Soluzione Homework N^o 3

a.

1. Le ipotesi semplificative sono:
   - moto stazionario, laminare, completamente sviluppato ($\partial/\partial t = 0$, $\partial/\partial z = 0$)
   - fluido Newtoniano incomprimibile (ρ, μ = cost.)
   - moto di Couette piano con simmetria cilindrica ($\partial/\partial\theta = 0$)

   Il moto è unidirezionale: $v_r = v_\theta = 0$, $v_z = v_z(r)$.

   Le equazioni di N-S in coordinate cilindriche si semplificano come:

   componente r $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial r}$

   componente θ $\quad 0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}$

   componente z $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$

2. Dalle prime due componenti si ricava $P = p(z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz}$ e quindi dalla terza risulta:

$$\frac{dP}{dz} = \mu\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{1}$$

   dove il termine di sinistra è funzione di z e il termine di sinistra è funzione di r, che possono essere uguali solo se entrambe costanti. Integrando in r si ottiene:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\frac{r^2}{4} + A\ln r + B = v_z(r) \tag{2}$$

   Questo è il profilo di velocità generico nel caso di gradiente di pressione non nullo. Poiché , per ipotesi, il fluido viene trasportato per solo effetto di moto di uno dei due cilindri, l'equazione 2 si semplifica in:

$$A\ln r + B = v_z(r) \tag{3}$$

   Le costanti A e B si determinano dalle condizioni al contorno.

   Se il cilindro interno si muove:

   - $v_z(kR) = U$ adesione al cilindro interno
   - $v_z(R) = 0$ adesione alla parete fissa

   e sostituendo si ricava: $A = \frac{U}{\ln k}$ e $B = U\frac{\ln R}{\ln k}$ Quindi:

$$v_z(r) = \frac{U}{\ln k} \cdot \ln(\frac{r}{R}) \ . \tag{4}$$

   Se è il cilindro esterno a muoversi, le condizioni al contorno sono:

   - $v_z(kR) = 0$ adesione alla parete fissa
   - $v_z(R) = U$ adesione al cilindro esterno

   e si ricava: $A = -\frac{U}{\ln k}$ e $B = U\frac{\ln kR}{\ln k}$ ovvero:

$$v_z(r) = -\frac{U}{\ln k} \cdot \ln\left(\frac{r}{kR}\right) \ . \tag{5}$$

3. La potenza per mantenere il moto è data da:

$$P = \tau_{rz} \cdot 2\pi r L \cdot U \tag{6}$$

   Ma $\tau_{rz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} = \mu\frac{A}{r}$ e quindi:

$$P = 2\mu A\pi LU = \frac{2\mu\pi LU^2}{\ln k} \tag{7}$$

sia che si muova il cilindro interno che quello esterno. Valutando la potenza, risulta indifferente muovere il cilindro esterno o quello interno ai fini della dissipazione. Quella che varia nei due casi è la portata trasferita. Quantitativamente si può affermare che se $k \sim 1$, lo spessore di fluido è piccolo e la geometria cilindrica può essere approssimata con quella cartesiana. In queste condizioni il profilo di velocità sarebbe lineare come nel Couette piano. A parità di velocità del cilindro, la portata è direttamente proporzionale alla sezione di flusso e quando si muove la superficie esterna la porzione di area in cui la velocità del fluido è U è maggiore. Maggiore è quindi la portata trasferita. Alle stesse conclusioni si può arrivare integrando analiticamente i due profili di velocità . Si ottiene: $Q_{int} = \frac{\pi U R^2}{2\ln k}\left[k^2(1-\ln k) - 1\right]$ movimentando il cilindro interno e $Q_{est} = \frac{\pi U R^2}{2\ln k}\left[k^2 - 2\ln k - 1\right]$ movimentando il cilindro esterno. Pertanto:

$$\frac{Q_{est}}{Q_{int}} = -\frac{k^2 - k^2\ln k - 1}{k^2 - 2\ln k - 1} > 1 \tag{8}$$

essendo sia il numeratore che il denominatore quantità negative. Conviene quindi muovere il cilindro esterno perché a parità di potenza si movimenta più fluido.

b.

