FLUIDODINAMICA - AA 2019/2020

17 Gennaio 2020 - Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

1

Una portata $Q_0 = 0,002\ m^3/s$ di liquido viscoso ($\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 0,02\ Pa \cdot s$) ed altamente inquinante fuoriesce accidentalmente dalla sommità di un pendio, inclinato di un angolo $\alpha = 30^o$ rispetto all'orizzontale (come mostrato in Fig. 1). Il terreno è poroso ed assorbe un flusso volumetrico proporzionale al battente di liquido e pari a $q_d = k \cdot \delta(x)\ [m^3/(m^2 s)]$ con $k = 0,1\ s^{-1}$. Si chiede di:

1. elencare le ipotesi necessarie per risolvere il problema, e scrivere le relative equazioni di Continuità e di Navier-Stokes; [5%]
2. derivare le espressioni del profilo di velocità e della portata volumetrica in funzione dello spessore δ del film formatosi lungo il pendio; [10%]
3. determinare l'andamento dello spessore del film in funzione della coordinata x lungo il pendio; [10%]
4. calcolare la distanza L dall'origine alla quale il film viene completamente assorbito dal terreno, sapendo che il pendio ha larghezza $W = 2\ m$; [10%]
5. calcolare la forza di attrito F_τ generata dal liquido lungo il pendio. [15%]

2

Il circuito in Fig. 2 viene utilizzato per trasferire, per caduta, acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3} Pa \cdot s$) da un serbatoio A, collocato alla quota $h_A = 20\ m$, ad un serbatoio C, collocato alla quota $h_C = 0\ m$ attraverso un condotto avente diametro $D = 0.1\ m$ e lunghezza $L_{AC} = 1000\ m$ (inclusa la quota h_A). Il circuito è inoltre dotato di una linea ausiliaria, avente anch'essa diametro $D = 0.1\ m$, che può essere utilizzata per aumentare la portata trasferita a C tramite un serbatoio B, collocato alla quota h_B e posto a distanza $L_{BC} = 400\ m$ da C (inclusa la quota h_C). Sapendo che la tubazione è liscia ed assumendo flusso turbolento (condizione che consente di utilizzare l'equazione di Blasius: $f = 0.079 \cdot Re^{-0.25}$), si chiede di:

1. calcolare la portata massica trasferita da A a C nel caso di valvola V chiusa; [15%]
2. calcolare la portata massica trasferita a C nel caso di valvola V aperta, sapendo che la portata prelevata dal serbatoio B è pari a metà della portata prelevata dal serbatoio A; [20%]
3. per la portata calcolata al punto 2., calcolare la pressione in corrispondenza del nodo N; [5%]
4. per la portata calcolata al punto 2., calcolare la quota h_B. [10%]

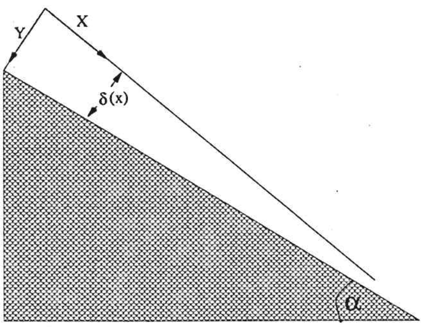

Figura 1: Infiltrazione di inquinante lungo un pendio.

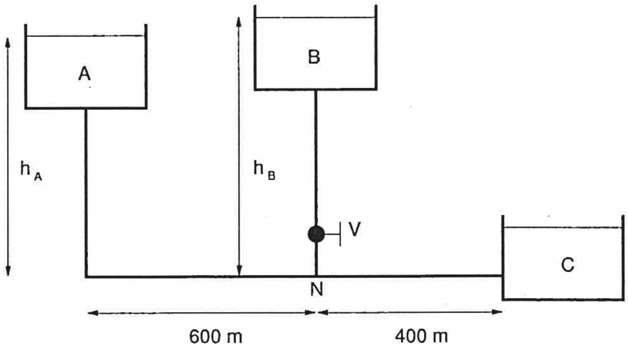

Figura 2: Circuito idraulico.

