Soluzione Homework N^o 2

a.

Per calcolare come varia la densità dell'aria misurata dagli strumenti di bordo al variare del tempo è sufficiente riconoscere che tale grandezza non è altro che la derivata sostanziale. Si ha quindi:

$$\frac{D\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{1}$$

e sostituendo:

$$\frac{D\rho}{\mathrm{d}t} = 0 + 2\rho_0 a v_x x + 2\rho_0 a v_y y - \rho_0 b v_z e^{-bz} \tag{2}$$

dove:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \ (x_0 = 0 \text{ per hp!}) \\ y &= y_0 + v_y t \ (y_0 = 0 \text{ per hp!}) \\ z &= z_0 + v_z t \ (z_0 = 15000\ ft \text{ per hp!}) \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella derivata sostanziale, si ottiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 2a\rho_0(v_x^2 t + v_y^2 t) - b\rho_0 v_z \cdot e^{-b(z_0+v_z t)} \tag{3}$$

L'andamento della densità misurata al variare del tempo è pertanto:

$$\rho(t) = 2a\rho_0(v_x^2 + v_y^2)\frac{t^2}{2} + \rho_0 e^{-b(z_0+v_z t)} + \rho_0 \tag{4}$$

Facendo le dovute conversioni sui dati (1 ft = 0.3048 m, 1 mph = 1610 m/h, 1 mph = 5282.15 ft/h) e sostituendo i valori numerici nell'equazione trovata, otteniamo:

$$\rho(t) = 0.075 \cdot [6.30510^6 t^2 + 0.223 \cdot (e^{5.282t} - 1)] \tag{5}$$

con t espresso in ore.

b.

Utilizzando il teorema della divergenza:

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV \tag{6}$$

e notando che, per un fissato volume di controllo vale:

$$\int_V \frac{d.}{dt}dV = \frac{d}{dt}\int_V dV \tag{7}$$

si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u} \ \rightarrow \\ &\int_V \frac{d\rho}{dt}dV = -\int_V \rho\nabla\cdot\mathbf{u}dV \rightarrow \\ &\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS \end{aligned} \tag{8}$$

c.

Vedi libro di testo, esercizio 2.1) a pag. 71.

d.

Poiché il flusso è puramente radiale e velocità e pressione sono solo funzione di r, il bilancio di massa per il guscio cilindrico situato a raggio r e di spessore dr può essere espresso come:

$$2\pi Lr\mathrm{d}r\frac{\partial\rho}{\partial t} = 2\pi\rho Lrv_r(r) - 2\pi\rho L(r+\mathrm{d}r)v_r(r+\mathrm{d}r) \tag{9}$$

Sviluppando in serie di Taylor $v_r(r+\mathrm{d}r)$, eliminando i termini infinitesimi di ordine superiore al primo e semplificando, si ottiene:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} - \rho\frac{v_r}{r} \tag{10}$$

Per fluido incomprimibile in moto stazionario, il primo termine dell'equazione è zero. Risulta quindi che:

$$\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad . \tag{11}$$

Integrando si ottiene:

$$v_r = \frac{C}{r} \tag{12}$$

dove C è una costante di integrazione che va determinata imponendo la condizione al contorno. Come condizione al contorno utilizziamo la portata volumetrica attraverso la superficie del cilindro, che è nota:

$$Q = 2\pi RLv_r(R) = 2\pi RL\left(\frac{C}{R}\right) = 2\pi LC \tag{13}$$

da cui:

$$C = \frac{Q}{2\pi L} \tag{14}$$

Concludendo, si ottiene:

$$v_r(r) = \frac{Q}{2\pi rL} \tag{15}$$

In condizioni di regime stazionario, quindi, la soluzione trovata deriva semplicemente dalla definizione di portata volumetrica attraverso la generica superficie cilindrica di raggio r:

$$Q = 2\pi rLv_r(r) \rightarrow v_r(r) = \frac{Q}{2\pi rL} \tag{16}$$

Ovviamente, ciò non è più vero in condizioni non stazionarie.

☺ marchioli@uniud.it

e.

Dalla conservazione della portata si ottiene:

$$A_{tot} < v_z >= A_1 v_1 + A_2 v_2 \rightarrow$$
$$\pi R_2^2 < v_z >= \pi R_1^2 v_1 + (\pi R_2^2 - \pi R_1^2) v_2 \tag{17}$$

da cui:

$$< v_z >= v_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + v_2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] = 0.545 m/s \tag{18}$$

f.

Sia H il punto intermedio della corda AB. Si ricava:

$$AH = HB = \sqrt{R^2 - (0.4R)^2}, A\hat{O}B = 134^\circ$$

$$A_{AOH} = A_{OBH} = 0.183R^2$$

$$A_{settore\ circolare} = \pi R^2 \frac{A\hat{O}B}{360} = 1.17R^2$$

$$A_{segmento\ circ.\ sup.} = 1.17R^2 - 2 \cdot (0.183R^2) = 0.8R^2$$

$$A_{segmento\ circ.\ inf.} = \pi R^2 - 0.8R^2 = 2.34R^2$$

Pertanto la velocità media risulta:

$$< v_z >= \frac{0.8R^2 \cdot v_2 + 2.34R^2 \cdot v_1}{\pi R^2} = 1.076\ m/s \tag{19}$$

g.