Il volume compreso tra i due cilindri, pari a $V = \pi(r_2^2 - r_1^2)L$ e occupato in egual misura dall'olio (fluido interno) e dall'acqua (fluido esterno), permette di ricavare per la posizione dell'interfaccia di separazione $r_i = \sqrt{(r_2^2 + r_1^2)/2} = 0.51\ m$. Nelle ipotesi di moto stazionario ($\partial\bullet/\partial t = 0$) e simmetria cilindrica ($u_r = u_z = 0$, $\partial \bullet /\partial\theta = 0$) si ricava che $u_\theta = u_\theta(r)$ e le equazioni di Navier-Stokes risultano:

☺ marchioli@uniud.it

$$-\rho\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \tag{9}$$

$$0 = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right] \tag{10}$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \tag{11}$$

Integrando la seconda equazione si ottiene per il profilo di velocità in ognuno dei due fluidi l'espressione:

$$u_\theta = \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r} \tag{12}$$

dove A e B rappresentano opportune costanti di integrazioni ricavabili imponendo le condizioni al contorno di adesione alle pareti (mobile e fissa) e di unicità del valore della velocità e del taglio in corrispondenza dell'interfaccia. Nel sistema di coordinate cilindriche il taglio è dato da

$$\tau_{r\theta} = \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = -\mu\frac{2B}{r^2} \tag{13}$$

Indicati con pedice 1 le grandezze relative al fluido interno (olio) e con pedice 2 le grandezze relative al fluido esterno (acqua), si hanno le seguenti condizioni al contorno:

$$\frac{A_1 r_1}{2} + \frac{B_1}{r_1} = v_{\theta,0} \tag{14}$$

$$\frac{A_2 r_2}{2} + \frac{B_2}{r_2} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{A_1 r_i}{2} + \frac{B_1}{r_i} = \frac{A_2 r_i}{2} + \frac{B_2}{r_i} \tag{16}$$

$$-\mu_1\frac{2B_1}{r_i^2} = -\mu_2\frac{2B_2}{r_i^2} \tag{17}$$

che risolto fornisce per le costanti i seguenti valori

$$A_1 = -5.6048 \cdot 10^{-1} \tag{18}$$

$$A_2 = -1.8868 \cdot 10^{1} \tag{19}$$

$$B_1 = 1.7006 \cdot 10^{-1} \tag{20}$$

$$B_2 = 2.5509 \tag{21}$$

Dall'andamento del profilo di velocità nei due fluidi è evidente che lo strato d'olio, grazie all'elevato valore di viscosità , si comporta quasi come un corpo rigido visto che esiste un piccolo gradiente di velocità tra punti diversi del fluido. Nello strato di acqua invece si ha una notevole variazione del valore di velocità .

La velocità media dei fluidi rispetto al cilindro fermo è calcolabile attraverso la portata

$$Q_1 = \int_{r_1}^{r_i} u_\theta^1 L\mathrm{d}r = \left[\frac{A_1}{4}(r_i^2 - r_1^2) + B_1 \ln\frac{r_i}{r_1}\right]L \tag{22}$$

$$Q_2 = \int_{r_i}^{r_2} u_\theta^2 L\mathrm{d}r = \left[\frac{A_2}{4}(r_2^2 - r_i^2) + B_2 \ln\frac{r_2}{r_i}\right]L \tag{23}$$

da cui si ricava:

$$\overline{u_\theta^1} = \frac{Q_1}{L(r_i - r_1)} \tag{24}$$

$$\overline{u_\theta^2} = \frac{Q_2}{L(r_2 - r_i)} \tag{25}$$

e sostituendo i valori numerici si ottiene: $\overline{u_\theta^1} = 0.195\ m/s$, che è molto prossimo alla velocità del cilindro interno, e $\overline{u_\theta^2} = 0.095\ m/s$.

La potenza necessaria per mantenere in rotazione con velocità $v_{\theta,0}$ il cilindro interno è data dal prodotto della forza di taglio agente alla superficie e la velocità

$$P = v_{\theta,0} \cdot \tau_1 \cdot 2\pi r_1 L \tag{26}$$

ed essendo il taglio:

$$\tau_1 = \mu_1\frac{\partial u_\theta^1}{\partial r}\,|_{r=r_1} = -\mu_1\frac{2B_1}{r_1^2} = 0,020405 N/m^2 \tag{27}$$

si ottiene $P = 0,01282\ W$.

c.

