Soluzione Homework N^o 4

a.

---

1. Si possono formulare le seguenti ipotesi semplificative:
   - fluido Newtoniano incomprimibile (μ e ρ cost)
   - moto completamente sviluppato $\left(\frac{\partial}{\partial z}=0\right)$
   - moto piano $\left(\frac{\partial}{\partial y}=0\right)$
   - linee di flusso parallele alla parete ($v_x = v_y = 0 \Rightarrow v_z = v_z(x)$)

   Da cui le equazioni di N-S si riducono a:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \tag{3}$$

   Dalle equazioni (19) e (20) si ottiene $P = P(z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{dP}{dz}$. L'equazione di continuità risulta:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \tag{4}$$

2. Il profilo generale di velocità risulta:

$$v_z(x)=-\frac{\rho g sin\alpha}{2\mu}x^2+Ax+B \tag{5}$$

   dove $\frac{dP}{dz}=-\rho g\cdot sin\alpha$ essendo $P=p_0+\rho gh_0=p+\rho gh(z)$ e $h(z)=h_0-z\cdot sin\alpha$ Imponendo le condizioni al contorno all'interfaccia fluido-nastro e a quella fluido-aria:

$$v_z(x=\delta)=-U \;\Rightarrow\; B=\frac{\rho g sin\alpha}{2\mu}\delta^2-U$$

$$\tau_{xz}(x=0)=0 \;\Rightarrow\; A=0$$

   si ottiene:

$$v_z(x)=\frac{\rho g sin\alpha}{2\mu}(\delta^2-x^2)-U \tag{6}$$

$$\tau_w=\tau_{xz}=-\rho g sin\alpha\cdot x \tag{7}$$

   Attenzione: l'equazione è stata ottenuta prendendo come riferimenti l'asse x ortogonale al nastro e diretta verso di esso con origine sulla superficie libera e l'asse z parallelo al nastro e in verso opposto alla velocità U dello stesso(**riferimento 1**).

   Se l'asse x viene presa in verso opposto e con origine sul nastro (**riferimento 2**) le condizioni al contorno sono:

$$\tau_{xz}(x=\delta)=0 \;\Rightarrow\; A=\frac{\rho g sin\alpha}{2\mu}\delta$$

$$v_z(x=0)=-U \;\Rightarrow\; B=-U$$

   e quindi:

$$v_z(x)=\frac{\rho g sin\alpha}{2\mu}(2\delta x-x^2)-U$$

   Possiamo ora calcolare l' espressione della portata:

$$\frac{Q}{W}=\int_0^\delta v_z(x)dx=\left[\underbrace{\frac{\rho g sin\alpha}{3\mu}\delta^3}_{Poiseuille}-\underbrace{U\delta}_{Couette}\right] \tag{8}$$

3. La portata risulta funzione dello spessore δ Per ottenere il valore dello spessore che permette di trasportare la massima portata si deve porre:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\delta}=0 \tag{9}$$

   Si ricava:

$$\delta_{max}=\sqrt{\frac{U\mu}{\rho g\sin\alpha}} \tag{10}$$

   che esprime, per ogni valore di velocità U assegnata, il valore di spessore del film che massimizza il trasporto.

4. Per ottenere il valore di spessore che permette di realizzare un flusso netto nullo, basta porre:

$$Q(\delta)=0 \tag{11}$$

   Si ricava:

$$\delta=\sqrt{\frac{3U\mu}{\rho g\sin\alpha}}=\sqrt{3}\delta_{max} \tag{12}$$

5. La potenza dissipata per mantenere il nastro in moto è data dal prodotto tra la forza agente sul nastro e la velocità del nastro. La forza è data dal taglio per la superficie di azione:

$$F=\tau_w(\delta)\cdot(WL)=-\rho g\sin\alpha\delta WL \tag{13}$$

   e corrisponde alla componente del peso del fluido lungo il piano inclinato. La potenza risulta:

$$P=F\cdot(-U)=\rho g\sin\alpha\delta WL\cdot U \tag{14}$$

☺ marchioli@uniud.it

b.

