FLUIDODINAMICA, AA 2017-2018

II Appello, I Compito - Durata 2 ore - Libri Chiusi

21 Febbraio 2018

1

Il dispositivo in Figura 1 viene utilizzato per determinare la densità di un liquido tramite la misurazione dei livelli h_1, h_2, h_3 ed h_4. Sapendo che $h_1 = 35\ cm$, $h_2 = 15\ cm$, $h_3 = 30\ cm$, ed $h_4 = 20\ cm$ e conoscendo le densita di olio ($\rho_o = 800\ kg/m^3$) ed acqua ($\rho_{acqua} = 1000\ kg/m^3$) si chiede di:

1. calcolare la densità ρ del liquido incognito; [15%]
2. calcolare l'incremento di pressione sul fondo del dispositivo, assumendo $g = 10\ m^2/s$. [5%]

2

Un elettrolizzatore è un dispositivo in grado di realizzare la dissociazione dell'acqua in idrogeno ed ossigeno. Lo schema in Figura 2 illustra il principio di funzionamento di un elettrolizzatore a cella. In una singola cella si trovano due ambienti separati da una membrana, sulla quale sono poggiati due diffusori di corrente: questi distribuiscono la potenza elettrica necessaria alla membrana per effettuare l'elettrolisi dell'acqua e produrre cosı da una parte idrogeno (H_2) e dall'altra ossigeno (O_2) sotto forma di bolle. Poichè la cella è attraversata da un flusso d'acqua (viscosità μ, densità ρ) entrante attraverso la sezione inferiore della cella, le bolle di idrogeno/ossigeno vengono trasportate verso la sezione superiore per poi essere separate dal liquido.

Siano u la velocità dell'acqua nella cella, supposta costante in modulo ed avente verso verticale ascendente (ovvero diretta lungo y), e v_i la velocità , avente verso orizzontale (ovvero diretta lungo x) con cui le bolle di gas vengono iniettate nel flusso a seguito dell'elettrolisi. Sia ρ_b la densità delle bolle (con $\rho_b < \rho$).

1. Calcolare l'andamento delle componenti di velocità v_x e v_y delle bolle di gas in funzione del tempo. [20%]
2. Calcolare l'andamento della traiettoria delle bolle di gas (ovvero delle sue componenti orizzonate, x_b e verticale, y_b) all'interno della cella in funzione del tempo. [20%]

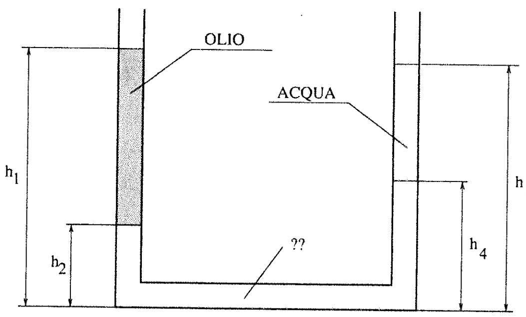


Fig. 1 Misuratore di densità (es. 1)

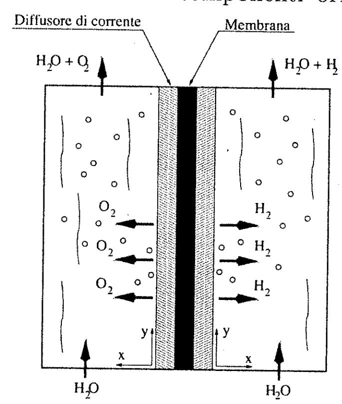


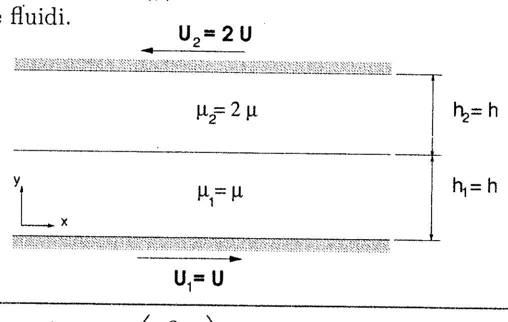
Fig. 2 Schema di elettrolizzatore (es. 2).

