Fluidodinamica, AA 2018-2019

I Appello - Secondo compito - Durata 2 ore - Libri Aperti

30 Gennaio 2019

1

Si consideri il circuito con tubi lisci mostrato in Figura 1, utilizzato per il trasporto di acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$). La pressione in A sia $P_A = 3 \cdot 10^5\ Pa$ e in B ci sia pressione atmosferica (assunta pari a $P_{atm} = 10^5\ Pa$ per semplicità di calcolo). I diametri delle linee A1 e 2B siano pari a $D_1 = 0.1\ m$.

1. Si determini la portata in uscita al punto B nel caso di pompa spenta (ovvero niente flusso nel ramo 1P2). [15%]
2. Si determini la potenza della pompa P affiché la portata in B sia doppia di quella calcolata al punto precedente. [25%]

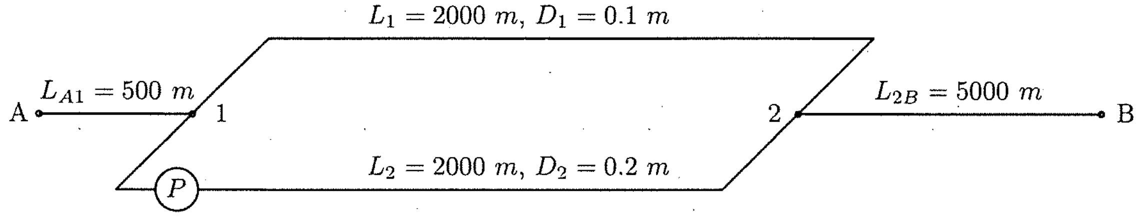


Figura 1: Schema di circuito idraulico

2

Il serbatoio in figura (avente sezione circolare di area $S = 1\ m^2$) è alimentato da una portata costante $Q_{in} = 40 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ di acqua. La sezione del foro di uscita è $A_{out} = 2 \cdot 10^{-3}\ m^2$ e scarica la portata Q_{out} direttamente in atmosfera. Il livello iniziale di liquido nel serbatoio è $h_o = 0.5\ m$ e la corrispondente pressione dell'aria vale $p_o = 1.2 \cdot 10^5 Pa$.

1. Determinare il valore iniziale di portata in uscita dal serbatoio, $Q_{out,0}$, in modo da dimostrare che il serbatoio si riempie. [10%]
2. Determinare il valore massimo del livello dell'acqua nel serbatoio, sapendo che $H = 2\ m$ ed ipotizzando che l'aria intrappolata nella parte superiore del serbatoio subisca una compressione isoterma durante il riempimento. [20%]

