

1

Un bacino idrico è chiuso ad una estremità da una barriera di contenimento, come indicato in Fig. 1. La parte superiore della barriera è costituita da una paratia a forma di L. La paratia è incernierata in  $O$  e può quindi ruotare solo in senso anti-orario. Si trascuri lo spessore della barriera e della paratia.

1. Supponendo noto il livello  $h$  di acqua al di sopra del punto  $O$ , determinare l'espressione della forza orizzontale netta agente sulla faccia verticale della paratia. [5%] •
2. Determinare per quale valore del rapporto  $h/H$  la paratia inizia a ruotare, consentendo così lo svuotamento parziale del bacino. [15%]

2

Si deve dimensionare l'iniettore di un bruciatore industriale in modo da garantire una distribuzione di combustibile più omogenea possibile all'interno del bruciatore stesso. Il bruciatore è costituito da un contenitore cilindrico di raggio  $R$ , al centro del quale è montato l'iniettore, anch'esso di forma cilindrica ma di raggio  $R_i \ll R$ . La parete laterale dell'iniettore è dotata di fori laterali, aventi diametro  $d_f$ , attraverso i quali il combustibile (avente densità  $\rho_p$ ) viene iniettato nel bruciatore sotto forma di goccioline aventi diametro  $D_p = d_f$  e velocità iniziale  $v_0$ . Ipotizzando che le gocce si muovano solo orizzontalmente in regime di Stokes e che il fluido comburente (avente densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ ) sia in quiete nel bruciatore, si chiede di:

1. determinare la dimensione massima che possono avere i fori dell'iniettore per evitare che le goccioline da essi generate raggiungano la parete laterale del bruciatore, posta a distanza orizzontale  $R - R_i \simeq R$  dal punto di iniezione. Si ipotizzi massa delle goccioline costante. [15%] •
2. Dal momento in cui le goccioline si staccano dall'iniettore, il combustibile brucia con tasso di combustione  $c = k\pi D_p^2$  (con  $k$  costante espressa in  $kg/m^2s$ ). Indicato con  $d_f = D_p(t = 0)$  il diametro iniziale delle goccioline, determinare la velocità di queste ultime quando  $D_p(t) = D_0/2$ . [20%]

3

Si consideri il canale rettangolare di altezza  $h$ , lunghezza  $L \gg h$ , larghezza  $W \gg h$  ed inclinazione  $\alpha$  rispetto all'orizzontale, mostrato in Fig. 2. Questo canale è alimentato con una portata  $Q_l$  di liquido (avente densità  $\rho_l$  e viscosità  $\mu_l$ ) che forma un film di spessore  $\delta$  costante e fluisce all'interno di una camera di raccolta, posizionata all'estremità del canale ed inizialmente riempita d'aria (avente densità  $\rho_a \ll \rho_l$  e viscosità  $\mu_a \ll \mu_l$ ). Man mano che il film riempie la camera, l'aria fuoriesce in contro-corrente generando uno sforzo di taglio  $\tau_i$  in corrispondenza dell'interfaccia del film. Il canale è sufficientemente largo e lungo da consentire l'instaurarsi di condizioni di flusso completamente sviluppato.

1. Derivare un'espressione per il profilo di velocità all'interno del film liquido. [10%] •
2. Disegnare più accuratamente possibile l'andamento del profilo di velocità all'interno del film. [10%]
3. Determinare l'espressione dello spessore  $\delta$  che annulla la portata trasferita. [10%]
4. Il film deve rimanere a contatto con la parete inclinata del canale per un tempo massimo pari a  $T$ . Derivare l'espressione per l'angolo di inclinazione  $\alpha$  che garantisce tale tempo di percorrenza (o inferiore) nell'ipotesi che risulti  $\delta = 2\tau_i/\rho g \sin\alpha$ . [15%]