3

Due fluidi Newtoniani, incomprimibili ed immiscibili scorrono in un canale piano come illustrato in Figura 3. Il flusso viene generato imponendo un gradiente di pressione $d\mathcal{P}/dx = -3\mu U/h^2$.

1. Semplificare le equazioni di Continuità e di Navier–Stokes, indicando tutte le ipotesi semplificative. [5%]
2. Calcolare il profilo di velocità $v_x(y)$ nei due fluidi. [15%]
3. Disegnare nella maniera più dettagliata possibile il profilo di velocità $v_x(y)$ nei due fluidi. [10%]
4. Calcolare e disegnare l'andamento del taglio $\tau_{xy}(y)$ nei due fluidi. [10%]

Fig. 3 Flusso bifase in canale (es. 3)

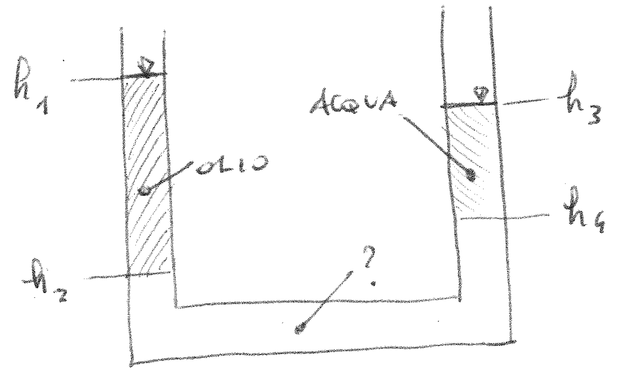


Continuità $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ *Navier-Stokes* $\rho \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$ *Taglio* $\mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella: $Re = \dfrac{\rho D_p |\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{u} - \mathbf{v}) |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$

Legge di Stevino: $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

EXE 1



$$p(h_1) = P_{atm}$$

$$p(h_2) = P_{atm} + \rho_o g (h_1 - h_2) \quad [1]$$

$$p(h_3) = P_{atm}$$

$$p(h_4) = P_{atm} + \rho_w g (h_3 - h_4) \quad [2]$$

Utilizzando la densità del liquido incognito:

$$[3\%] \quad p(h_2) - p(h_4) = \rho_e g (h_4 - h_2) \quad [3]$$

Dalle eq. [1] e [2]:

$$[5\%] \quad p(h_2) - p(h_4) = \rho_o g (h_1 - h_2) - \rho_w g (h_3 - h_4) \quad [4]$$

Dalle eq. [3] e [4]:

$$\rho_e g (h_4 - h_2) = \rho_o g (h_1 - h_2) - \rho_w g (h_3 - h_4)$$

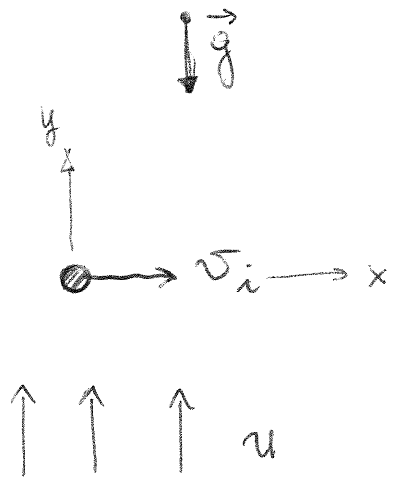
$$\rho_e = \frac{\rho_o (h_1 - h_2) - \rho_w (h_3 - h_4)}{(h_4 - h_2)} \quad [10\%]$$

$$= \frac{800 \cdot \cancel{20}^{4} - 1000 \cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}}$$

$$= 3200 - 2000 = \underline{\underline{1200 \ kg/m^3}} \quad [5\%]$$

Sul fondo: $\Delta p = \rho_w g (h_3 - h_4) + \rho_e g h_4 = 3400 \ Pa$

EXE 2



$\rho_b < \rho_f$

MOTO ORIZZONTALE:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p}$$

con $v_{p,x}(0) = v_i$

$$\int_{v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -\frac{1}{\tau_p}\int_0^t dt$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_i \cdot e^{-t/\tau_p}}$$

