FLUIDODINAMICA - AA 2018/2019

I compito I appello - Durata 2 ore - Libri Chiusi

28 Gennaio 2019

1

Le dune del deserto altro non sono che accumuli di sabbia di origine eolica, e vengono continuamente modellate dal vento. Si consideri quindi una particella di sabbia, avente densità $\rho_p = 2500\ kg/m^3$ e forma perfettamente sferica, che viene trasportata da un vento che soffia orizzontalmente con velocità costante U. Siano x e y le direzioni orizzontale e verticale, rispettivamente. Noti il diametro della sfera, $D_p = 10\ \mu m$, la densità e la viscosità dinamica dell'aria, $\rho_f = 1.3\ kg/m^3$ e $\mu_f = 2 \cdot 10^{-5}\ Pa \cdot s$, si chiede di:

1. calcolare il valore numerico del tempo caratteristico della particella; [5%]
2. determinare l'espressione per le componenti di velocità $v_{p,x}(t)$ e $v_{p,y}(t)$ della particella nell'ipotesi che questa si muova in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$) e che risultino $v^0_{p,x} = v_{p,x}(t=0) = U$ e $v^0_{p,y} = v_{p,y}(t=0) = 0$; [15%]
3. determinare l'espressione per le componenti $x_p(t)$ e $y_p(t)$ della traiettoria della particella; [10%]
4. determinare l'espressione per la distanza orizzontale L coperta dalla particella sapendo che viene rilasciata ad un altezza H corrispondente al dislivello tra cresta e gola della duna (N.B. ipotizzare $t >> \tau_p$). [5%]

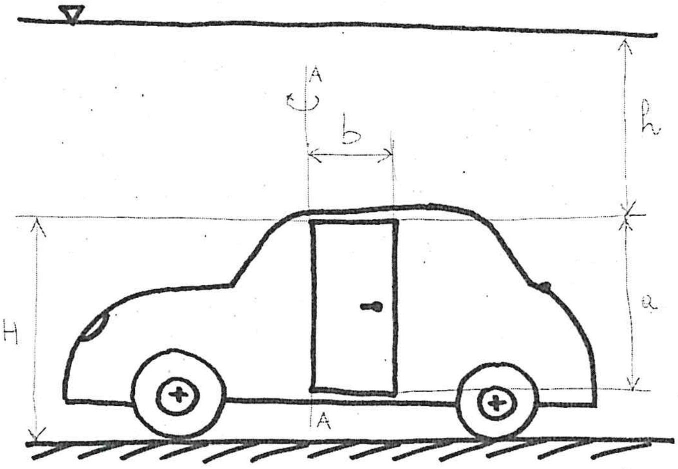
2

Un evaporatore è costituito da un nastro trasportatore verticale, che alimenta dal basso verso l'alto una portata di liquido (avente densità ρ [kg/m^3] e viscosità μ [Pa · s]) pari a Γ [kg/m·s]. Il nastro trasportatore ha lunghezza L e larghezza W. Il liquido evapora con tasso q_{ev}, espresso in [kg/m^{2}s].

1. Semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative. [5%]
2. Determinare l'espressione del gradiente di pressione equivalente $\partial\mathcal{P}/\partial x$, con x direzione parallela al nastro. [5%]
3. Determinare l'espressione del profilo di velocità nel film. [10%]
4. Disegnare il profilo di velocità nel film sapendo che risulta $\delta(x) > \sqrt{\frac{2\mu U}{\rho g}}$. [5%]
5. Determinare l'equazione che consente di determinare l'andamento dello spessore lungo il nastro, $\delta(x)$, sapendo che $q_{ev} = K/\delta(x)$ con K costante espressa in [kg/m · s]. [10%]

3

In seguito ad un incidente, un'automobile si trova sul fondo di un piccolo lago, come indicato in figura. Per semplicità, si ipotizzi che la portiera dell'automobile abbia forma rettangolare, di dimensioni $a \times b$, che si apra ruotando attorno all'asse $A - A$ indicato in figura e che la maniglia della portiera si trovi esattamente a metà del lato verticale della portiera e a distanza $d = 0,75b$ dall'asse $A - A$.
Sapendo che $H = 1,5\ m$; $a = 0,75\ m$; $b = 0,5\ m$ e $h = 0,5\ m$; si chiede di:



1. calcolare la forza che è necessario applicare sulla maniglia per poter aprire la portiera dall'interno dell'abitacolo, nell'ipotesi che quest'ultimo sia pieno di sola aria; [20%]
2. ipotizzando che la massima forza che può essere applicata dall'interno (ad esempio, dal guidatore intrappolato) sia $F_G = 800\ N$, determinare quale livello deve raggiungere l'acqua nell'abitacolo per consentire l'apertura della portiera e permettere al guidatore di uscire e risalire in superficie. [10%]

Continuità $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ Navier-Stokes $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$ Taglio $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Num. Reynolds e forza di drag per la sfera: $Re_p = \dfrac{\rho D_p|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$, $C_D = 24/Re_p$

Legge di Stevino: $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

EXE 1

1.1) CALCOLO τ_p :

$$\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} = \frac{2500 \cdot (10^{-5})^2}{18 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{6{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ sec}}$$

1.2) COMPONENTI DI VELOCITA' :

EQ. IN x)
$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{Re_p} \rho \frac{\pi D_p^2}{4} (u - v_{p,x})|u - v_{p,x}|$$

$$\stackrel{!}{=} 3\pi\mu D_p (u - v_{p,x})$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{u - v_{p,x}}{\tau_p} = \frac{U - v_{p,x}}{\tau_p}$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = U(1 - e^{-t/\tau_p}) + v_{p,x}^0 \cdot e^{-t/\tau_p}} \equiv U \text{ !!}$$

CALCOLO :
$$\int_{v_{p,x}^0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{U - v_{p,x}} = \frac{1}{\tau_p}\int_0^t dt \Rightarrow -\ln(U - v_{p,x})\Big|_{v_{p,x}^0}^{v_{p,x}(t)} = \frac{t}{\tau_p}$$

$$-\ln\left[\frac{U - v_{p,x}(t)}{U - v_{p,x}^0}\right] = \frac{t}{\tau_p} \Rightarrow U - v_{p,x}(t) = (U - v_{p,x}^0)e^{-t/\tau_p}$$

...

EQ. IN y) $\quad \cancel{m_p} \dfrac{d v_{p,y}}{dt} = - \dfrac{v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g$

CALCOLO: $$\int_{v_{p,y}^{0}}^{v_{p,y}(t)} \frac{d v_{p,y}}{-\frac{v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g} = + \int_0^t dt$$

$$- \frac{v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g = z \; ; \; - \frac{1}{\tau_p} d v_{p,y} = dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} - \tau_p \frac{dz}{z} = t \; ; \; \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} = - \frac{t}{\tau_p}$$

$$\ln \left(- \frac{v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g \right) \Bigg|_{v_{p,y}^{0}}^{v_{p,y}(t)} = - \frac{t}{\tau_p}$$

$$\frac{- v_{p,y}(t) + \hat{\rho} g \tau_p}{- \cancel{v_{p,y}^{0}}^{\,0} + \hat{\rho} g \tau_p} = e^{-t/\tau_p}$$

$$\boxed{v_{p,y}(t) = \hat{\rho} g \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})}$$

1.3) COMPONENTI DELLA TRAIETTORIA:

LUNGO x) $\quad X_p(t) = \cancel{X_p^{0}}^{\,0} + \int_0^t v_{p,x}(t) \, dt$

$$X_p(t) = \int_0^t \left[U\left(1 - \cancel{e^{-t/\tau_p}}\right) + \cancel{v_{p,x}^{\circ}\, e^{-t/\tau_p}} \right] dt$$

$$\overset{!}{=} U \cdot t$$

$$Y_p(t) = \int_0^t v_{p,y}\, dt = \int_0^t \hat{\rho} g \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right) dt$$

$$\overset{!}{=} \hat{\rho} g \tau_p \left[t - \tau_p\left(1 - e^{-t/\tau_p}\right) \right]$$

$$\int_0^t e^{-t/\tau_p} = -\tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t = \tau_p\left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)$$

