FLUIDODINAMICA, AA 2018/2019

II Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

17 Gennaio 2019

1

Una semisfera di raggio R è dotata di un foro di raggio $R_0 << R$ sulla sommità. Attraverso tale foro viene alimentata una portata Q $[m^3/s]$ di olio viscoso (avente densità ρ $[kg/m^3]$ e viscosità μ $[Pa \cdot s]$ note), che scorre verso il basso formando un film di spessore δ molto piccolo rispetto al raggio della sfera.

1. Semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes, enunciando chiaramente le ipotesi fatte. [5%]
2. Determinare l'espressione del gradiente di pressione equivalente che agisce sul film. [5%]
3. Determinare il profilo di velocità nel film. [10%]
4. Determinare l'espressione per lo spessore δ al bordo del foro di alimentazione ($\theta = \theta_0$) e all'equatore della semisfera ($\theta = 90$). [15%]
5. Calcolare la potenza dissipata dal fluido a contatto con la parete della sfera. [15%]

2

L'acquedotto rappresentato in figura viene utilizzato per trasferire una portata $Q_{AN} = 0.18$ m^3/s di acqua ($\rho = 1000$ kg/m^3, $\mu = 0,001$ $Pa \cdot s$) da un serbatoio di stoccaggio (serbatoio A in figura) alle diverse utenze (serbatoi B e C in figura). Tutti i rami del circuito si trovano alla stessa quota verticale ed hanno lo stesso diametro D. La tubazione è liscia ($f = 0,079 Re^{-0.25}$) e si può assumere costante il livello di acqua nei vari serbatoi. Trascurando le perdite di carico concentrate, si chiede di:

1. Determinare le portate Q_{NB} e Q_{NC} se le valvole installate nel circuito sono completamente aperte. [10%]
2. Determinare il valore della pressione p_N al nodo N quando $Q_{NB} = 2Q_{NC}$ ed il diametro della tubazione risulta essere pari a $D = 0,35$ m. [10%]
3. Determinare il valore del diametro ottimo D ~~ed il valore della potenza della pompa~~ quando $Q_{NB} = 2Q_{NC}$, sapendo che l'impianto deve funzionare 8000 ore all'anno per 20 anni e che i costi sono i seguenti: $K_T = 100$ EUR/m^2 (costo specifico della tubazione), $K_P = 2000$ EUR/kW (costo specifico della pompa), $K_E = 1$ EUR/kWh (costo specifico di esercizio). [25%]
4. Utilizzando il valore del diametro ottimo calcolato al punto precedente, determinare la potenza della pompa e le velocità dell'acqua nei vari rami del circuito. [5%]

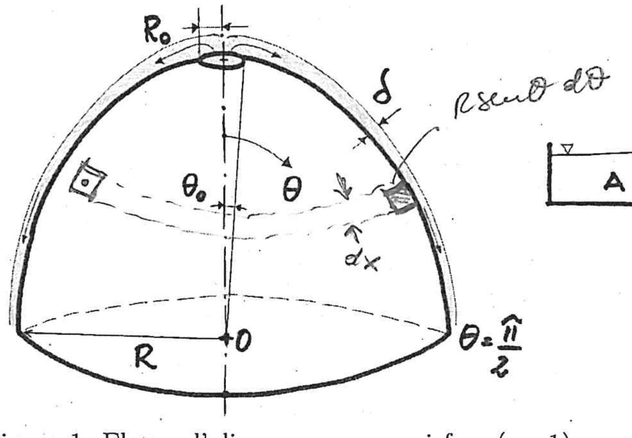
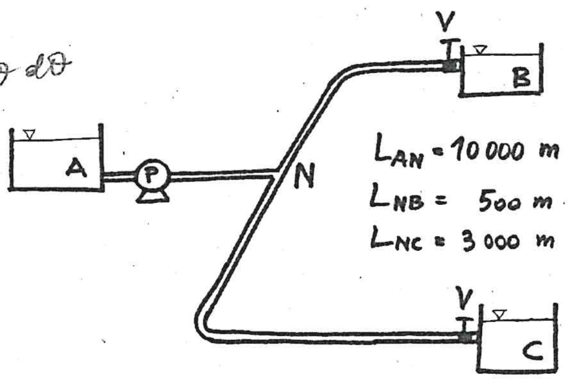


Figura 1: Flusso d'olio sopra una semisfera (es. 1)