$$\textit{Continuità} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{Sforzo di taglio} \quad \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\text{Eq. Navier-Stokes} \quad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$$

$$\textit{Cons. massa} \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \qquad \textit{Eq. Bernoulli} \quad \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 + p_1 + dw_s - dl_v = \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 + p_2$$

EXE 1

PUNTO 1 (IPOTESI)

HP: $Re \cdot \frac{\delta}{L} \ll 1$ (TEORIA DELLA LUBRIFICAZIONE [1%]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad [1\%] \qquad v_x, v_y \neq 0 \quad v_z = $$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad [2\%] \qquad \left[\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad [1\%]$$

[TOT 5%]

PUNTO 2 (CALCOLO PROF.)

$$v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

[2%] $v_x(x, y=\delta(x)) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta^2 + C_1\delta$

[2%] $\tau_{yx}(x, y=0) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot y\Big|_{y=0} + \mu \cdot C_1 =$

$$\Downarrow$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta^2$$

Si trova:

$$[3\%] \quad v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha)(y^2 - \delta^2)$$

$$[3\%] \quad \frac{Q}{W} = \int_0^{\delta} v_x(x,y)\,dy = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha)\underbrace{\left(\frac{y^3}{3} - \delta^2 \cdot y\right)}_{-\frac{2}{3}\delta^3}$$

[TOT 10%]

$$= 3\delta^2 \frac{d\delta}{dx}$$

[2%]

PUNTO 3 (CALCOLO δ)

$$\frac{Q}{W} = \frac{\rho g \,\text{sen}\,\alpha}{3\mu} \delta^3 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = \frac{\rho g \,\text{sen}\,\alpha}{3\mu} W \frac{d\delta^3}{dx} \quad [1]$$

Bilancio di massa : $\frac{dQ}{dx} = -q_d \cdot W$ [2] [3

Uguagliando [1] e [2]:

$$\frac{\rho g \,\text{sen}\,\alpha}{3\mu} \cancel{W} \cdot 3\delta^2 \frac{d\delta}{dx} = -q_d \cdot \cancel{W}$$

$$= -k \cdot \delta$$

[2%] $$\int_{\delta(x=0)}^{\delta(x)} \delta \, d\delta = -\frac{\mu k}{\rho g \,\text{sen}\,\alpha} \int_0^x dx$$

[3%] $$\delta(x) = \sqrt{\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \,\text{sen}\,\alpha} \cdot x}$$ [TOT 10%]

PUNTO 4 (CALCOLO L)

DATI NUMERICI $Q_0 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} \Rightarrow \delta_0 = \left(\frac{3\mu Q_0 / W}{\rho g \,\text{sen}\,\alpha} \right)^{1/3} = 0{,}002 \, m$ [4

$W = 2$ m

$\alpha = 30°$

$\rho = 800 \, Kg/m^3$

$\mu = 0{,}02$ Pa·s

$$X = \frac{\delta_0^2 \cdot \rho g \,\text{sen}\,\alpha}{2\mu k} \simeq 6{,}04 \, m$$

[TOT 10%] [6%]

PUNTO 5 (CALCOLO F_z)

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \cancel{\mu}\left[\frac{1}{\cancel{2}\cancel{\mu}}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha)\cancel{2}y\right]$$

$$= -\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot y \quad [2\%]$$

Alla parete : $\tau_w = \tau_{yx}(y = \delta(x)) = -\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot$

[1%]

$$dF_z = \tau_w \cdot dA = \tau_w \cdot dx\, dz$$

$$F_z = \int_A dF_z = \int_0^W \int_0^L \tau_w \, dx\, dz$$

$$= -\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot W \int_0^L \delta(x)\, dx$$

[1%]

$$= -\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot W \int_0^L \left(\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \operatorname{sen}\alpha} \cdot x\right)^{1/2} dx$$

$$\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \operatorname{sen}\alpha} \cdot x = z \qquad dx = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu k} dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \cancel{z}^{1/2} \left(-\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu k}\right) dz = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu k} \cdot \frac{2}{3} z^{3/2}$$