Vedi libro di testo, esercizio 6) a pag. 92 con $h = 2H/3$ ovvero $k = 2/3$.

h.

1. Il moto è dovuto esclusivamente al moto del cilindro interno, essendo nullo il gradiente di pressione (moto di Couette). Le equazioni di *N-S* risultano:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0$$

da integrare con le condizioni al contorno di fluido fermo alla parete esterna ($v_x(y = 0) = 0$) e di fluido che si muove solidalmente col cilindro interno ($v_x(y = h) = \Omega R$). Il profilo di velocità risulta:

$$v_x(y) = \frac{\Omega R}{h} y \tag{20}$$

mentre la portata alimentata è pari a:

$$Q =< v_x(y) > \cdot A =$$
$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h v_x(y) dy\right) \cdot (hW) = \frac{\Omega R}{2} \cdot (hW) \tag{21}$$

ossia, in termini di portata volumetrica per unità di larghezza del cilindro:

$$\frac{Q}{W} = \frac{\Omega R h}{2}. \tag{22}$$

i.

1. Le assunzioni di stazionarietà ($\partial \bullet / \partial t = 0$), indipendenza da y ($\partial \bullet / \partial y = 0$), unidirezionalità ($v_y = 0$), portano a semplificare l'equazione di continuità in:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

e le equazioni di Navier-Stokes in:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \tag{23}$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{24}$$

L'equazione 24 implica che la distribuzione della pressione lungo z è idrostatica: $\Delta p = -\rho g H$.

2. Dal punto precedente ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_C - p_B}{L} = \frac{\Delta p}{L} = -\rho g \frac{H}{L}. \tag{25}$$

L'equazione 23 può quindi essere integrata con le due condizioni al contorno $v_x(z = 0) = v_x(z = \delta) = 0$ (nastro fermo). La velocità risulta quindi:

$$v_x(z) = \frac{\rho g H \delta^2}{2\mu L} \left[\frac{z}{\delta} - \left(\frac{z}{\delta}\right)^2\right] \tag{26}$$

Calcolando la velocità media:

$$< v_x(z) >= \frac{1}{\delta}\int_0^\delta v_x(z) dz = \frac{\rho g H \delta^2}{12\mu L} \tag{27}$$

si ottiene la portata (qui espressa per unità di larghezza del nastro):

$$\frac{Q}{W} = \frac{\rho g H \delta^3}{12\mu L} \tag{28}$$

3. Il moto del nastro comincia quando la forza esercitata dal fluido raggiunge il valore critico F_s, uguagliando in tal modo il taglio alla parete superiore. Dall'equazione (26) si può calcolare lo sforzo di taglio:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\mathrm{d}v_x(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\delta} = -\frac{\rho g H \delta}{2L}.$$

Se F_s è il valore assoluto della forza resistente, il segno del taglio che essa genera è negativo. Pertanto:

$$\tau_w = \rho g \frac{H\delta}{2L} = -\tau_s = -\frac{F_s}{LW}$$

da cui si ricava:

$$H = \frac{2F_s}{\rho g \delta W}$$

Questo valore si può ricavare anche facendo il bilancio di forze:

$$\Delta p \cdot (\delta W) = F_s + F_w$$

dove F_w è la forza esercitata sulla parete di fondo ed è , nel caso di H critico, $F_s = F_w$. Pertanto:

$$2F_s = -\Delta p \cdot (\delta W) = \rho g H \delta W \rightarrow \ H = \frac{2F_s}{\rho g W \delta}.$$

4. Una volta raggiunte le condizioni stazionarie in questa nuova situazione, il profilo di velocità si può ricavare integrando l'equazione (23) con le condizioni al contorno:

$$\mu \frac{\mathrm{d}v_x(z)}{\mathrm{d}z}\,|_{z=\delta} = -\tau_s = -\frac{F_s}{LW} \quad \text{e} \quad v_x(z=0) = 0$$

Quindi il profilo è ancora parabolico di tipo:

$$v_x(z) = -\frac{\rho g H}{2\mu L} z^2 + Cz \tag{29}$$

dove la costante C si ricava imponendo imponendo che v_z soddisfi l'equazione (29). Il profilo di velocità risulta:

$$v_x(z) = \frac{\rho g H \delta^2}{2\mu L}\left[\frac{2z}{\delta} - \left(\frac{z}{\delta}\right)^2\right] - \frac{\tau_s}{\mu} z \tag{30}$$

e la portata per unità di larghezza del nastro è :

$$\frac{Q}{W} = \frac{\rho g H \delta^3}{3\mu L} - \frac{\tau_s \delta^2}{2\mu}\ . \tag{31}$$