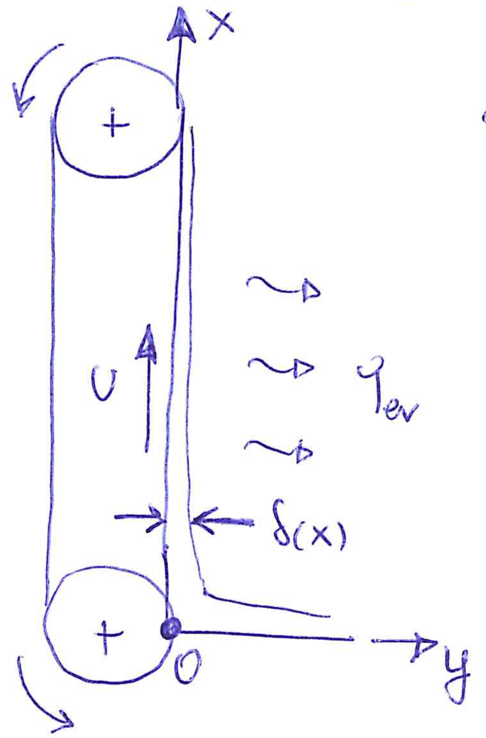
Assumendo $t \gg \tau_p$: $Y_p(t) \cong \hat{\rho} g \tau_p \cdot t$

$$\left[e^{-t/\tau_p} \to 0 \right]$$

Ponendo $Y_p(t) = H$: $\boxed{t^* = \dfrac{H}{\hat{\rho} g \tau_p}}$ Tempo richiesto per coprire la distanza verticale H

$$\boxed{L} = X_p(t = t^*) = \boxed{\frac{U \cdot H}{\hat{\rho} g \tau_p}} \qquad \left[\frac{m}{s} \cdot \cancel{m} \frac{s^2}{\cancel{m}} \cdot \frac{1}{s} \right] = [m] \checkmark$$

EXE 2



2.1) Detta L la lunghezza del nastro ipotizziamo $Re \cdot \frac{\delta(x)}{L} \ll$ (TH. LUBRIFICAZIONE):

CONT. $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS_y $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

2.2) Se l'asse x è diretto verso l'alto:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{\,0} - \rho g_x = +\rho g \frac{\partial h}{\partial x} = \rho g}$$

2.3) $v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g) y^2 + C_1 y + C_2$

ORIGINE SUL NASTRO : $v_x(x, y=0) = U \Rightarrow C_2 = U$

$\tau_{yx}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\rho g}{\mu}\delta(x)$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g)\left[y^2 - 2\delta(x)\cdot y\right] + U}$$

ORIGINE SULL' INTERFACCIA : $v_x(x, y=\delta(x)) = U$

$\tau_{yx}(x, y=0) = 0$

$C_1 = 0$

$$U = \frac{1}{2\mu}(\rho g)\delta^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = U - \frac{1}{2\mu}(\rho g)\delta^2$$

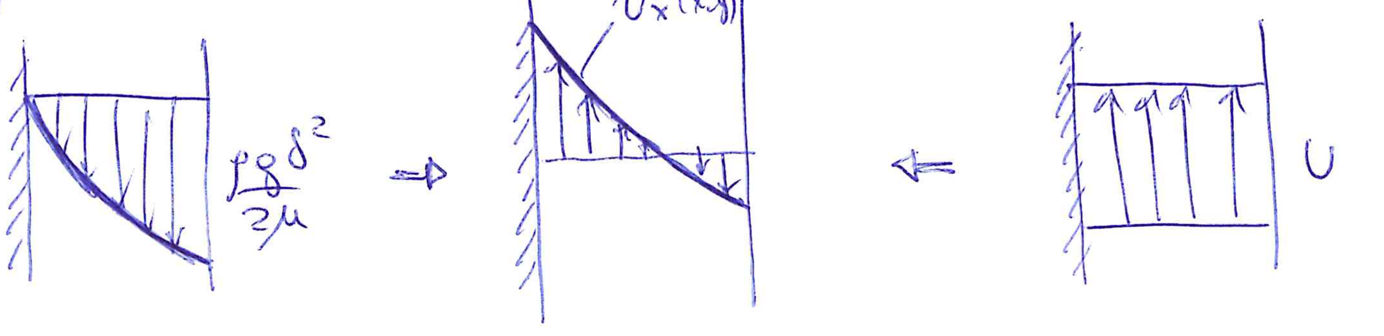
$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g)\left[y^2 - \delta^2(x)\right] + U}$$

$v_x^{@\,\text{interf}} =$

- $-\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 + U$ con origine sul nastro ✓
- $-\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 + U$ con origine sull'interf.