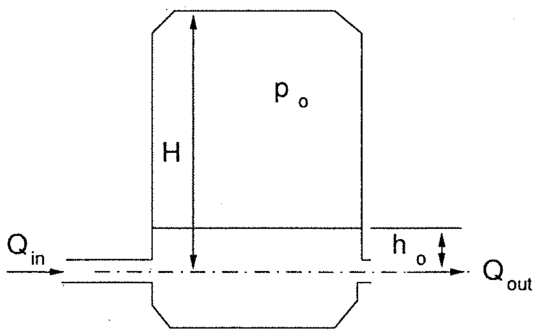


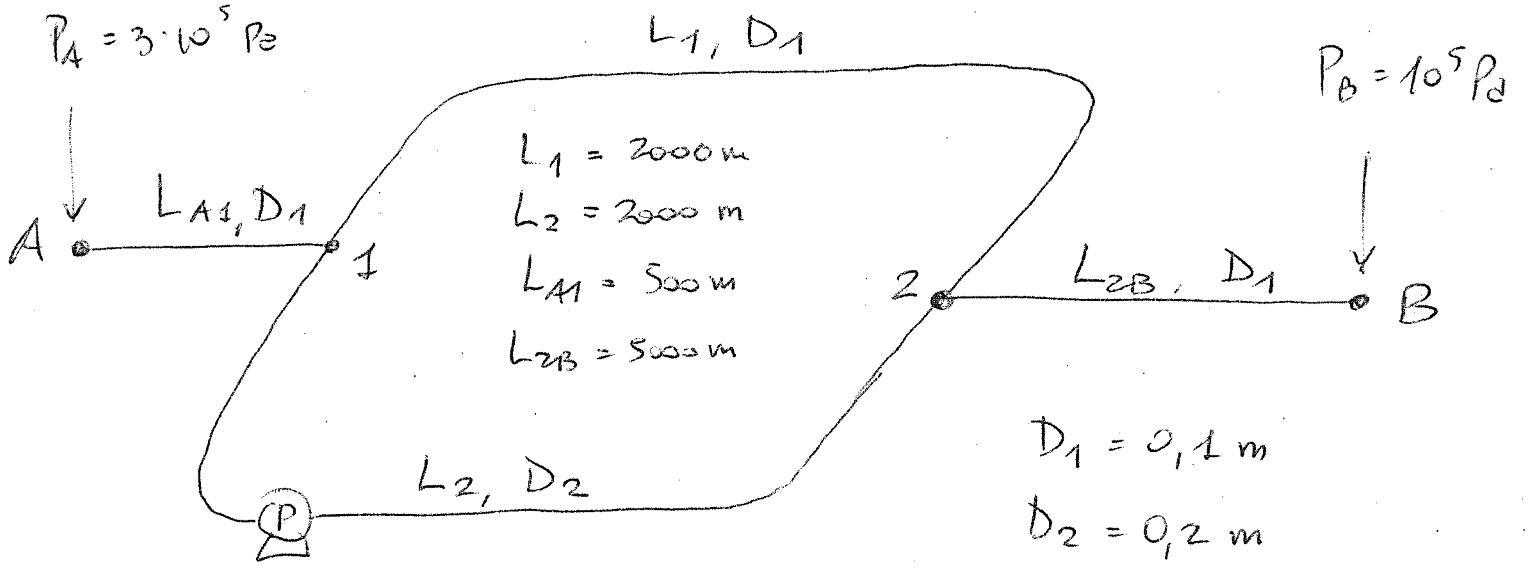
Figura 2: Serbatoio.

3

Si consideri un film di spessore $\delta = 10^{-3}\ m$ di acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$ e $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$) discendente sulla parete interna del tubo cilindrico verticale di raggio $R = 0.2\ m$ entro il quale scorre verso l'alto un flusso di aria.

1. Ipotizzando che il flusso d'aria eserciti uno sforzo di taglio all'interfaccia del liquido pari a $\tau_i = 2\ N/m^2$, calcolare la portata volumetrica Q di fluido che discende. [20%]
2. Determinare la forza che il fluido esercita sulla parete del tubo per un tratto di lunghezza $L = 3\ m$. [10%]

EXE 1



1.1) Portata in B con pompa chiusa:

B_{AB} :
$$dl_v^{AB} = \frac{P_A - P_B}{\rho} = 400 \ m^2/s^2$$

$$dl_v^{AB} = 2 f_{AB} v_{AB}^2 \frac{L_{AB}}{D_1} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} v_{AB}^{1,75} \frac{L_{AB}}{D_1^{1,25}}$$

$$v_{AB} = \left[\frac{dl_v^{AB} \cdot D_1^{1,25}}{0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot L_{AB}}\right]^{\frac{1}{1,75}} = 0,5 \ m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{AB} = v_{AB} \frac{\pi D_1^2}{4} = 3,95 \cdot 10^{-3} \ m^3/s}$$

1.2) Potenza della pompa se $Q_{2B} = 2 Q_{AB}$

$$= 7,9 \cdot 10^{-3} \ m^3/s$$

$$v_{2B} = 1 \ m/s \equiv v_{A1}$$

$$B_{2B} : \quad P_2 = P_B + \rho \, dl_v^{2B}$$

$$\text{Con } dl_v^{2B} = 2 f_{2B} v_{2B}^2 \frac{L_{2B}}{D_1} = \underbrace{4,485 \cdot 10^2}_{} \ m^2/s^2$$

$$\text{Pertanto } \bullet P_2 = 10^5 + 4,485 \cdot 10^5 = \underbrace{5,485 \cdot 10^5 \ Pa}_{}$$

