Soluzione Homework N^o 1

a.

1.

$$\nabla \times \nabla P = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Sviluppando il determinante della matrice si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right)\bar{j} + \\ + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}\right)\bar{k} \tag{2}$$

La precedente risulta essere ovviamente uguale a zero per il noto teorema di Schwartz, secondo il quale la derivata mista di una funzione continua è indipendente dall'ordine di derivazione.

2.

$$\nabla \cdot (\mathcal{P}\ \mathbf{v}) = \mathcal{P}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{P} \tag{3}$$

Si ha:

$$\nabla \cdot (\mathcal{P}\ \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathcal{P} v_i}{\partial x_i} \tag{4}$$

$$\mathcal{P}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{P} = \mathcal{P}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{P} v_i}{\partial x_i} \tag{5}$$

3.

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{6}$$

Si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} \\ +(u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \tag{7}$$

per cui:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \\ u_2\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_3\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_3\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ +u_3\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_1\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - u_1\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - v_3\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ +u_1\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + v_2\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - u_2\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - v_1\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \tag{8}$$

Per i termini a destra dell'uguale nell'identità (6) si ha:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i} \\ + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{k} \tag{9}$$

per cui:

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = v_1\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \\ v_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + v_3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{10}$$

Allo stesso modo:

$$-\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = -u_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \\ -u_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + -u_3\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{11}$$

Uguagliando la (8) con le (10), (11) si verifica l'identità di partenza.

4. Questo punto si risove in maniera simile al precedente per cui se ne riporta solamente la soluzione in forma compatta.

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \\ \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{12}$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \\ \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \sum_j \partial_j \sum_{k,l,m} \epsilon_{klm} \sum_{r,m} v_r u_m = \\ \sum_{i,j} [\partial_j(v_i u_j) - \partial_j(v_j u_i)] = \\ v(\nabla \cdot u) + (u \cdot \nabla)v - u(\nabla \cdot v) - (v \cdot \nabla)u$$

b.

1.

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{e_i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{e_j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{e_k} \tag{13}$$

☺ marchioli@uniud.it

2.

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (14)$$

3.

$$\theta = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \qquad (15)$$

c.

---

1. Nell'ipotesi di gravità trascurabile la condizione di equilibrio è $\mathbf{F}_I = F_D$ essendo $F_B = 0$ e $F_G = 0$. Risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u}) = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi D^2}{4} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \mid \mathbf{v} - \mathbf{u} \mid \quad . \qquad (16)$$

Poichè il fluido in cui si muovono le goccioline di combustibile è fermo, $\mathbf{v} = 0$. Inoltre $\mathbf{u}$ avrà una sola componente non nulla lungo x in quanto non sono presenti forze lungo y nè c'è una componente iniziale di velocità in tale direzione. Si ottiene l'equazione scalare:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot u) = -\frac{1}{2} C_D \frac{\pi D^2}{4} \rho u^2 \qquad (17)$$

Poichè siamo in regime di Stokes, $C_D = \frac{24}{Re}$. La massa m è costante e vale $m = \rho_P \frac{\pi D^3}{6}$, quindi

$$\rho_D \frac{\pi D^3}{6} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} \frac{24\mu}{\rho u D} \frac{\pi D^3}{4} \rho u^2 \qquad (18)$$

Si trova

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau_P} \qquad (19)$$

avendo posto $\tau_P = D^2 \rho_P / 18\mu$ e integrando si ha

$$\ln u = -\frac{t}{\tau_P} + C' \qquad (20)$$

$$u(t) = C \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right) \quad . \qquad (21)$$

Dalle condizioni iniziali si sa che $u(0) = v_i$, quindi $C = v_i$ e

$$u(t) = v_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right) \quad . \qquad (22)$$

Integrando rispetto al tempo la velocità si ricava lo spostamento

$$x(t) = -\tau_P v_i \exp(-\frac{t}{\tau_P}) + C \quad . \qquad (23)$$

Se consideriamo $x(0) = 0$ risulta $C = \tau_P v_i$ per cui

$$x(t) = \tau_P v_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right)\right] \quad . \qquad (24)$$

La massima distanza raggiunta sarà

$$x_{max} = \lim_{t \to +\infty} x(t) = v_i \tau_p \quad . \qquad (25)$$

2. Si tratta anche in questo caso di risolvere l'equazione $F_I = F_D$ considerando che la massa non è più costante nel tempo. La conservazione della massa è espressa dall'equazione