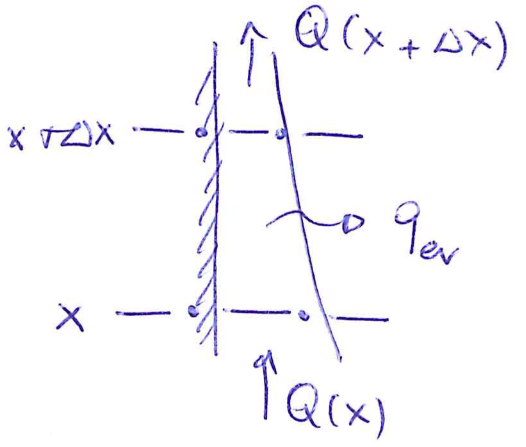
Poiché $\delta > \sqrt{\frac{2\mu U}{\rho g}}$ ovvero $\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 > U$:

2.4)



L3

2.5) $$\frac{Q}{W} = \int_0^{\delta} v_x(x,y)\,dy = -\frac{\rho g \delta^3}{3\mu} + U\cdot\delta \quad (*)$$



$$Q(x+\Delta x) + q_{ev}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot(W\Delta x) = Q(x)$$

$$\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^2}s}\,\frac{m^3}{\cancel{kg}}\,\cancel{m^2}\right] ✓$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q_{ev}\cdot\frac{W}{\rho}$$

Dalla (*): $$\frac{dQ}{dx} = \left(-\frac{\rho g}{\cancel{3}\mu}\cdot\cancel{3}\delta^2\frac{d\delta}{dx} + U\cdot\frac{d\delta}{dx}\right)\cdot\cancel{W} = -q_{ev}\cdot\frac{\cancel{W}}{\rho}$$

$$\left(-\frac{\rho^2 g}{3\mu}\delta^2 + \rho U\right)\frac{d\delta}{dx} = -\frac{K}{\delta}$$

$$\int_{\delta_0}^{\delta(x)}\left(-\frac{\rho^2 g}{3\mu}\cdot\delta^3 + \rho U\cdot\delta\right)d\delta = -K\cdot\int_0^x dx$$

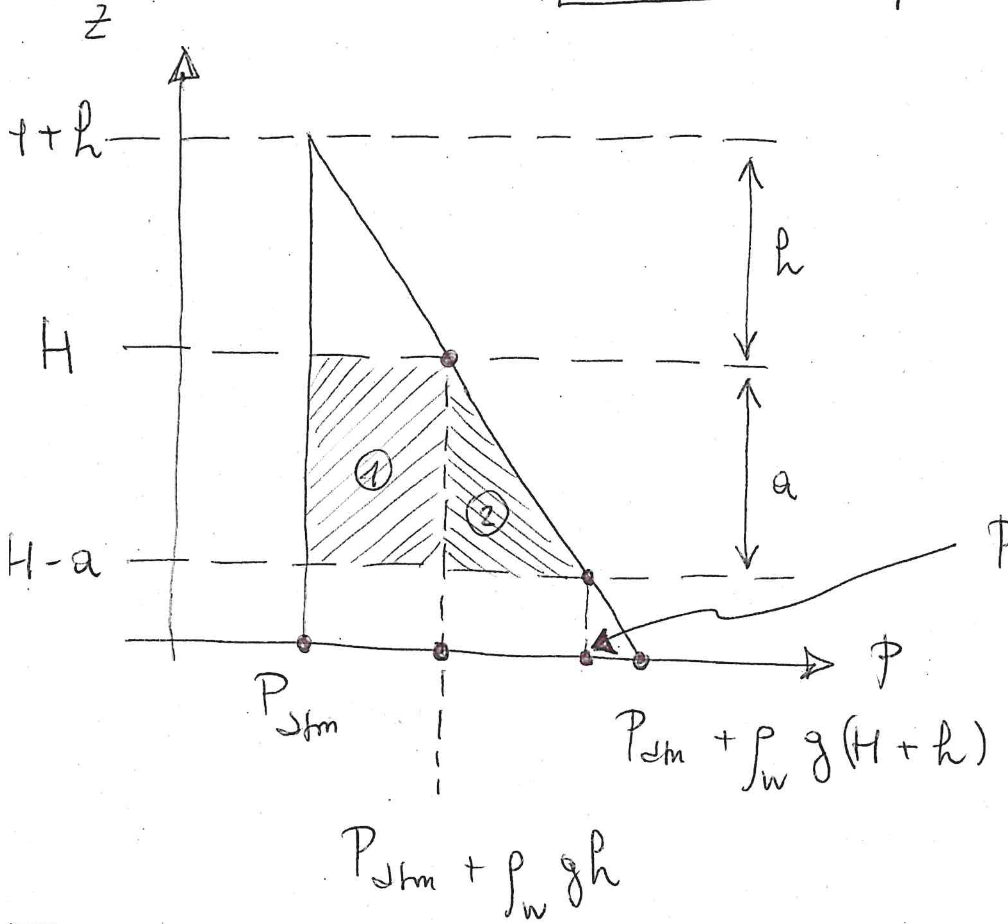
$$-\frac{\rho^2 g}{3\mu}\cdot\frac{\delta^4}{4}\Big|_{\delta_0}^{\delta(x)} + \rho U\frac{\delta^2}{2}\Big|_{\delta_0}^{\delta(x)} = -K\cdot x$$