1. Le equazioni di Navier-Stokes e di continuità si riducono assumendo le medesime ipotesi semplificative del caso di moto piano di Couette (vedi pag. 76 del libro di testo). Per quanto riguarda il profilo di velocità e la portata, se si assume un riferimento cartesiano con origine posta a distanza h dalla piastra superiore (RIF1) si ricava:

$$v = U\ \frac{y}{h}; \tag{15}$$

$$Q = < v_x >\ A_{sez} = \frac{U}{2}\ Wh; \tag{16}$$

essendo W la profondità del condotto ed $A = Wh$ l'area della sezione di passaggio. Scegliendo il riferimento cartesiano con origine sul fondo della cavità ossia a distanza H dalla piastra superiore (RIF2), l'espressione per la portata non varia rispetto al caso precedente mentre il profilo di velocità si ottiene a partire dall'equazione di N.-S. semplificata lungo la direzione x:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x(y) = C_1\ y + C_2 \tag{17}$$

Le condizioni al contorno sono:

- $y\ =\ H\ \rightarrow\ v_x\ =\ U;$
- $y\ =\ H-h\ \rightarrow\ v_x\ =\ 0;$

e consentono di ricavare:

- $C_1\ =\ \frac{U}{h};$
- $C_2\ =\ U\ \left(1 - \frac{H}{h}\right);$

ovvero:

$$v_x(y) = \frac{U}{h} y + U\ \left(1 - \frac{H}{h}\right). \tag{18}$$

2. Le equazioni di Navier-Stokes e di continuità si riducono assumendo le medesime ipotesi semplificative del punto precedente ad esclusione della condizione $\partial P/\partial x\ =\ 0$ non valida per la sezione $A-A$. pertanto:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{19}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \tag{20}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \tag{21}$$

L'equazione di continuità si riduce a $\partial v_x/\partial x = 0$.

3. Profilo di velocità : viene ricavato a partire dalla componente x dell'equazione di N.-S. scritta al punto precedente. Integrando, si ottiene:

$$v_x = \ -\frac{1}{2\ \mu}\ \frac{dP}{dx}\ y^2 + C_3\ y + C_4 \tag{22}$$

con $\partial P/\partial x\ =\ dP/dx\ =\ d(p + \rho g h)/dx\ =\ dp/dx$ (effetti gravitazionali trascurabili). Le condizioni al contorno nel RIF2 sono:

- $y\ =\ H\ \rightarrow\ v_x\ =\ U;$
- $y\ =\ 0\ \rightarrow\ v_x\ =\ 0;$

e consentono di ricavare:

- $C_3\ =\ \frac{U}{H}\ -\ \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}H;$
- $C_4\ =\ 0;$

ovvero:

$$v_x\ = \underbrace{\frac{1}{2\ \mu}\ \frac{\partial P}{\partial x}\ (y^2\ -\ Hy)}_{Poiseuille} + \underbrace{\frac{U}{H}\ y}_{Couette}\ . \tag{23}$$

Si osservi come, raccogliendo opportunamente i vari termini, sia possibile evidenziare i contributi di Couette e di Poiseuille al profilo di velocità . Questo suggerisce la possibilità di risolvere questa parte dell'esercizio sfruttando la sovrapposizione degli effetti una volta che siano state risolte separatamente le equazioni per moto piano di Poiseuille e moto piano di Couette sull'intera sezione A-A.

La differenza di pressione $\frac{\partial P}{\partial x}\ =\ \frac{\Delta P}{L}$ si ricava calcolando la portata attraverso la sezione A-A ed uguagliandola alla portata ricavata al punto 1):

$$\frac{Q}{W} =\ < v_x > A_{sez}\ =\ \int_0^H\ v_x\ dy\ =$$

$$=\ \underbrace{-\frac{1}{12\ \mu}\ \frac{\partial P}{\partial x} H^3}_{Poiseuille} + \underbrace{\frac{U\ H}{2}}_{Couette}\ . \tag{24}$$

Eguagliando le portate si ottiene:

$$-\frac{1}{12\ \mu}\ \frac{dp}{dx} H^3 + \frac{U\ H}{2}\ =\ \frac{U\ h}{2}; \tag{25}$$

da cui è possibile ricavare la differenza di pressione:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = 6\mu \frac{U\ (H-h)}{H^3}. \tag{26}$$

4. La posizione del punto appartenente alla sezione A-A in cui $v_x = 0$ è :

$$v_x = \frac{1}{2\ \mu}\frac{dP}{dx}(y^2 - Hy) + \frac{U}{H}y \tag{27}$$

Raccogliendo:

$$y\ \left[\frac{1}{2\ \mu}\ \frac{dp}{dx}\ y + \left(\frac{U}{H} - \frac{1}{2\ \mu}\ \frac{dp}{dx}\ H\right)\right] = 0. \tag{28}$$

Le possibili soluzioni sono:

$$y = 0 \quad (ovvio!) \tag{29}$$

$$y = H - \frac{H^2}{3\ (H-h)}. \tag{30}$$

c.