---

1. Si possono formulare le seguenti ipotesi semplificative:
   - fluido Newtoniano incomprimibile (μ e ρ cost)
   - flusso stazionario $\partial/\partial t = 0$
   - moto piano $\partial/\partial y = 0$
   - linee di flusso parallele alla parete ($v_x = v_y = 0 \Rightarrow v_z = v_z(x)$)

   Da cui le equazioni di N-S si riducono a:

   $$-\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{28}$$

   $$-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{29}$$

   $$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \tag{30}$$

   Dalle equazioni 28 e 29 si ottiene $P = P(z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz}$.

   L'equazione di continuità risulta:

   $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{31}$$

2. Integrando l'equazione 30, si ottengono il profilo generale di velocità :

   $$v_z(x) = -\frac{\rho g sin\beta}{2\mu}x^2 + Ax + B \tag{32}$$

ed il taglio:

$$\tau_{xz} = \mu\left[\left(-\frac{\rho g sin\beta}{\mu}\right)x + A\right] \quad (33)$$

dove $\frac{dP}{dz} = -\rho g sin\beta$ essendo $P(z) = p + \rho g h(z)$ con $h(z) = h_0 - z sin\beta$. Imponendo le condizioni al contorno all'interfaccia fluido-nastro e a quella fluido-aria:

$$v_z(x = \delta) = -U \;\Rightarrow\; B = \frac{\rho g sin\beta}{\mu}\delta^2 - U$$

$$\tau_{xz}(x = 0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$$

si ottiene:

$$v_z(x) = \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}(\delta^2 - x^2) - U \quad (34)$$

Attenzione: l'equazione è stata ottenuta prendendo come riferimento l'asse x ortogonale al nastro e diretto verso di esso (con origine sulla superficie libera) e l'asse z parallelo al nastro e in verso opposto alla velocità U dello stesso(**riferimento 1**).

Se l'asse x viene preso in verso opposto e con origine sul nastro (**riferimento 2**) le condizioni al contorno sono:

$$\tau_{xz}(x = \delta) = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}\delta$$

$$v_z(x = 0) = -U \;\Rightarrow\; B = -U$$

e quindi

$$v_z(x) = \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}(2\delta x - x^2) - U$$

3. Usando il riferimento 1, possiamo ora calcolare l' espressione della portata:

$$Q = \int_0^\delta v_z(x) \cdot W \cdot dx = W\left[\frac{\rho g sin\beta}{3\mu}\delta^3 - U\delta\right] \quad (35)$$

Da questa equazione di terzo grado in δ si può ricavare il valore dello spessore per tentativi.

4. La potenza spesa per mantenere il nastro in moto è :

$$Pot = \tau_{zx} \cdot WL \cdot (-U) = \rho g U(\delta W L) sin\beta \quad (36)$$

essendo:

$$\tau_{zx} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial x}\bigg|_{x=\delta} = -\rho g \delta sin\beta \quad (37)$$

5. Partendo dallo stesso profilo generale di velocità ricavato sopra (eq. 32) e imponendo le nuove condizioni al contorno:

$$v_z(x = \delta) = -U \;\Rightarrow\; B = -U + \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}\delta^2 + \frac{\tau_i}{\mu}\cdot\delta$$

$$\tau_{xz}(x = 0) = -\tau_i \;\Rightarrow\; A = -\frac{\tau_i}{\mu}$$

si ottiene:

$$v_z(x) = \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}(\delta^2 - x^2) + \frac{\tau_i}{\mu}(\delta - x) - U$$

per il riferimento 1, e

$$v_z(x = 0) = -U \;\Rightarrow\; B = -U$$

$$\tau_{xz}(x = \delta) = +\tau_i \;\Rightarrow\; A = \frac{\tau_i}{\mu} + \frac{\rho g sin\beta}{\mu}\delta$$

$$v_z(x) = \frac{\rho g sin\beta}{2\mu}(2\delta x - x^2) + \frac{\tau_i}{\mu}x - U$$

per il riferimento 2.