[4%] Integral's solution

$$= -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{3\mu k} \left(\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \operatorname{sen}\alpha} \cdot x\right)^{3/2} \Bigg|_0^L$$

$$\frac{F_z}{W} = -\rho g \operatorname{sen}\alpha \left(-\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{3\mu k}\right)\left(\delta_0^3 - \cancel{\delta_L^3}^{\,0}\right)$$

$$\boxed{\frac{F_z}{W} = \frac{(\rho g \operatorname{sen}\alpha)^2}{3\mu k}\left(\delta_0^3 - \cancel{\delta_L^3}^{\,0}\right)}$$

$$\frac{\frac{\cancel{kg}^2}{\cancel{m^6}}\cdot\frac{\cancel{m^2}}{s^{\cancel{4}2}}\cdot m^3}{\frac{\cancel{kg}}{\cancel{ms}}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}}$$

[7%] CALCOLO NUMERICO :

$$\frac{F_z}{W} = \frac{\left(800\cdot 9{,}81\cdot\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(2\cdot 10^{-3}\right)^3}{3\cdot 0{,}02\cdot 0{,}1} = 39{,}24\ N$$

$$\left[\frac{F_z}{W}\right] = \left[kg\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{m}\right] = \left[\frac{kg}{s^2}\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{F_z \cong 78{,}48\,N}$$

[TOT. 15%]

$$\boxed{\text{EXE 2}}$$

PUNTO 1 Valvola V chiusa : flusso solo da A a C

$$B_{AC} : \rho g h_A - dl_v^{AC} = \cancel{\frac{1}{2}\rho v_{AC}^2}^{\text{trasc.}\ *} + \cancel{g h_C}^{=0}$$

[4%] $dl_v^{AC} = \rho g h_A$ $(h_C = 0)$

$$2 v_{AC}^2 \frac{L_{AC}}{D} \cdot f_{AC} = g h_A$$

$f_{AC} = 0{,}079\, Re_{AC}^{-0{,}25}$

$$v_{AC} = \left[\frac{g h_A \cdot D^{1{,}25} \cdot (\rho/\mu)^{+0{,}25}}{0{,}158 \cdot L_{AC}}\right]^{\frac{1}{1{,}75}}$$

$$= \left[\frac{9{,}81 \cdot 20 \cdot (0{,}1)^{1{,}25} \cdot (10^6)^{0{,}25}}{0{,}158 \cdot 10^3}\right]^{\frac{1}{1{,}75}}$$

[4%] Vel. calculation $= \left(\frac{348{,}9}{158}\right)^{0{,}57143} \cong 1{,}57\ m/s$

$$Re_{AC} = \frac{\rho v_{AC} D}{\mu} = 1{,}57 \cdot 10^5 > 4000 \Rightarrow \text{FLUSSO TURBOLENTO}$$

$$Q_{AC} = v_{AC} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 1{,}57 \cdot \frac{\pi (0{,}1)^2}{4} \cong 0{,}0123\ m^3/s$$

[4%] $\dot{m}_{AC} = \rho Q_{AC} \cong 12{,}33\ kg/s$ [15%]

TOT. 15% N.B. $\frac{1}{2}\rho v_{AC}^2 \cong 1232{,}45 \rightarrow P_{atm}/\frac{1}{2}\rho v_{AC}^2 \cong 82$ *

[2

PUNTO 2

Dato: $v_{BN} = \frac{1}{2} v_{AN}$ (valvola V aperta)