Assumendo il riferimento in Figura 1, si ha che il moto è identico a quello studiato nell'esercizio 2 a pag. 119 del libro di testo. L'espressione della portata è pertanto:

$$Q = \frac{\pi h^3}{6\mu}\frac{-\Delta P}{\ln(R_2/R_1)} \tag{31}$$

dalla quale è possibile determinare il gradiente di pressione tra R_1 ed R_2:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -1385,25Pa$$

.

N.B. Risulta $P_1 > P_2 = P_{atm}$!

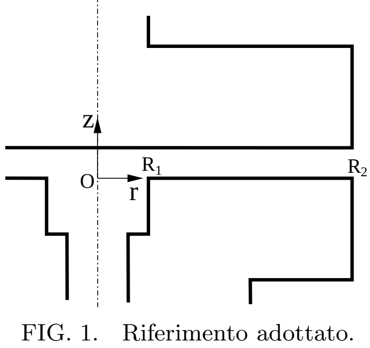

FIG. 1. Riferimento adottato.

Dalle equazioni di NS semplificate per il caso in esame (Eq. 4.47, 4.48 e 4.49 a pag. 120 del libro di testo), risulta $P = P(r)$. Per ora, conosciamo solo il gradiente di pressione fra le sezioni $r = R_1$ ed $r = R_2$ ma non sappiamo come vari la pressione in funzione del raggio.

Per scoprirlo, sfruttiamo il fatto di conoscere il profilo di velocità del fluido (eq. 4.56 a pag. 121 del testo) ed utilizziamo l'eq. 4.47 a pag. 120 del testo:

$$\begin{aligned} v_r(r,z) &= \frac{1}{2\mu r}\frac{-\Delta P}{\ln(R_2/R_1)}(hz - z^2) \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu r}\frac{\Delta P}{\ln(R_2/R_1)} \end{aligned} \tag{32}$$

Poichè risulta:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

dopo alcuni passaggi si trova:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{r}\frac{\Delta P}{\ln(R_2/R_1)} \tag{33}$$

ovvero:

$$\int_{p(R_2)=p_{atm}}^{p(r)} dP = \frac{\Delta P}{\ln(R_2/R_1)}\int_{R_2}^{r}\frac{1}{r}dr \tag{34}$$

Si trova:

$$\Delta P(r) = P(r) - P_{atm} = -\Delta P\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}. \tag{35}$$

Nota: $p(r = R_1) = p_{atm} - \Delta p$, $p(r = R_2) = p_{atm}$ come è giusto che sia.

La forza che il cuscinetto può sopportare è l'integrale di $\Delta P(r)$ per l'area su cui questo agisce:

$$\begin{aligned} F &= \int_{R_1}^{R_2}\left[-\Delta P\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}\right]\cdot 2\pi r dr = \\ &= 2\pi\frac{-\Delta P}{\ln(R_1/R_2)}\int_{R_1}^{R_2} r\ln(r/R_2)dr = \\ 2\pi\frac{-\Delta P R_2^2}{\ln(R_1/R_2)}&\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_2}\right)^2\ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right]_{R_1}^{R_2} = \\ &= \frac{\pi\Delta P}{\ln(R_1/R_2)}\left[R_1^2\ln\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)\right] \end{aligned} \tag{36}$$

ove l'integrale è risolvibile per parti ($\int udv = uv - \int vdu$) ponendo $u = \ln z$ e $dv = zdz$, con $z = r/R_2$.

d.

1. Le equazioni di continuità e di N-S risultano:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$$

Inoltre sono valide le ipotesi necessarie per poter applicare la teoria della lubrificazione essendo la variazione dello spessore del film nel tratto L piccola e piccolo lo spessore iniziale.