$$B_{A1} : \quad P_1 = P_A - \rho \, dl_v^{A1}$$

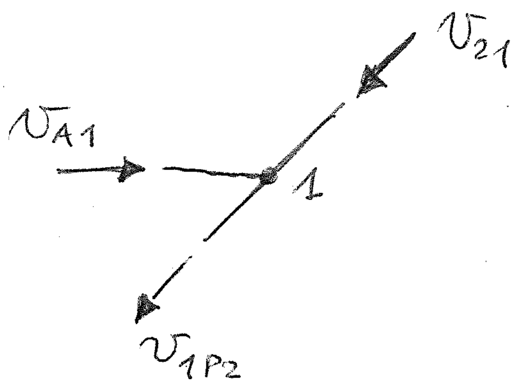
$$\text{Con } dl_v^{A1} = 2 f_{A1} v_{A1}^2 \frac{L_{A1}}{D_1} = 44,85 \ m^2/s^2$$

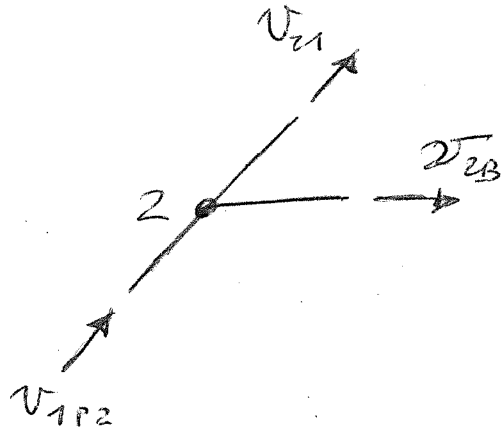
$$\text{Pertanto } \bullet P_1 = 3 \cdot 10^5 - 4,485 \cdot 10^4 = \underbrace{2,55 \cdot 10^5 \ Pa}_{}$$

$$B_{21} : \quad dl_v^{21} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \cong 293 \ m^2/s^2 \longrightarrow \underbrace{v_{21} = 1,33 \ldots}_{}$$

$$B_{1P2} : \quad w_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + dl_v^{1P2} = dl_v^{21} + dl_v^{1P2}$$

Poiché ai nodi si ha:





$$D_1^2 (v_{A1} + v_{21}) = v_{1P2} \cdot D_2^2 \qquad D_2^2 \cdot v_{1P2} = (v_{21} + v_{2B}) D_1^2$$

$$v_{1P2} = (1 + 1{,}33)\left(\frac{0{,}1}{0{,}2}\right)^2 = \underline{0{,}584 \text{ m/s}}$$

risulta $$\Delta l_v^{1P2} = 2 f_{1P2} v_{1P2}^2 \frac{L_{1P2}}{D_2} = 29{,}17 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

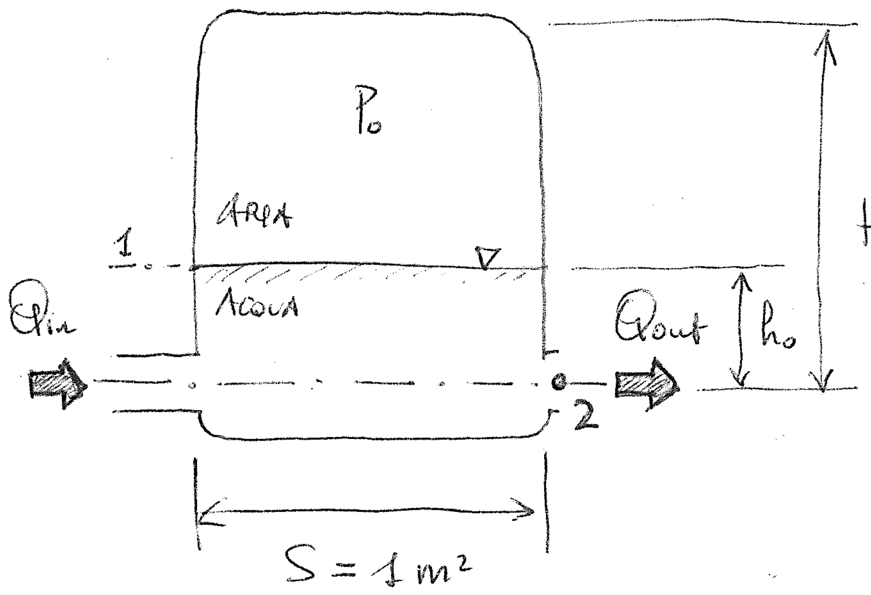
ovvero:

$$W_s \cong 293 + 29{,}17 \cong 322 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\boxed{Pot} = \rho Q_{1P2} \cdot W_s$$

$$= \rho \underbrace{\left(v_{1P2} \frac{\pi D_2^2}{4}\right)}_{0{,}0734 \text{ m}^3/\text{s}} \cdot W_s = \boxed{\underline{5{,}92 \cdot 10^3 \text{ W}}}$$

EXE 2



$Q_{in} = 40 \cdot 10^{-3} \ \frac{m^3}{s}$

$A_{out} = 2 \cdot 10^{-3} \ m^2$

$h_0 = 0{,}5 \ m$

$P_0 = 1{,}2 \cdot 10^5 \ Pa$

2.1) Q_{out} iniziale

$$B_{12}: \ \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2}}_{=0\ (v_1 \simeq 0)} + \rho g h_1 + P_1 + \underbrace{\cancel{dW_s}}_{=0} - \underbrace{\cancel{dl_v^{12}}}_{\text{trasc.}} =$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + P_2$$

con $P_1 = P_0$; $P_2 = P_{atm}$; $v_2 = v_{out}$

Pertanto:

$$v_{out} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[\left(P_0 - P_{atm}\right) + \rho g \left(h_1 - h_2\right)\right]}$$

$h_1 - h_2 = h_0$ per $t = 0$:

$$v_{out} = \sqrt{2\left[\left(\frac{P_0 - P_{atm}}{\rho}\right) + g h_0\right]} = \underline{7{,}07 \ \frac{m}{s}}$$

$$Q_{out} = v_{out} \cdot A_{out} = 7{,}07 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\stackrel{!}{=} 0{,}0142 \ m^3/s \equiv \underline{14{,}2 \cdot 10^{-3}} \ m^3/s$$

Poiché $Q_{out} < Q_{in}$ all'inizio, il serbatoio si riempie.

2.2) Massimo livello raggiunto da h

Deve valere la condizione $Q_{in} = Q_{out}$ con

$$Q_{out} = v_{out} \cdot A_{out} \quad e \quad \underset{[1]}{v_{out}} = \sqrt{2\left(\frac{P_0 - P_{atm}}{\rho} + gh\right)}$$

Durante il riempimento, P_0 è certamente aumentata a causa della compressione subita dall'aria e, pertanto, è incognita. Per calcolarla, si sfrutta l'ipotesi di compressione isoterma:

$$p \cdot V = \text{cost} \Rightarrow P_0(t=0) \cdot V_{in}^{aria} = P_0 \cdot V_{fin}^{aria}$$

con $V_{in}^{aria} = S \cdot (H - h_0)$; $V_{fin}^{aria} = S\,(H - h)$

Si trova:

$$\underset{\text{incognito}}{P_0} = \underbrace{P_0(t=0)}_{1.2\cdot 10^5\,P_a} \cdot \frac{H-h_0}{\underset{\text{incognito}}{H-h}}$$

Sostituendo nella [1]:

$$V_{out} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_0(t=0)\cdot\frac{H-h_0}{H-h} - P_{atm}\right) + 2gh}$$

ovvero:

$$\frac{Q_{in}}{A_{out}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[\frac{P_0(t=0)\cdot(H-h_0) - P_{atm}(H-h)}{H-h}\right] + 2gh}$$

$$\underbrace{\left[\left(\frac{Q_{in}}{A_{out}}\right)^2 - 2gh\right]\frac{\rho}{2}} = \frac{\overbrace{P_0(t=0)\cdot(H-h_0)}^{1.2\cdot 10^5\cdot 1,5 = 1.8\cdot 10^5} - P_{atm}(H-h)}{H-h}$$

$$\left[\left(\frac{40\cdot \cancel{10^{-3}}}{2\cdot \cancel{10^{-3}}}\right)^2 - 20\cdot h\right]\frac{10^3}{2} =$$