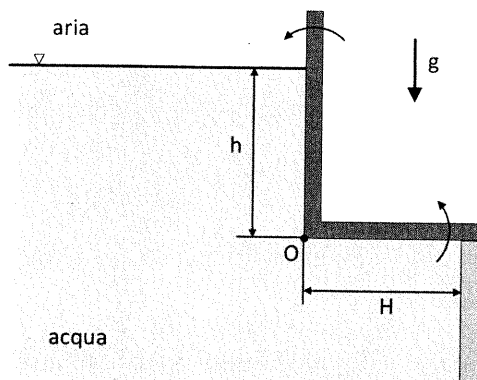


Fig. 1: Bacino idrico con barriera di contenimento

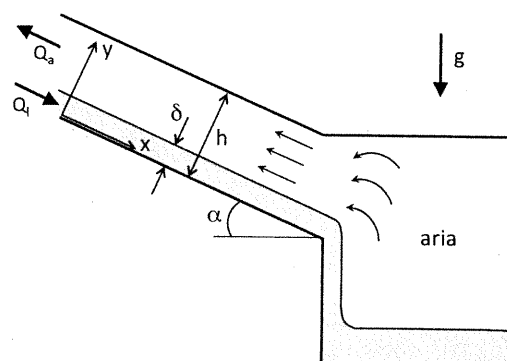


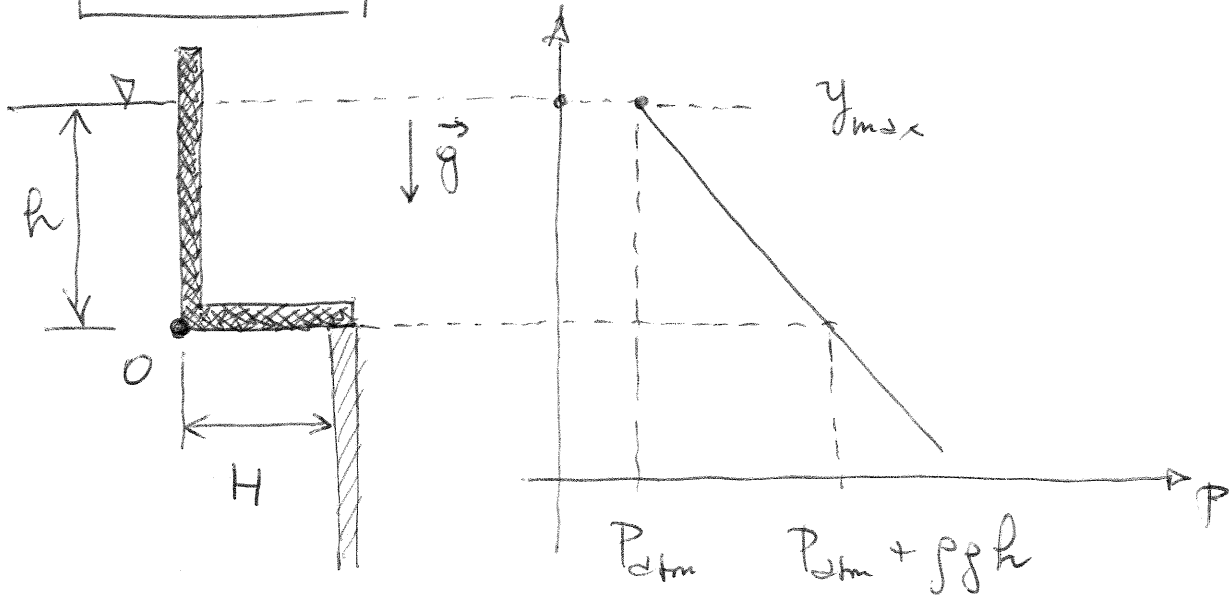
Fig. 2: Film liquido su parete inclinata

Continuità:  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$     Navier-Stokes:  $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$     Taglio:  $\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Forza di drag e Reynolds particella:  $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{u} - \mathbf{v}) |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ ,  $C_D = \frac{24}{Re_p}$ ,  $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}| D_p}{\mu}$

Legge di Stevino:  $dp = -\rho g dz$

# EXE 1



1.1)  $F_{or,netta} = pg \cdot \frac{h}{2} \cdot W = pg \frac{h^2 W}{2}$  [5%]