Dall'analisi adimensionale delle equazioni risulta che:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{37}$$

$$P = P(x) \tag{38}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{39}$$

ovvero in ogni sezione il profilo di velocità è quello che si avrebbe tra pareti piane e parallele.

2. La portata specifica lungo il piano si determina dal bilancio di massa fra due sezioni adiacenti poste a distanza x e $x + dx$ dall'origine del riferimento cartesiano scelto:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -\dot{q} = cost$$

e quindi, integrando e considerando che $\Gamma(x = 0) = \Gamma_0$ si ottiene:

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 - \dot{q}x \tag{40}$$

Il profilo di velocità nel film si ottiene dall'equazione (39).

Integrando e ponendo come condizioni al contorno:

- adesione alla parete $\rightarrow v_x(y = 0) = 0$
- taglio nullo all'interf. $\rightarrow \tau_{xy}(y = \delta(x)) = 0$

si ottiene:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{dP}{dx}\right)\left[2\delta(x)y - y^2\right] \tag{41}$$

Il gradiente di pressione $\frac{dP}{dx}$ è pari a $-\rho g \sin\alpha$, essendo:

$$P = P_0 + \rho g h \qquad e \qquad h = h_0 - x\sin\alpha$$

.

Lo spessore del film ad una generica posizione lungo il piano dipende dalla portata in quel punto:

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 - \dot{q}x = \rho \int_0^{\delta(x)} v_x(y) \cdot dy \tag{42}$$

Integrando n y, $\delta(x)$ risulta essere una costante di integrazione e si ottiene:

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 - \dot{q}x = \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{3\mu}\delta^3(x) \tag{43}$$

e quindi lo spessore risulta:

$$\delta(x) = \sqrt[3]{\frac{\Gamma_0 - \dot{q}x}{\rho^2 g \sin\alpha} 3\mu} \tag{44}$$

3. Il tempo che il fluido impiega per percorrere il tratto L dipende dalla velocità media del film:

$$< v_x(y) >= \frac{\Gamma(x)}{\rho\delta(x)} = \frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} \cdot \delta^2(x) \tag{45}$$

Il tempo impiegato è infatti dato da:

$$dx =< v_x(y) > dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dx}{< v_x(y) >}$$

e integrando si ottiene:

$$T = \int_0^L \frac{3\mu}{\rho g \sin\alpha} \cdot \frac{1}{\delta^2(x)} dx =$$

$$= \frac{3\mu}{\rho g \sin\alpha} \int_0^L \left[\frac{\rho^2 g \sin\alpha}{3\mu(\Gamma_0 - \dot{q}x)}\right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{3}{\dot{q}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\mu\rho}{g \sin\alpha}} \left[\sqrt[3]{\Gamma_0} - \sqrt[3]{\Gamma_0 - \dot{q}L}\right] \tag{46}$$

Esplicitando α si ricava l'angolo cercato ovvero:

$$\alpha = \arcsin\left\{\frac{3\mu\rho}{g}\left[\frac{3}{\dot{q}T}\left(\sqrt[3]{\Gamma_0} - \sqrt[3]{\Gamma_0 - \dot{q}L}\right)\right]^3\right\} \tag{47}$$

Per $\alpha < \bar{\alpha}$ la velocità media del fluido sarà inferiore a quella cui corrisponde il T minimo.

e. ______________________________

1. Possiamo utilizzare la teoria della lubrificazione e, ipotizzando che lo spessore di liquido sia piccolo rispetto al raggio del tubo cilindrico, si può impostare il problema in coordinate cartesiane. Sia x la coordinata nella direzione del flusso, che si sviluppa lungo una semi-circonferenza del tubo. Lo spessore del film è in ogni punto funzione della portata specifica secondo la relazione calcolata per il film piano (equazione 3.121, pag. 82):

$$\delta(x) = \sqrt[3]{\frac{3\mu\Gamma(x)}{\rho^2 g \sin\theta}} \tag{48}$$

ma in questo caso la portata specifica e l'inclinazione del piano risultano variabili da punto a punto. Per la portata specifica il bilancio di massa su un elemento infinitesimo di fluido fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = -\dot{q} \tag{49}$$

mentre per l'inclinazione vale la relazione geometrica $x = \theta R$. L'equazione 49 può essere agevolmente integrata con la condizione al contorno $\Gamma(X = \pi R) = 0$ che rappresenta la portata specifica al punto di distacco del tubo, e risulta $\Gamma(x) = \Gamma_0 - \dot{q}x$, ove Γ_0 rappresenta la portata specifica al punto di attacco. La portata presente al punto di attacco evaporerà completamete e sarà quindi data da $\Gamma_o = 2\Gamma(\pi R) = 2\dot{q}\pi R$, essendo 2 i lati del tubo.