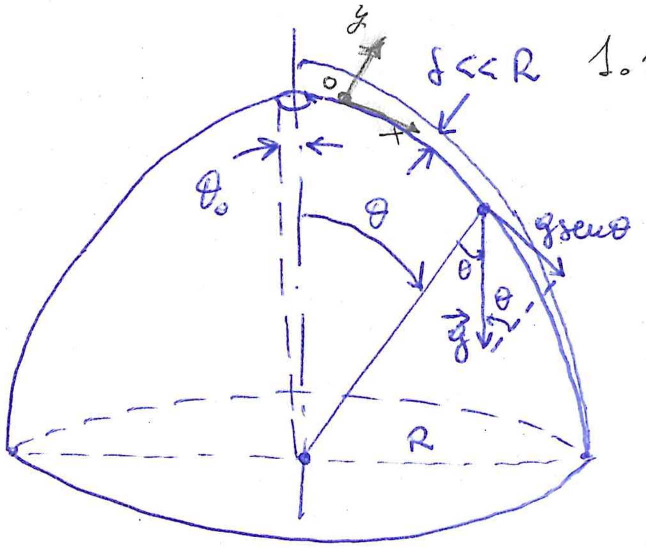
Schema di acquedotto (es. 2).

Continuità $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ Sforzo di taglio $\tau_{ij} = \mu \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Eq. Navier-Stokes $\rho \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$

Cons. massa $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$ *Eq. Bernoulli* $\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 + p_1 + dw_s - dl_v = \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 + p_2$

EXE 1



1.1) Poiché δ<<R possiamo trascurare la curvatura della sup. semi-sferica ed utilizzare coord. cartesiane.

Poiché il fluido è anche molto viscoso possiamo assumere $\boxed{Re \cdot \frac{\delta}{R} \ll 1}$ ed utilizzare la teoria della lubrif.

$$\begin{cases} \text{CONT.} & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ NS_x & 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ NS_y & 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

$v_z = 0$

$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

1.2) Con $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \operatorname{sen}\theta$ (la geometria del flusso è assimilabile a quello di un film che scorre su un piano inclinato con gradiente di pressione indotto dalla

(1) componente della accelerazione di

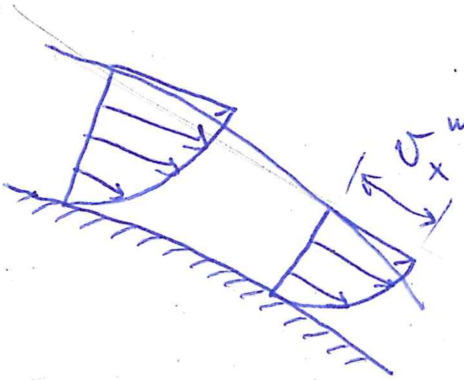
gravità lungo il piano).

1.3) Pertanto: $v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\theta)\, y^2 + C_1 y + C_2$

C.C. #1 $\quad v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

C.C. #2 $\quad \tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu}\delta(x)$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\theta)\left[y^2 - 2\delta(x)\cdot y\right]}$$



$$v_x^{max} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{2\mu}\delta^2_{(x)}$$

1.4) Posto $W = 2\pi R \operatorname{sen}\theta$ (circonferenza della sezione di passaggio del fluido alla generica posizione θ lungo la superficie della semisfera)

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{\delta} v_x(x,y)\,dy = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{3\mu}\delta^3_{(x)} \Rightarrow \delta(x) = \sqrt[3]{\frac{3\mu(Q/W)}{\rho g \operatorname{sen}\theta}}$$

$$\delta(\theta=\theta_0) = \sqrt[3]{\frac{3\mu(Q/W)}{\rho g \operatorname{sen}\theta_0}} \Rightarrow \delta(\theta_0) \to \infty \text{ se } \theta_0 \to 0$$

$$\delta\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{3\mu(Q/W)}{\rho g \operatorname{sen}\theta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{2\pi R\rho g}}$$

$\operatorname{sen}\theta = 1$

5) Calcolo della potenza:

$$Pot = \int dF_z \cdot \bar{v}_x = \int_A \left(\tau_{xy}\big|_w \cdot dA\right)\cdot \bar{v}_x$$

Mediata lungo y

$$\text{con } \bar{v}_x = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} v_x(x,y)\,dy = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{Q}{W} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{3\mu}\delta^2(x)$$

$$\text{e } \tau_{xy}\big|_w = \tau_{xy}\big|_{y=0} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \rho g \operatorname{sen}\theta\cdot\delta(x)$$

$$dA = R\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dx$$

$$\text{Pertanto: } Pot = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} \rho g \operatorname{sen}\theta\,\delta(x)\cdot R\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dx\, \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta\,\delta^2(x)}{3\mu}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{\rho^2 g^2 \operatorname{sen}^3\theta}{3\mu} R\,\delta^3(x)\, d\theta\, dx$$

$$Pot = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{\cancel{\rho}\,\cancel{g}\,\text{sen}^3\theta}{\cancel{3\mu}}\, R\, \frac{\cancel{3\mu}\, Q/W}{\rho g\, \text{sen}\theta}\, d\theta\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{\rho g\, \text{sen}^2\theta \cdot \cancel{R} \cdot Q}{2\pi \cancel{R}\, \cancel{\text{sen}\theta}}\, d\theta\, dx$$

$$= \frac{\rho g Q}{2\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi} R}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta\, d\theta}_{} = \frac{\rho g Q}{2} \quad \left[\frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{\cancel{m^3}}{s}\right] = \left[\frac{kg\, m}{s^3}\right.$$