1.2) Dall'equilibrio dei momenti:

$$M_{or} = F_{or,netta} \cdot \frac{h}{3} = pg \frac{h^3 W}{6} \quad (\text{produce rotaz. oraria})$$

$$M_{ver} = P(y_{max} - y) \cdot HW \cdot \frac{H}{2}$$

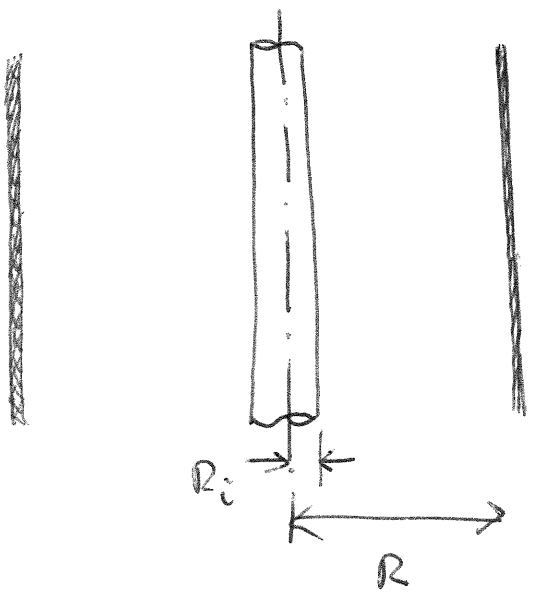
$$\downarrow pg \cdot \frac{H^2 W}{2} \quad (\text{produce rotaz. antioraria})$$

Per evitare che la paratia ruoti in senso anti-orario deve risultare:

$$M_{or} \geq M_{ver} \rightarrow pg \frac{h^3 W}{6} \geq pg h \frac{H^2 W}{2} \rightarrow \boxed{\frac{h}{H} \geq \sqrt{3}}$$

DATA	GENNAIO	FEBBRAIO	MARZO	APRILE	MAGGIO	GIUGNO	LUGLIO	AGOSTO	SETTEMBRE	OTTOBRE	NOVEMBRE	DICEMBRE	2013	2014	2015	2016	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	ORA	:	:	PAGINE	/

EXE 2



$R \gg R_i \quad (R_i \approx 0)$

2.1  $\vec{F}_f = \vec{F}_D + \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{grav}}$

lungo x (dir. scatt.):

$F_{f,x} = F_{D,x}$

$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\rho \frac{u-v_{p,x}}{\mu} D_p^3} \cdot \rho \frac{\pi D_p^2}{4} (u - v_{p,x})$$

(fluida ferma)

$$= 3 \pi \mu D_p (u - v_{p,x})$$

$\frac{dv_{p,x}}{dt} = - \frac{v_{p,x}}{\tau_p} \quad \text{con} \quad \tau_p = \frac{\rho D_p^2}{18 \mu}$

$$\int_{v_0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = - \frac{1}{\tau_p} \int_0^t dt \Rightarrow v_{p,x}(t) = v_0 e^{-t/\tau_p}$$

5%

$\frac{dx_p}{dt} = v_{p,x}(t) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_p(t)} dx_p = v_0 \int_0^t e^{-t/\tau_p}$

$x_p(t) = x_0 + v_0 \cdot \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$

3%

$$X_{p, \max} = R - R_i \approx R = \cancel{X_0} + v_0 \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad [2]$$

Stopping distance raggiunta per  $t \rightarrow \infty$ , in quanto  $v_{p,x} \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ . 2%

Perbando  $X_{p, \max} = v_0 \tau_p = R \Rightarrow \tau_p = \frac{R}{v_0}$

$$\frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} = \frac{R}{v_0} \rightarrow D_p = \sqrt{\frac{18\mu \cdot R}{\rho_p v_0}} \quad 5\%$$

$$\left[ \frac{kg}{m \cdot s} \cdot m \cdot \frac{m^2}{kg} \frac{s}{m} \right]^{1/2} = [m^2]^{1/2} \checkmark$$