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -K\pi D^2 \qquad (26)$$

in cui il segno - tiene conto del fatto che la massa diminuisce nel tempo proporzionalmente alla superficie. La massa è data da

$$m = \rho_P \frac{\pi D^3}{6} \quad .$$

Poichè ρ_P è costante le equazioni diventano

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho_P \frac{\pi}{6} \frac{\mathrm{d}D^3(t)}{\mathrm{d}t} = -K\pi D^2(t) \qquad (27)$$

e

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\frac{2K}{\rho_P} \ . \qquad (28)$$

Dall'integrazione della 28 risulta

$$D(t) = -\frac{2Kt}{\rho_P} + C$$

e tenendo conto della condizione iniziale $D(0) = D_i$ si ha

$$D(t) = -\frac{2Kt}{\rho_P} + D_i$$

Consideriamo l'equazione iniziale. Valutiamo i due termini F_I e F_D:

$$F_I = \frac{\mathrm{d}(m \cdot u)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} u + m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad (29)$$

con

$$m = \frac{\pi}{6} \rho_P D^3(t) \qquad (30)$$

e

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -K\pi D^2(t) \tag{31}$$

per cui si ricava

$$F_I = -K\pi D^2(t)u + \frac{\pi}{6}\rho_P D^2(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{32}$$

e

$$F_D = -\frac{1}{2}\frac{24\mu}{\rho u D}\frac{\pi D^2}{4}\rho u^2 = -3\mu\pi D(t)u \tag{33}$$

Uguagliando i due termini si ottiene

$$-K\pi D^2(t)u + \frac{\pi}{6}\rho D^2(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -3\mu\pi D(t)u \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{18\mu}{D^2\rho_P} + \frac{6K}{D\rho_P}\right)u \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \left(\frac{6K}{D\rho_P} - \frac{18\mu}{D^2\rho_P}\right)\mathrm{d}t \tag{36}$$

Integrando:

$$\ln(u) = -3\ln\left(D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}\right) - 9\mu\frac{1}{\left(D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}\right)} + C' \tag{37}$$

$$u(t) = C\left(D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}\right)^{-3}\exp\left[-\left(\frac{9\mu}{K}\frac{1}{D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}}\right)\right] \tag{38}$$

con

$$C = v_i D_i^3 \exp\left(\frac{9\mu}{KD_i}\right) \tag{39}$$

La distanza percorsa dalle particelle in funzione del tempo è pertanto:

$$x(t) = \int_0^t u(t)\ dt =$$

$$C\int_0^t \left(D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}\right)^{-3}\exp\left[-\left(\frac{3\mu}{K}\frac{1}{D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}}\right)\right]dt \tag{40}$$

Questo complicato integrale può essere risolto tramite la seguente sostituzione di variabili di integrazione:

$$D_i - \frac{2Kt}{\rho_P} = \frac{1}{z} \rightarrow dt = \frac{\rho_p}{2K}\frac{dz}{z^2} \tag{41}$$

L'equazione (40) diventa:

$$\begin{aligned} x(t) &= C'\int_{z_1}^{z_2} z^3 exp\left[-\left(\frac{3\mu}{K}\right)z\right]\left(-\frac{dz}{z^2}\right) \\ &= -C'\int_{z_1}^{z_2} z\ exp\left[-\left(\frac{3\mu}{K}\right)z\right]dz \end{aligned} \tag{42}$$

con $C' = C \cdot (\rho_p/2K)$. L'integrale (42) si può risolvere per parti ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$) ponendo:

i) $u = z \rightarrow du = dz$

ii) $dv = exp\left[-\frac{3\mu}{K}z\right]dz \rightarrow v = -\frac{K}{3\mu}exp\left[-\left(\frac{3\mu}{K}\right)z\right]$

L'integrale (42) fornisce quindi:

$$x(t) = C''\left[\frac{1}{D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}} \cdot e^{-\frac{3\mu}{K}\cdot\frac{1}{D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}}} - \frac{1}{D_i}\cdot e^{-\left(\frac{3\mu}{K\cdot D_i}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{K}{3\mu}\left(e^{-\left(\frac{3\mu}{K}\cdot\frac{1}{D_i - \frac{2Kt}{\rho_P}}\right)} - e^{-\left(\frac{3\mu}{K}\cdot\frac{1}{D_i}\right)}\right)\right] \tag{43}$$

d.