CONS. MASSA AL NODO N: $v_{AN} + v_{BN} = v_{NC}$

$v_{NC} = \frac{3}{2} v_{AN}$ [2

B_{AN}: $P_{atm} + \rho g h_A - dl_v^{AN} = P_N$

$dl_v^{AN} = \rho g h_A + (P_{atm} - P_N)$ [2%

$\hookrightarrow P_N = ?$

B_{BN}: $dl_v^{BN} = \rho g h_B + (P_{atm} - P_N)$ [2%

$\hookrightarrow h_B = ?$

[2%] B_{NC}: $P_N - dl_v^{NC} = P_{atm} \rightarrow P_{atm} - P_N = -($

Total for 3 Bernoulli is 6%

Sostituendo quest'ultima equazione in B_{AN}:

$$dl_v^{AN} = \rho g h_A - dl_v^{NC} \rightarrow dl_v^{AN} + dl_v^{NC} = \rho g$$

$$0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \underbrace{\frac{v_{AN}^{1{,}75} \cdot L_{AN} + v_{NC}^{1{,}75} \cdot L_{NC}}{D^{1{,}25}}}_{\frac{v_{AN}^{1{,}75} \cdot L_{AN} + \left(\frac{3}{2} v_{AN}\right)^{1{,}75} L_{NC}}{D^{1{,}25}}} = g h_A$$

[3

$$v_{AN}^{1,75} = \frac{g h_A \cdot D^{1,25} \cdot \left(\rho/\mu\right)^{+0,25}}{0,158 \left[L_{AN} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1,75} \cdot L_{NC} \right]} = \frac{9,81 \cdot 20 \cdot (0,1)^{1,25} \cdot (10^6)^{+0,25}}{0,158 \, (600 + 2 \cdot 400)} = \frac{348,9}{223,3} \cong 1,562 \Rightarrow \underline{\underline{v_{AN} = 1,29 \ m/s}}$$

Correct calculation of v_{AN} (or v_{NC} or v_{BN}) [8%]

[20%] $v_{AN} = 1,29 \ m/s \longrightarrow Q_{AN} = 10,13 \cdot 10^{-3} \ m^3/s$

[4%] $\underline{\underline{\dot m_{AN} = 10,13 \ kg/s}}$

[TOT. 20%]

NOT REQUESTED FOR SOLVING POINT 2

- $v_{NC} = 1,935 \ m/s \longrightarrow \underline{\underline{\dot m_{NC} \cong 15,2 \ kg/s}}$
- $v_{BN} = 0,645 \ m/s \longrightarrow \dot m_{BN} \cong 5,07 \ kg/s$

Ultime incognite da calcolare:

PUNTO 3

[5%] $P_N = P_{atm} + \rho g h_A - dl_v^{AN}$ (da B_{AN})

$$= 101325 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 20 - \underbrace{0,158 \left(\rho/\mu\right)^{-0,25} \rho \frac{v_{AN}^{1,75} L_{A}}{D^{1,25}}}_{\frac{158 \cdot (10^6)^{-0,25} \cdot 1,29^{1,75} \cdot}{0,1^{1,}} = 83241,583}$$

$$= \underline{\underline{2,14 \cdot 10^5 \ Pa}} \quad [5\%]$$

[TOT 5%]

PUNTO 4 ($d_e B_{BN}$)

$$h_B = \left[dl_v^{BN} + (P_N - P_{atm}) \right] \cdot \frac{1}{\rho g} \quad [2\%]$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \frac{v_{BN}^{1,75} \cdot L_{BN}}{g \cdot D^{1,25}} + \underbrace{\frac{P_N - P_{atm}}{\rho g}}$$

$h_B = L_{BN}$

$$= \underbrace{0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{v_{BN}^{1,75} \cdot h_B}{g \cdot D^{1,25}}} + 11,52$$

$$\frac{0,158 \left(10^6\right)^{-0,25} \cdot (0,645)^{1,75}}{9,81 \cdot (0,1)^{1,25}} \cdot h_B \simeq 4,2 \cdot 10^{-3} h_B$$

TRASC.!

[+4%] for noticing the the term can be neglected

[10%] $\underline{\underline{h_B \cong 11,52 \text{ m}}}$ [4%]

[TOT. 10%]

N.B. il tratto BN è corto (solo 11 m) e la portata nel tratto è bassa (v_{BN} basso). Pertanto produce poche perdite distribuite

TOT: 50%