2.2  $v_{p,x} \frac{dmp}{dt} + m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = -3\pi\mu D_p \cdot v_{p,x} \quad (3\%)$

$$\frac{dmp}{dt} = -C = -K\pi D_p^2 \quad (2\%)$$

$$\frac{dmp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \rho_p \frac{\pi D_p^3}{6} \right) = \rho_p \frac{\pi}{2} D_p^2 \cdot \frac{dD_p}{dt} \quad (2\%)$$

$$D_p(t) = D_p(t=0) - \frac{2K}{\rho_p} \cdot t \quad (2\%)$$

$$\frac{dV_{p,x}}{dt} = \frac{1}{m_p} \left[ -3\pi\mu D_p + k\pi D_p^2 \right] V_{p,x}$$

$$= \left[ -\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p(t)} + \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p(t)} \right] V_{p,x}$$

$$\frac{dV_{p,x}}{V_{p,x}} = \left[ -\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p(t)} + \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p(t)} \right] \left( -\frac{\rho_p}{2k} dD_p \right)$$

$$= \left[ \frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{D_p(t)} - 3 \cdot \frac{1}{D_p(t)} \right] dD_p \quad (3\%)$$

$$\ln \left[ \frac{V_{p,x}(t)}{V_0} \right] = \frac{9\mu}{k} \left( -\frac{1}{D_p(t)} \right) \Big|_{D_0}^{D_p(t)} - 3 \ln D_p(t) \Big|_{D_0}^{D_p(t)}$$

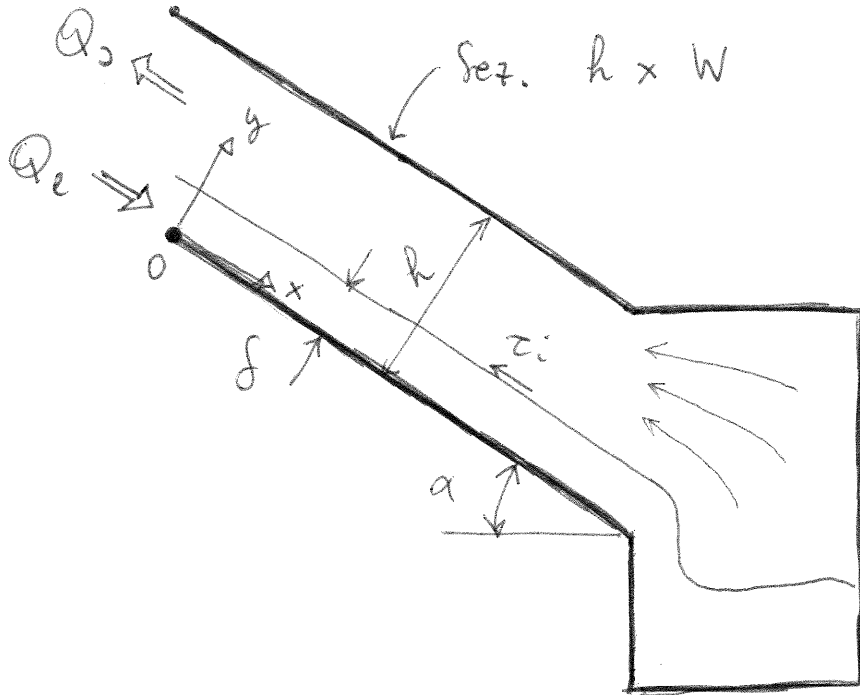
$$V_{p,x}(t) = V_0 \left( \frac{D_0}{D_p(t)} \right)^3 \cdot e^{-\frac{9\mu}{k} \left( \frac{1}{D_p(t)} - \frac{1}{D_0} \right)} \quad 5\%$$

Quando  $D_p(t) = \frac{D_0}{2}$  si ha:  $V_{p,x} = 8V_0 \cdot e^{-\frac{9\mu}{kD_0}} \quad (3\%)$

N.B. Se  $D_p(t) = D_0$  allora  $V_{p,x} = V_0$ , che risulta

maggior di  $8V_0 e^{-\frac{9\mu}{kD_0}}$  se  $D_0 > 3,847 \frac{\mu}{k}$

EXE 3



$$\frac{dp}{dx} = -\rho g \sin \alpha$$

$$\delta = \text{COSTANTE}$$

IPOTESI :