Il moto delle particelle è determinato dall'equazione della dinamica della sfera:

$$m_p\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F_D} + \mathbf{F_B} + \mathbf{F_G} + \mathbf{F_E} \tag{44}$$

In condizioni di moto stazionario il membro sinistro scompare. Nell'ipotesi di regime di Stokes la forza di drag è

$$\mathbf{F_D} = 3\pi\mu D_p(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \tag{45}$$

La somma delle forze di gravità e galleggiamento è

$$\mathbf{F_G} + \mathbf{F_B} = \mathbf{g}\frac{\pi D_p^3}{6}(\rho - \rho_p) \tag{46}$$

La forza elettrica è

$$\mathbf{F_E} = q_e\mathbf{E} = q_e\frac{V}{d} \tag{47}$$

con d distanza tra le piastre.

1. Per la camera a gravità le direzioni rilevanti per ilmoto della particella sono quella del flusso (x) e la direzione verticale (z). Dall'equilibrio delle forze in direzione x si ha $F_{D,x} = 0$, da cui $v_{p,x} = v = Q/WH$. In direzione verticale, con asse z verso l'alto, si ha

$$3\pi\mu(v_z - v_{p,z}) + g\frac{\pi D_p^3}{6}(\rho - \rho_p) = 0 \qquad (48)$$

da cui, essendo $v_z = 0$,

$$v_{p,z} = -\frac{gD_p^2(\rho_p - \rho)}{18\mu} < 0 \qquad (49)$$

La velocità è negativa perchè la particella si deposita. Per dimensionare la camera a gravità , si sa che il tempo per percorrere la distanza verticale e la lunghezza della camera è lo stesso, per cui

$$t_V = \frac{H}{v_{p,z}} = t_O = \frac{L}{v} \qquad (50)$$

da cui

$$L = \frac{18\mu Q}{gWD_p^2(\rho_p - \rho)} = 4.95\ m \qquad (51)$$

2. Per il precipitatore elettrostatico le direzioni rilevanti per il moto delle particelle sono la direzione del flusso (x) e la direzione trasversale (y). Dall'equilibrio delle forze in direzione x si ha ancora $F_{D,x} = 0$, da cui $v_{p,x} = v = Q/Hd$. In direzione trasversale si ha

$$\frac{q_p V}{d} - 3\pi\mu D_p v_{p,y} = 0 \qquad (52)$$

da cui

$$v_{p,y} = \frac{q_p V}{3\pi\mu D_p d} \qquad (53)$$

Se il precipitatore deve raccogliere le particelle, esse devono percorrere la distanza tra le piastre nello stesso tempo in cui avanzano nella direzione del flusso, per cui

$$t_T = \frac{d}{v_{p,y}} = t_O = \frac{L}{v} \qquad (54)$$

da cui

$$V = \frac{3\mu\pi D_p Q d}{LHq_p} = 1413.7\ V \qquad (55)$$

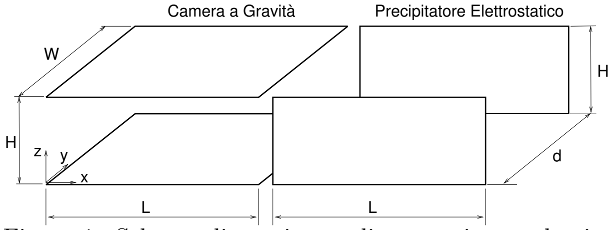

Figura 1. Schema di un sitema di separazione polveri coswtituito da una camera a gravità e da un precipitatore elettrostatico posti in serie.

e.

La distribuzione di pressione sulla superficie della sfera può essere scritta come:

$$p(\theta, \varphi) = \rho g(H - R \cdot \cos\theta) \qquad (56)$$

La forza di pressione è quindi:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = p(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}A \qquad (57)$$

dove l'area dell'elemento infinitesimo della superficie della sfera è pari a $\mathrm{d}A = R\sin\theta\mathrm{d}\varphi \cdot R\mathrm{d}\theta = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

Le componenti orizzontali della forza di pressione (lungo gli assi x ed y, se l'asse z è preso verticale) si annullano a vicenda a causa della simmetria assiale del problema e quindi possono essere trascurate.

