorno risulta:

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tag{7}$$
$$C_2 = 0$$

Quindi, alla fine:

$$v_x(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, u_{\infty} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \tag{8}$$

Si può anche calcolare lo sforzo di taglio. Questo si ricava applicando:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \frac{\mu}{\delta(t)} \frac{d}{dy} v_x = \frac{\mu u_{\infty}}{2\sqrt{\nu t}} \frac{d\phi}{d\eta} \tag{9}$$

da cui

$$\tau_{xy}(\eta) = \frac{\mu u_{\infty}}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\eta^2} \tag{10}$$

d

Si considerino due linee di flusso generiche come in figura 1. Supponendo di voler calcolare la portata che attraversa la generica sezione A-B, si ha:

$$\frac{Q}{W} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S,$$

dove $\mathbf{dS} = \mathrm{d}S\mathbf{n}$ è un elementino d'area rettilineo preso sulla sezione A-B (in pratica scomponiamo tale sezione in tanti elementi infinitesimi $\mathbf{dS}$, ciascuno dei quali ha modulo dS e versore normale uscente $\mathbf{n}$, in modo che la velocità $\mathbf{v}$ con cui il fluido attraversa un dato elementino sia uniforme). Risulta:

$$\frac{Q}{W} = \int_A^B (v_x n_x + v_y ny) \mathrm{d}S = \int_A^B v_x n_x \mathrm{d}S + \int_A^B v_y n_y \mathrm{d}S,$$

dove v_x ed n_x sono le componenti di $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{n}$ in direzione orizzontale x mentre v_y ed n_y sono le componenti di $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{n}$ in direzione verticale y. Ora, il termine $n_x dS$ rappresenta la proiezione del vettore area $\mathbf{dS}$ in direzione x e si può quindi porre $n_x \mathrm{d}S = \mathrm{d}y$; analogamente il termine $n_y \mathrm{d}S$ rappresenta la proiezione del vettore area $\mathbf{dS}$ in direzione y e si può quindi porre $n_y \mathrm{d}S = -\mathrm{d}x$ tenendo conto del verso di percorrenza della sezione. Si ha pertanto:

$$\frac{Q}{W} = \int_A^B v_x \mathrm{d}y - \int_A^B v_y \mathrm{d}x.$$

Per definizione:

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y;$$

quindi:

$$\int_A^B \mathrm{d}\Psi = \int_A^B v_y \mathrm{d}x - \int_A^B v_x \mathrm{d}y = -\frac{Q}{W};$$

$$\Psi_B - \Psi_A = \Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{Q_{tot}}{W}.$$

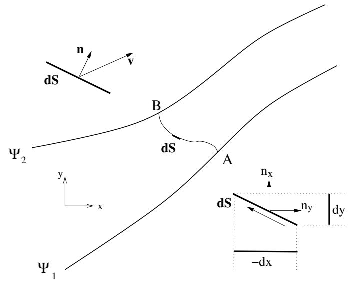

FIG. 1. Linee di flusso generiche.

e

Si trova:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\sqrt{v_{\infty} \nu x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = -v_{\infty} f'$$

essendo $\partial \eta / \partial y = \sqrt{v_{\infty}/\nu x}$ e $\partial f / \partial \eta = f'$.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = -v_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{1}{2} v_{\infty} f'' \frac{\eta}{x}.$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = -v_{\infty} f'' \sqrt{\frac{v_{\infty}}{\nu x}}.$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = -v_{\infty}\left(\frac{v_{\infty}}{\nu x}\right) f'''.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sqrt{v_{\infty} \nu x} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sqrt{v_{\infty} \cdot \nu} f \frac{\partial x^{0.5}}{\partial x} = \frac{1}{2} v_{\infty} f' \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{y} f.$$

Sostituendo tutti i termini nell'equazione di partenza e semplificando si ricava:

$$f f'' + 2 f''' = 0$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \ (y = 0) \rightarrow f(0) = 0 \ (v_x = 0);$$

$$\eta \rightarrow \infty \ (y \rightarrow \infty) \rightarrow f' \rightarrow 1 \ (v_x \rightarrow v_{\infty}).$$

Una tale equazione differenziale si risolve per via numerica (ad esempio con Mathcad).

f

Il grafico 3D delle linee iso-Ψ e iso-Φ è riportato in figura nel caso $a = 1$. Per verificare graficamente l'ortogonalità fra le linee, basta tracciare un grafico 2D della funzione che le descrive, assumeno ad esempio un valore fissato di x (oltre che di a) e variando y.

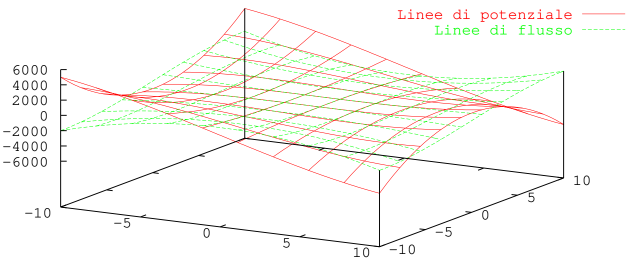

FIG. 2. Linee di flusso e linee di potenziale.

g

Preso il potenziale:

$$\Phi = k(x^2 - y^2) \tag{11}$$

e derivandolo rispetto alle componenti x ed y ottengo rispettivamente le componenti della velocità lungo x e lungo y:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2kx \tag{12}$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ky \tag{13}$$

Vale inoltre:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2kx \tag{14}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ky \tag{15}$$

Integrando si ottiene:

$$\mathrm{d}\psi = v_y \mathrm{d}x = -v_x \mathrm{d}y \to \int \mathrm{d}\psi = \int v_y \mathrm{d}x = -\int v_x \mathrm{d}y$$
$$\to \psi = 2kxy + f(y) = -(-2kxy) + f(x)\ . \tag{16}$$

Poicé ci interessa definire ψ a meno di una costante di integrazione, possiamo assumere $f(x) = f(y) = 0$ e ricavare $\psi = 2kxy$.

Mediante una analisi puntuale del grafico 4.32 del libro (pagina 182) emerge la coincidenza della funzione ψ e di quella rappresentata in figura. In entrambi i casi infatti si ottiene una funzione iperbolica.

h

Le componenti di velocità sono:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{2}{r}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$$

da cui:

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} v_r \cdot r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}\ \frac{m^2}{s}$$

Applicando Bernoulli si trova:

$$\frac{1}{2}\rho v_i^2 + p_i + \rho g h_i = cost. \to p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Il termine gravitazionale è stato trascurato. Essendo:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{4}{r^2}$$

si ha: $v_1 = v(r = 1) = 4$, $v_2 = v(r = 0.5) = 16$. Quindi:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 24 \cdot 10^3 Pa.$$

La pressione diminuisce man mano che ci si avvicina all'origine O del convergente in quanto la velocità aumenta.