$$= (400 - 20h)500 \qquad \Longrightarrow$$

$$200000 - 10^4 \cdot h = \frac{1.8 \cdot 10^5 - 10^5 \cdot (2-h)}{2-h}$$

$$400000 - 20000 \cdot h - 2 \cdot 10^5 \cdot h + 10^4 h^2 =$$

$$= 1.8 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5 + 10^5 h$$

$$\cancel{10^4} h^2 - \overbrace{2 \cdot \cancel{10^5} h - \cancel{10^5} h - 2 \cdot \cancel{10^4} h}^{-20-10-2=-32} +$$

$$+ \underbrace{4 \cdot \cancel{10^5} - 1{,}8 \cdot \cancel{10^5} + 2 \cdot \cancel{10^5}}_{40-18+20=42} = 0$$

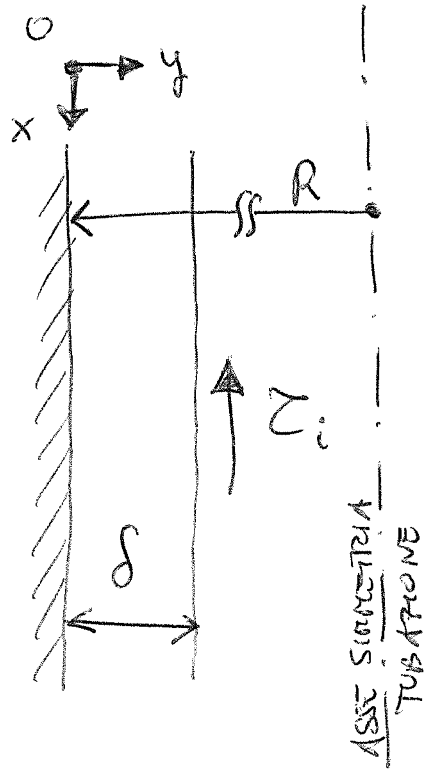
$$h^2 - 32 \cdot h + 42 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4 \cdot 42}}{2}$$

$$= \frac{32 \pm \sqrt{856}}{2} = 16 \pm 14{,}63 = \begin{cases} \doteq \cancel{30{,}63\,m} \quad NA \\ = 1{,}37\ m \end{cases}$$

$$\boxed{h_{max} = 1{,}37\ m}$$

EXE 3



$\delta = 10^{-3}\ m$

$\tau_i = 2 N/m^2$

$$v_x(y) = \underbrace{\frac{1}{2\mu}(\rho g)(2\delta y - y^2)}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\tau_i}{\mu}}_{\leq 0}$$

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g$$

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_x(y)\, dy\, dz = W\left[\frac{\rho g \delta^3}{3\mu} - \frac{\tau_i \delta^2}{2\mu}\right]$$

con $W = 2\pi R = 0{,}4 \cdot \pi$

Calcolo numerico:

$$\boxed{Q} = 0{,}4\pi\left[\underbrace{\frac{10^3 \cdot 10 \cdot (10^{-3})^3}{3 \cdot 10^{-3}}}_{\frac{1}{3}\cdot 10^{-2}} - \underbrace{\frac{\cancel{2}\cdot(10^{-3})^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cdot \cancel{10^{-3}}}}_{10^{-3}}\right]$$

$$= \boxed{2{,}93 \cdot 10^{-3}\ m^3/s > 0}$$

$\Rightarrow$ EFFETTIVAMENTE E' UNA PORTATA VERSO IL BASSO

2

$$\tau_w = \tau_{yx}(y=0) = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\stackrel{!}{=} \rho g \delta - \rho g y\Big|_{y=0} - \tau_i = \rho g \delta - \tau_i$$

$$= \cancel{10^3} \cdot 10 \cdot \cancel{10^{-3}} - 2 = 8 \ N/m^2$$

$$\boxed{F_\tau = \tau_w \cdot A_{lat} = \tau_w \cdot (2\pi R \cdot L)}$$

$$\stackrel{!}{=} 8 \cdot 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 3 \simeq \boxed{\underbrace{30{,}16}_{3} \ N}$$