Anche non accorgendosi della simmetria si ricava comunque analiticamente che F_x ed F_y risultano nulle.

La normale entrante nella sfera è

$$\mathbf{n}\ = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta)$$

la componente lungo x della forza è pari a

$$F_x = \int_{\theta,\varphi} -\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \sin\theta\cos\varphi \cdot \qquad (58)$$

$$R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (59)$$

quella lungo y a

$$F_y = \int_{\theta,\varphi} -\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \sin\theta\sin\varphi \cdot \qquad (60)$$

$$R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (61)$$

ed infine quella lungo z a

$$F_z = \int_{\theta,\varphi} -\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \quad (62)$$

Sviluppando il doppio integrale:

$$F_x = R^2\int_0^{\pi} -\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \qquad (63)$$

$$F_y = R^2\int_0^{\pi} -\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \qquad (64)$$

$$F_z = R^2\int_0^{2\pi} -\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi}\rho g(H - R\cos\theta) \cdot \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$(65)$$

Negli integrali (63) e (64) il secondo fattore è nullo come sopra anticipato. La componente lungo z invece risulta:

$$F_z = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \rho g V \tag{66}$$

diretta verso l'alto, che è esattamente pari alla forza di Archimede.

f.

---

1. Per risolvere questo problema è necessario sfruttare la spinta di Archimede che si crea spostando il volume V_0 di acqua dall'interno della nave. É un problema di statica, per cui realizzando un equilibrio di forze in direzione verticale deve accadere che:

   $$F_S + F_P + F_G = 0 \tag{67}$$

   dove

   $$F_S = C_S g \tag{68}$$

   è la forza di sollevamento diretta verso l'alto,

   $$F_P = mg \tag{69}$$

   è la forza peso diretta verso il basso ed

   $$F_G = \rho g V_O \tag{70}$$

   è la forza di galleggiamento che spinge la barca verso l'alto. Sostituendo tali espressioni nella (67) si ottiene:

   $$mg = C_S g + \rho g V_0 \tag{71}$$

   e quindi

   $$V_0 = \frac{m - C_S}{\rho} = 200m^3 \tag{72}$$

2. In questo caso, per calcolare la pressione relativa dell'aria nella barca capovolta sfrutto il fatto che ad un certo livello di profondità la pressione all'interno della barca e all'esterno, sotto il livello del mare, è la stessa

   $$p_{aria} = p_{atm} + \rho g(30 - h) \tag{73}$$

   $$h = \frac{V - V_0}{30 * 10} = 9.3m \tag{74}$$

   $$p_{aria} = 304040Pa \tag{75}$$

   $$p_{aria} - p_{atm} = 203740Pa = \Delta P_{rel} \tag{76}$$

g.

Il pallone si ferma all'altezza $\bar{z}$ alla quale le forze agenti (peso e galleggiamento) sono all'equilibrio:

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_B = 0 \tag{77}$$

La forza peso è data da $\mathbf{F}_G = (m_p + m_g)\mathbf{g}$ e la forza di galleggiamento è $\mathbf{F}_B = -\rho V g$, con V volume del pallone sonda $\left(V = \frac{4\pi}{3}R_0^3\right)$ e ρ densità dell'aria (funzione dell'altezza). Poiché per la distribuzione della pressione in aria $dp = -\rho g dz$ si ricava che:

$$\rho(z) = \frac{Mp_0}{RT_0} \cdot \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R\alpha} - 1} \tag{78}$$

e dall'equazione dell'equilibrio delle forze refforze

$$m_p + m_g = \rho(\bar{z}) \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

$$\rho(\bar{z}) = \frac{3}{4\pi R_0^3}(m_p + m_g) = \frac{Mp_0}{RT_0} \cdot \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R\alpha} - 1} \tag{79}$$

Risovendo l'equazione 79 rispetto a $\bar{z}$ si ottiene:

$$\bar{z} = \frac{1}{\alpha} T_0 \left[1 - \left(\frac{3(m_p + m_g)RT_0}{4\pi R_0^3 M p_0}\right)^{\frac{R\alpha}{Mg - R\alpha}}\right] = 3943.5m \tag{80}$$