Il segno del taglio è negativo nel primo sistema di riferimento perchè pur essendo diretto nella direzione dell'asse z siamo dalla parte negativa dell'asse x (e per la convenzione del segno del taglio: superfici ad un valore di coordinata maggiore esercitano sforzo di taglio positivo se è diretto lungo l'asse di riferimento).

6. Con riferimento al sistema di coordinate 1, la nuova espressione della portata è :

$$Q = \int_0^\delta v_z(x) \cdot W \cdot dx = W\left[\frac{\rho g sin\beta}{3\mu}\delta^3 + \frac{\tau_i}{2\mu}\delta^2 - U\delta\right] \quad (38)$$

Come al punto 3, da questa equazione di terzo grado in δ si può ricavare il valore dello spessore per tentativi.

Nelle espressioni 35 e 38 della portata Q risultano riconoscibili rispettivamente i contributi di Poiseuille $\left(\frac{\rho g sin\beta\delta^3}{3\mu}\right)$, del taglio $\left(\frac{\tau_i\delta^2}{2\mu}\right)$ e di Couette $(U\delta)$. I primi due contributi sono positivi e determinano la portata discendente mentre il terzo contributo è negativo e determina la portata ascendente. A parità di Q la portata discendente - somma dei primi due termini dell'equazione (38), primo termine dell'equazione (35) - è maggiore nel caso in cui ci sia un taglio non nullo all'interfaccia fluido-aria, per cui il contributo ascendente dovrà risultare maggiore. Pertanto lo spessore deve essere maggiore nel secondo caso. Tuttavia, poiché all' aumentare dello spessore δ la portata ascendente aumenta linearmente mentre quella discendente aumenta come δ^3 e δ^2, le velocità U dovrà essere sufficientemente elevata per poter effettivamente trasportare verso l'alto il liquido.

d.

---

1. Si tratta di un moto piano per il quale le equazioni di Navier-Stokes si presentano nella forma:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0 \tag{41}$$

con $\partial \mathcal{P}/\partial x = 0$ dal momento che il moto del fluido è generato dal nastro trasportatore. Il profilo di velocità risulta quindi lineare:

$$u_x(y) = Ay + B \tag{42}$$

Assumendo un riferimento cartesiano con origine sul nastro trasportatore e asse y diretto verso l'alto, le costanti A e B sono determinate dalle condizioni al contorno di aderenza alla parete e di taglio nullo all'interfaccia superiore del fluido per cui risulta:

$$u_x(y = 0) = U \rightarrow B = U = 0.2\ m/s \tag{43}$$

$$\tau_{xy}(y = \delta) = 0 \rightarrow A = 0 \tag{44}$$

ovvero il profilo di velocità nel fluido è costante e pari alla velocità del nastro: $u_x(y) = U$. Ciò è ovvio poiché è nullo il gradiente di pressione e non c'e' taglio all'interfaccia, sicché l'unica causa per cui il fluido è movimentato è il moto del nastro trasportatore. Pertanto, la portata risulta:

$$Q = \int_0^\delta \int_0^W u_x(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}z = WU\delta = = 1.6 \cdot 10^{-4} m^3/s \tag{45}$$

essendo W l'ampiezza del nastro.

2. Nel caso che il nastro sia inclinato verso il basso, si instaura un gradiente di pressione in direzione del deflusso per cui le equazioni di Navier-Stokes risultano leggermente modificate:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{46}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = \rho g \cos\alpha \tag{47}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0 \tag{48}$$

essendo $\alpha = 10\circ$. Il profilo di velocità diventa pertanto parabolico:

$$u_x(y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} y^2 + Ay + B \tag{49}$$

e, utilizzando condizioni al contorno identiche al caso precedente si ricavano:

$$B = U \tag{50}$$

$$A = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \delta \tag{51}$$

La velocità risulta quindi

$$u_x(y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} \left(y^2 - 2\delta y\right) + U \tag{52}$$

e la portata è ottenibile come prima integrando le velocità sulla sezione di flusso:

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta u_x(y) dy dz = \left(\frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} \delta^3 + wU\delta\right) W$$

Questa equazione lega la portata del flusso allo spessore del film e, nota la portata $Q = 2 \cdot 10^{-3} m^3/s$, è possibile determinare lo spessore δ risolvendo l'equazione di terzo grado. Si ottiene $\delta = 8.91\ mm$.