MOTO VERTICALE:

$$\frac{dv_{p,y}}{dt} = \frac{u - v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g \qquad \text{con} \quad v_{p,y}(0) = 0$$

SOLUZ. PARTICOLARE: $\boxed{v_{p,y}^* = \hat{\rho} g \tau_p + u}$ con $\hat{\rho} = \frac{\rho_f - \rho_b}{\rho_b}$

SOLUZ. OM. ASSOCIATA: $\boxed{v_{p,y}^* = C e^{-t/\tau_p}}$

C.I. $v_{p,y}(0) = 0 \Rightarrow \hat{\rho} g \tau_p + u + Ce^{-t/\tau_p}\Big|_{t=0} = 0$

$$C = -\hat{\rho} g \tau_p - u$$

$$\boxed{v_{p,y}(t) = u\left(1 - e^{-t/\tau_p}\right) + \hat{\rho} g \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)}$$

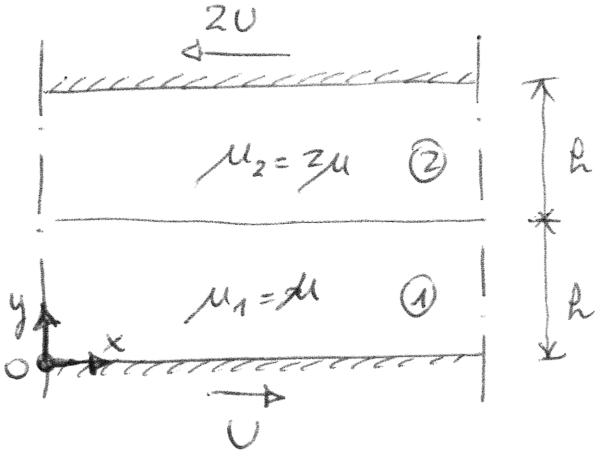
$$v_{term} = u + \hat{\rho} g \tau_p > 0$$

TRAIETTORIA DELLE BOLLE:

$$\boxed{X_p(t)} = \int_0^t v_{p,x}(t)\, dt = \boxed{v_i \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)}$$

$$\boxed{Y_p(t)} = \int_0^t v_{p,y}(t)\, dt = \boxed{\left(u + \hat{\rho} g \tau_p\right)\left[t + \tau_p\left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)\right]}$$

EXE 3



$$\frac{dP}{dx} = \frac{3\mu U}{h^2}$$

$$v_x^1(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) y^2 + c_1 y + c_2$$

$$v_x^2(y) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) y^2 + c_3 y + c_4$$

C.C. #1 : $v_x^1(y=0) = U \longrightarrow \boxed{c_2 = U}$

C.C. #2 : $\tau_{xy}^1(y=h) = \tau_{xy}^2(y=h)$

$$\mu \left.\frac{\partial v_x^1}{\partial y}\right|_{y=h} = 2\mu \left.\frac{\partial v_x^2}{\partial y}\right|_{y=h}$$

$$\mu\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\cdot h + c_1\right] = 2\mu\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)h + c_3\right]$$

$$\cancel{\left(\frac{dP}{dx}\right)h} + \cancel{\mu} C_1 = \cancel{\left(\frac{dP}{dx}\right)h} + 2\cancel{\mu} C_3 \rightarrow \boxed{C_1 = 2C_3}$$