$$-\frac{\rho^2 g}{12\mu}\,\delta^4_{(x)} + \rho\frac{U}{2}\,\delta^2_{(x)} + \underbrace{\frac{\rho^2 g\,\delta_0^4}{12\mu} - \rho\frac{U\delta_0^2}{2}}_{\text{COST.}} + K\cdot x = 0$$

Da questa equazione, si può ricavare $\delta(x)$.

EXE 3

ANDAMENTO PRESSIONE



1) NEL CASO L'ABITACOLO SIA PIENO DI SOLA ARIA CALCOLARE LA FORZA AGENTE SULLA PORTIERA DELL'AUTOMOBILE:

- dall'esterno : $F_{ext} = F_{ext}^{1} + F_{ext}^{2}$

$$= \rho_w g h \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \rho_w g a \cdot a \cdot b$$

$$= \rho_w g a \left(h \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot b \right)$$

$$= \rho_w g a b \left(h + \frac{1}{2} a \right)$$

CALCOLO NUMERICO:

$H = 1{,}5\,m$

$a = 0{,}75\,m$

$b = 0{,}5\,m$

$h = 0{,}5\,m$

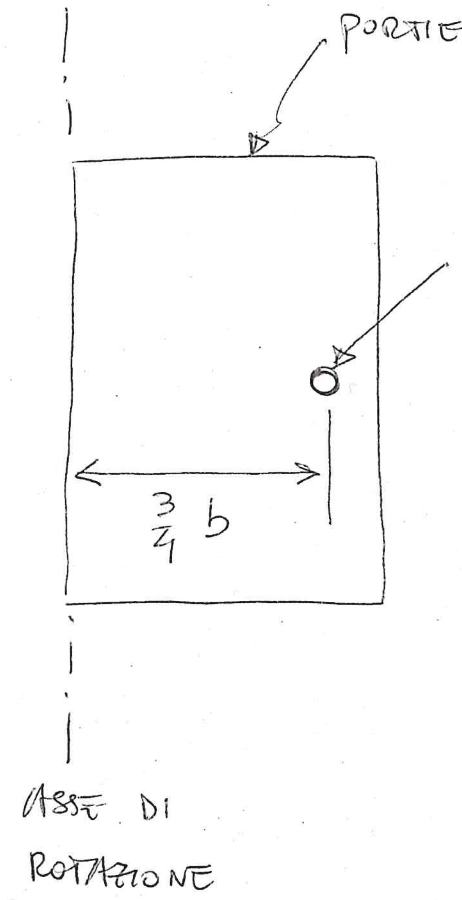
$F_{ext} \cong 3281\,N$

PER APRIRE LA PORTIERA, E' NECESSARIO APPLICARE UN MOMENTO DALL'INTERNO PARI A QUELLO PRODOTTO DALL'ACQUA ALL'ESTERNO:

→

- $M_{in} = M_{ext} \rightarrow F_{in} \cdot b_{in} = F_{ext} \cdot b_{ext}$

$$= \underbrace{F_{ext}^{①} \cdot b_{ext}^{①} + F_{ext}^{②} \cdot b_{ext}^{②}}_{804,7\,N\cdot m}$$



$\Rightarrow b_{in} = \frac{3}{4} b$

Risulta invece $b_{ext}^{①} = b_{ext}^{②} = \frac{b}{2}$

- Pertanto, dall'interno:

$$F_{in} = F_{ext} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{4}{3} b^{-1}$$

$$= \frac{2}{3} F_{ext} = \underline{2187,5\,N}$$

$\boxed{2}$ IPOTIZZANDO CHE LA MASSIMA FORZA CHE PUO' ESERCITARE IL GUIDATORE DALL'INTERNO E' $F_G = 800\,N$, DETERMINARE IL LIVELLO CHE L'ACQUA DEVE RAGGIUNGERE NELL'ABITACOLO PER PERMETTERE AL GUIDATORE DI USCIRE E RISALIRE IN SUPERFICIE

In questo caso il bilancio dei momenti di

Scrive così:

CONTRIBUTO DOVUTO ALL'ACQUA ENTRATA NELL'ABITACOLO

$$F_{in}^{new} \cdot b_{in} + F_q \cdot b_q = F_{ext} \cdot b_{ext}$$

$$F_{in}^{new} = \frac{F_{ext} \cdot b_{ext} - F_q \cdot b_q}{b_{in}}$$

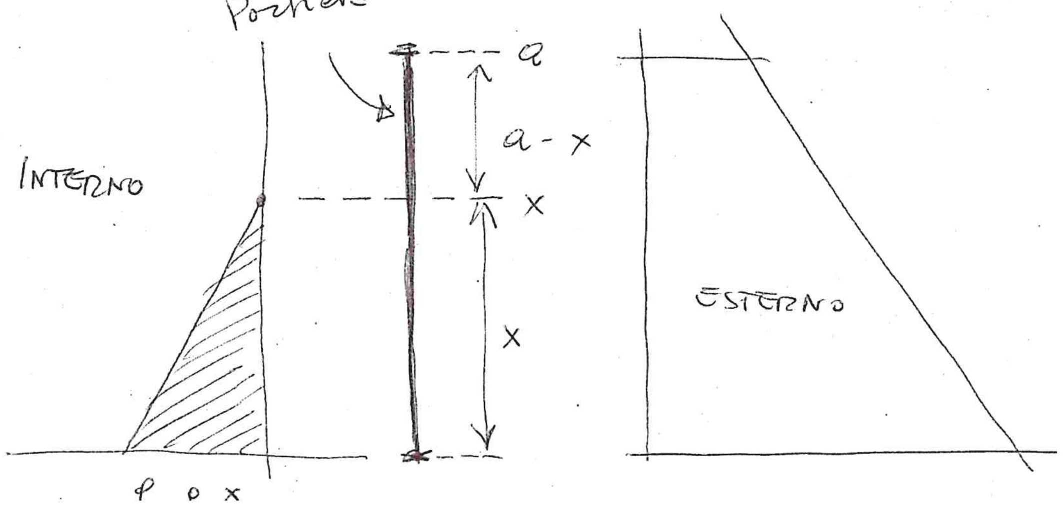
$$= \frac{\rho_w g a b \left(h + \frac{1}{2} a\right) \cdot \frac{\cancel{b}}{2} - F_q \cdot \frac{3}{4}\cancel{b}}{\frac{\cancel{b}}{2}}$$

$$= \rho_w g a b \left(h + \frac{1}{2} a\right) - \frac{3}{2} F_q$$

$$= \underbrace{10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5 + 0{,}375)}_{3281{,}25} - \underbrace{\frac{3}{2} \cdot 800}_{1200}$$

$$= 2081{,}25 \text{ N}$$

Vale anche: $F_{in}^{new} = \frac{1}{2} \rho_w g x \cdot x \cdot b = \frac{1}{2} \rho_w g b \cdot x^2$



$$x = \sqrt{\frac{2F_{in}^{new}}{\rho_w g b}} \simeq 0{,}912 \text{ m}$$