✓

$$-\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = +2$$

$$\boxed{Pot = \frac{\rho g Q}{2}} \quad [20\%]$$

EXE 2

2.1) CALCOLO DELLE PORTATE NEI RAMI NB, NC:

$f = 0{,}079\,(\rho v D/\mu)^{-0{,}25}$

$$dl_v^{NB} = dl_v^{NC} \Rightarrow 2\rho v_{NB}^2 f_{NB} \frac{L_{NB}}{D} = 2\rho v_{NC}^2 f_{NC} \frac{L}{D}$$

ovvero : $0{,}158\,\rho^{0{,}75}\mu^{0{,}25} \cdot v_{NB}^{1.75} \cdot L_{NB}/D^{1.25} =$

$$= 0{,}158\,\rho^{0{,}75}\mu^{0.25} \cdot v_{NC}^{1.75} \cdot L_{NC}/D^{1.25}$$

Semplificando : $v_{NB}^{1.75} \cdot L_{NB} = v_{NC}^{1.75} \cdot L_{NC}$

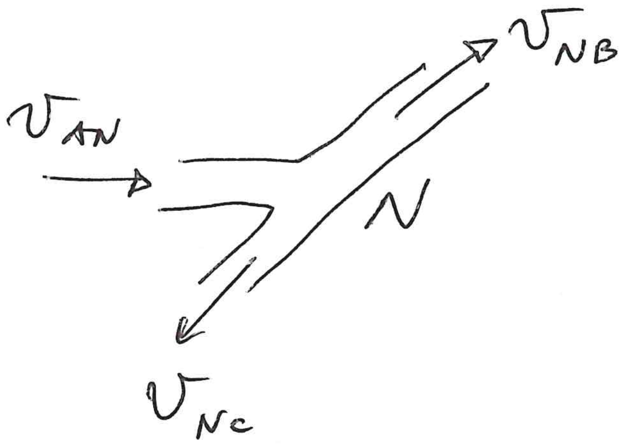
$$v_{NB} = \left(\frac{L_{NC}}{L_{NB}}\right)^{\frac{1}{1.75}} v_{NC} \cong \underline{2{,}51\, v_{NC}}$$

Pertanto : $\boxed{Q_{NB} \cong 2{,}78\, Q_{NC}}$ [10 %]

2.2) CALCOLO DI P_N PER $\boxed{\underset{0{,}12}{Q_{NB}} \cong 2\, \underset{0{,}06}{Q_{NC}}}$:

Essendo $Q_{AN} = 0{,}18\ m^3/s$ e $\boxed{D = 0{,}35\,m}$:

$$v_{AN} = \frac{4\,Q_{AN}}{\pi D^2} \cong 1{,}87\ m/s \Longrightarrow v_{NC} \cong 0{,}62\ m/s$$



$$v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} \stackrel{!}{=} 3\, v_{NC}$$

$$v_{NC} = \frac{v_{AN}}{3}$$

B_{NB} : $P_N = P_{atm} + dl_v^{NB} \cong \underbrace{1,15 \cdot 10^5}$ Pa (1%)

[1%] con $dl_v^{NB} = 0,158\, \rho^{0,75} \mu^{+0,25} \cdot v_{NB}^{1.75} \frac{L_{NB}}{D^{1.25}}$

177,83 0,17783 1,035 0,056

$\stackrel{!}{=} 13661,1$ Pa $\rightarrow$ 3%

B_{NC} : $\underbrace{P_N = P_{atm} + dl_v^{NC}} \cong \underbrace{1,26 \cdot 10^5}$ Pa [1%]

[1%] con $dl_v^{NC} = 0,158\, \rho^{0,75} \mu^{0,25} v_{NC}^{1,75} \frac{L_{NC}}{D^{1.25}}$

$\stackrel{!}{=} 24368,8$ Pa $\rightarrow$ [3%]

Si prende il valore maggiore:

$\boxed{P_N \cong 1,26\, 10^5 \text{ Pa}}$ [10%]

Ma: P_N sbagliata [−4%!]