2. Calcoliamo ora il profilo di velocità . Avremo:

$$v_z = 0 \tag{50}$$
$$v_x = v_x(\theta, y) \tag{51}$$
$$v_y \neq 0 \tag{52}$$

ma se $\delta/R \ll 1$ e $v_y/v_x \ll 1$ allora le equazioni di Navier Stokes approssimate diventano:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\mathrm{d}x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\mathrm{d}y^2} \tag{53}$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\mathrm{d}y} = 0 \rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}(x) \tag{54}$$

dove $\partial\mathcal{P}/\mathrm{d}x = -\rho g \sin\theta$. Lungo y, $\partial\mathcal{P}/\mathrm{d}y = 0$, da cui $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$. Integrando otteniamo:

$$v_x = -\frac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \tag{55}$$

Dalle condizioni al contorno di no-slip alla parete e free-slip all'intefaccia con l'aria otteniamo:

$$v_x(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \tag{56}$$
$$\mu \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \mid_{y=\delta} = 0 \rightarrow C_1 = \frac{\rho g \sin\theta\delta}{\mu} \tag{57}$$

da cui:

$$v_x = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu}\left(2\delta y - y^2\right) \tag{58}$$

3. Lo spessore del film si ricava considerando il bilancio:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = -\dot{q} \tag{59}$$

da cui, integrando $\Gamma(x) = \Gamma_0 - \dot{q}x$ per cui risulta:

$$\delta(\theta) = \sqrt[3]{\frac{3\mu(\Gamma_0 - \dot{q}x)}{\rho^2 g \sin\theta}} \tag{60}$$

f.

Per la distribuzione della velocità radiale $v_r(r, z)$ si può utilizzare l'espressione 4.56 a pag. 121, sezione 4.2.3 del libro che risulta essere:

$$v_r(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{-\Delta\mathcal{P}}{r \ln \frac{r}{R_1}} (hz - z^2) \tag{61}$$

essendo r la posizione del fronte di avanzamento del fluido all'istante t. Dall'equazione di conservazione della massa è possibile ricavare una espressione che lega il tempo di riempimento alle caratteristiche del sistema. É infatti:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}_{Variaz.\ vol.\ fluido} = \underbrace{Q_{in}}_{Portata\ vol.\ entrante} \tag{62}$$

e si ottiene:

$$V = \pi r^2 h \rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = \pi h (2r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}) \tag{63}$$

$$Q_{in} = \int_0^h v_r 2\pi r \mathrm{d}z = \frac{\pi}{6\mu} \frac{-\mathrm{d}P}{\ln(r/R_1)} h^3 \tag{64}$$

Uguagliando le equazioni 63 e 64 si ottiene:

$$2\pi r h \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{6\mu} \frac{-\Delta\mathcal{P}}{\ln r/R_1} h^3 \tag{65}$$

Semplificando alcuni termini si ottiene:

$$r \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \mathrm{d}r = \frac{-\Delta\mathcal{P}}{12\mu} h^2 \mathrm{d}t \tag{66}$$

e integrando tra la posizione radiale R_1 all'istante iniziale $t = 0$ e R_2 all'istante finale $t = \bar{t}$, si ha:

$$\int_{R_1}^{R_2} r \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \mathrm{d}r = \int_0^{\bar{t}} \frac{-\Delta\mathcal{P}}{12\mu} h^2 \mathrm{d}t \tag{67}$$

$$R_1^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 \ln\frac{r}{R_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\Delta\mathcal{P}}{12\mu} h^2 \bar{t} \tag{68}$$

e quindi:

$$\bar{t} = -\frac{12\mu}{\Delta\mathcal{P} h^2} R_1^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \ln\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \tag{69}$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene $\bar{t} = 0.287\ s$.