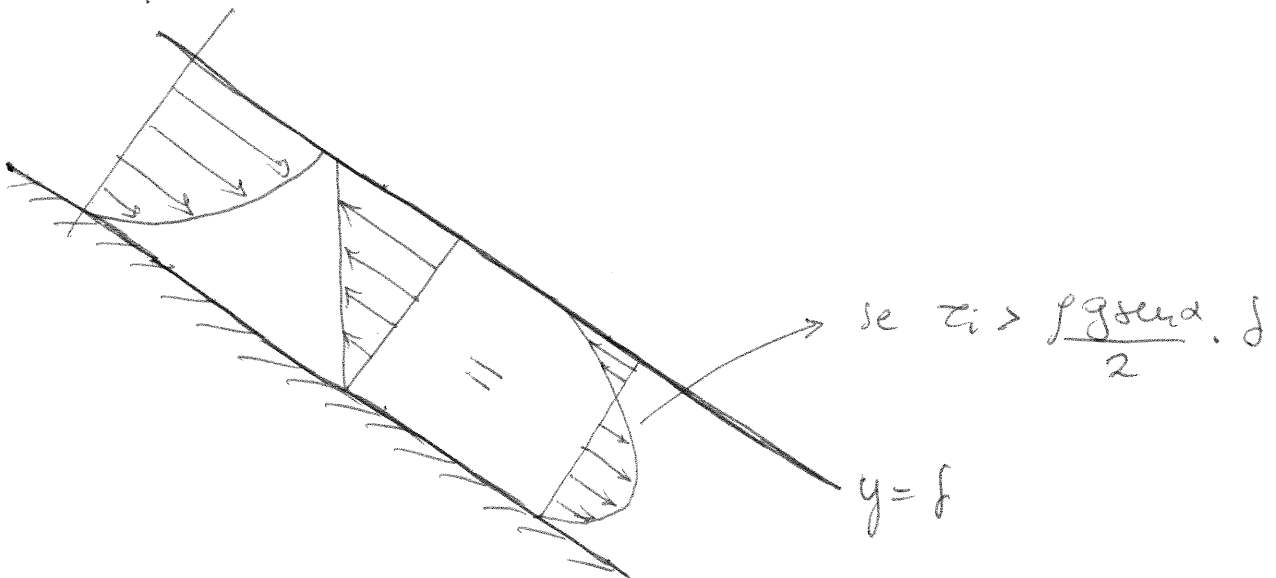
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$$

$$v_x \neq 0 \quad (v_y = v_z = 0)$$

c.c. #1 :  $v_x(y=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

c.c. #2 :  $\tau_{xy}(y=\delta) = -\tau_i \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \delta + c_1 \cdot \mu = -\tau_i$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g \sin \alpha) (y^2 - 2\delta \cdot y) - \frac{\tau_i}{\mu} y$$



DATA	GENNAIO	FEBBRAIO	MARZO	APRILE	MAGGIO	GIUGNO	LUGLIO	AGOSTO	SETTEMBRE	OTTOBRE	NOVEMBRE	DICEMBRE	2013	2014	2015	2016	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	ORA	:	:	PAGINE	/

$$\frac{Q}{W} = \int_0^d v_x(y) dy = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} d^3 - \frac{\tau_i}{2\mu} d^2$$

$$\frac{Q}{W} = 0 \quad \text{se} \quad d = \frac{3\tau_i}{2\rho g \sin \alpha}$$

Tempo di percorrenza del piano:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{d} \int_0^d v_x(y) dy = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} d^2 - \frac{\tau_i}{2\mu} d \quad (= \cos \alpha \cdot v)$$

$$L = \bar{v}_x \cdot T = \left( \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \cdot \frac{2\tau_i}{\rho g \sin \alpha} - \frac{\tau_i}{2\mu} \right) \frac{2\tau_i}{\rho g \sin \alpha} \cdot T$$

$$d = \frac{2\tau_i}{\rho g \sin \alpha}$$

$$\frac{\tau_i}{\mu} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\tau_i}{6\mu}$$

$$= \frac{\tau_i^2}{3\mu \rho g \sin \alpha} \cdot T \Rightarrow$$

$$T = \frac{3\mu \rho g \sin \alpha}{\tau_i^2} \cdot L$$

Angolo di inclinazione:

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{T \cdot \tau_i^2}{3\mu \rho g \cdot L} \right)$$

DATA GENNAIO FEBBRAIO MARZO APRILE MAGGIO GIUGNO LUGLIO AGOSTO SETTEMBRE OTTOBRE NOVEMBRE DICEMBRE 2013 2014 2015 2016

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18  
19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 ORA \_\_\_ : \_\_\_ PAGINE \_\_\_ / \_\_\_