2.3) CALCOLO DEL DIAMETRO OTTIMO:

Ipotesi : $\boxed{Q_{AN} = 0,18 \ m^3/s}$ e $\boxed{Q_{NB} = 2Q_{NC}}$

B_{AN} [2%] : $dW_s = dl_v^{AN} + (p_N - P_{atm}) = \underbrace{dl_v^{AN} + dl_v^{NC}}_{+1\%}$ (TOT. = 5%)

B_{NC} [2%] : $P_N - P_{atm} = dl_v^{NC}$

PERTANTO : $\Rightarrow dW_s = 0,158 \rho^{0,75} \mu^{0,25} \cdot \dfrac{v_{AN}^{1,75} L_{AN} + v_{NC}^{1,75} L_{NC}}{D^{1.25}}$

$v_{AN} \triangleq \dfrac{4Q_{AN}}{\pi D^2}$

$v_{NC} \triangleq \dfrac{4Q_{NC}}{\pi D^2}$

[3%]
(TOT 8%)

$= \underbrace{0,158 \rho^{0,75} \mu^{0,25}}_{4,996} \underbrace{\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{1,75}}_{1,526} \cdot \dfrac{Q_{AN}^{1,75} \cdot L_{AN} + Q_{NC}^{1,75} L_{NC}}{D^{4,75}}$

$= K \cdot D^{-4,75}$ [2%] (TOT. 10%)

Con $K = 0,158 \rho^{0,75} \cdot \mu^{0,25} \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{1,75} (\underbrace{Q_{AN}^{1,75} L_{AN}}_{2,175} + \underbrace{Q_{NC}^{1,75} L_{NC}}_{0,636})$

$= 3959,5 \rightarrow$ VALORE OK [4%] (TOT. 14%)

$Pot = Q_{AN} \cdot dW_s = Q_{AN} \cdot K \cdot D^{-4,75}$ [1%] TOT. 15%

$C_{TOT} = \underbrace{K_T \cdot L_{TOT}}_{C_1} \cdot D + \underbrace{\left[\left(\dfrac{K_P + K_E \cdot N_h N_y}{10^3}\right) \cdot Q_{AN} K\right]}_{} \cdot D^{-4,75}$

[€]

8000 20

TO

[2%]

$C_1 = K_T \cdot L_{TOT} = 1,35 \cdot 10^6$ [1%] (tot. 18%)

$C_2 = \left(\frac{K_P + K_E N_h N_y}{10^3} \right) Q_{AN} \cdot K \cong 1,155 \cdot 10^5$ [2%] TOT. 20%

$\frac{dC_{TOT}}{dD} = C_1 - 4.75\, C_2\, D^{-5,75} = 0$ [1%] TOT. 21%

$$D_{ottimo} = \left(\frac{C_1}{4,75\, C_2} \right)^{-\frac{1}{5,75}}$$

$$\underbrace{= 0,855 \text{ m}}$$ [4%] TOT. 28%

$v_{AN} = \frac{4\, Q_{AN}}{\pi D^2_{ottimo}} = \underbrace{0,313 \text{ m/s}}_{[1\%]} \Rightarrow Re_{AN} \cong 2,7 \cdot 10^5$

$v_{NB} = \frac{2}{3} v_{AN} \cong \underbrace{0,209 \text{ m/s}}_{[1\%]} \Rightarrow Re_{NB} \cong 1,8 \cdot 10^5$

$v_{NC} = v_{AN}/3 \cong \underbrace{0,104 \text{ m/s}}$ [1%] $\Rightarrow Re_{NC} \cong 8,93 \cdot 10^4$

Il flusso è turbolento in ogni ramo del circuito

$Pot = \underbrace{1500 \text{ W}}$ [3%]

Con $Q_{AN} = 0,18\ m^3/s$ e $D = 0,35\ m$ la potenza risultava:

$$v_{AN} = 1,87\ m/s \Rightarrow Re_{AN} = 218714 5,58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{AN} = 0,079\ Re_{AN}^{-0,25} = 2,05 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dl_v^{AN} = 2\rho\, v_{AN}^2 \cdot f_{AN} \frac{L_{AN}}{D} = 410902,05\ Pa$$

$$v_{NC} = 0,62\ m/s \Rightarrow Re_{NC} = 729048,53 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{NC} = 2,7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow dl_v^{NC} = 18025,92$$

$$dW_s = dl_v^{AN} + dl_v^{NC} \cong 4,29 \cdot 10^5\ Pa$$

$$Pot = Q_{AN} \cdot dW_s = 77207\ W \quad (\gg 1500\ W)$$

$$C_{TOT} = K_T \cdot L_{TOT} \cdot D + \left(\frac{K_P + K_E N_h N_y}{10^3} \right) \cdot Pot$$

$$= 472500 + 12507540 \cong 1,3 \cdot 10^7\ €$$

Con Dottino invece:

$$C_{TOT} = 1578955 + 54860,69 \cong 1,63 \cdot 10^6\ €$$