C.C. #3 : $v_x^2(y=2h) = -2U$

$$\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\cdot 4h^2 + C_3 \cdot 2h + C_4 = -2U$$

$$\boxed{C_4 = -2U - 2hC_3 - \frac{1}{\mu}\underbrace{\left(\frac{dP}{dx}\right)h^2}}$$

$$\overset{!}{=} -2U - 2hC_3 + 3U \qquad \frac{1}{\mu}\left(-\frac{3\mu U}{h^2}\right)h^2 = -3U$$

$$\overset{!}{=} \boxed{+U - 2hC_3}$$

C.C. #4 : $v_x^1(y=h) = v_x^2(y=h)$

$$\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{3\mu U}{h^2}\right)h^2 + C_1 \cdot h + C_2 = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{3\mu U}{h^2}\right)h^2 + C_3 \cdot h + C_4$$

$$-\frac{3}{2}U + 2hC_3 + U = -\frac{3}{4}U + h\cdot\cancel{C_3} + U - \cancel{2}hC_3$$

$$3hC_3 = -\frac{3}{4}U + U + \frac{1}{2}U = \frac{-3+4+2}{4}U$$

$$\overset{!}{=} +\frac{3}{4}U \longrightarrow \boxed{C_3 = +\frac{1}{4}\cdot\frac{U}{h}}$$

Quindi: $C_1 = 2C_3 = +\frac{1}{2}\frac{U}{h}$

$$\hookrightarrow \boxed{v_x^1(y) = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{3\mu U}{h^2}\right)y^2 + \frac{1}{2}\frac{U}{h}y + U}$$

$$\overset{!}{=} \boxed{-\frac{3}{2}\cdot\frac{U}{h^2}y^2 + \frac{1}{2}\frac{U}{h}y + U}$$

$$C_4 = U - \cancel{2}h\left(+\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\frac{U}{h}\right) = U - \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}U \;//$$

$$\boxed{v_x^2(y) = \frac{1}{4\cancel{\mu}}\left(-\frac{3\cancel{\mu}U}{h^2}\right)y^2 + \frac{1}{4}\frac{U}{h}y + \frac{1}{2}U}$$

Verifica c.c. : $v_x^1(y=0) = U$ ✓

$$v_x^2(y=2h) = -\frac{3U}{\cancel{4h^2}}\cdot\cancel{4h^2} + \frac{1}{\cancel{4}_2}\frac{U}{\cancel{h}}\cancel{2}\cancel{h} + \frac{3}{2}U$$

$$= -3U + \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = -2U \checkmark$$

$$v_x^1(y=h) = -\frac{3U}{2\cancel{h^2}}\cdot\cancel{h^2} + \frac{1}{2}\frac{U}{\cancel{h}}\cdot\cancel{h} + U$$

$$= -\frac{3}{2}U + \frac{1}{2}U + U = 0$$

$$v_x^2(y=h) = -\frac{3U}{4\cancel{h^2}}\cdot\cancel{h^2} + \frac{1}{4}\frac{U}{\cancel{h}}\cancel{h} + \frac{1}{2}U$$

$$= -\frac{3}{4}U + \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}U = \frac{-3+1+2}{4}U$$

$$= 0 \checkmark$$

Verifica valore massimo:

$v_{x,max}^1$ se $\frac{dv_x^1}{dy} = 0 \Rightarrow -3\frac{U}{h^2}y + \frac{1}{2}\frac{U}{h} = 0$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\cancel{U}}{\cancel{h}}\left(-\frac{h^2}{3\cancel{U}}\right) = \frac{h}{6}$$

$$v_x^1\left(y=\frac{h}{6}\right) = -\frac{\cancel{3}U}{2h^2}\cdot\frac{h^2}{\cancel{36}_{12}} + \frac{1}{2}\frac{U}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}}{6} + U = -\frac{U}{24} + \frac{U}{12} + U = \frac{25}{24}U$$

$v_{x,max}^2$ se $\frac{dv_x^2}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}\frac{U}{h^2}y + \frac{1}{4}\frac{U}{h} = 0$

$$y = -\frac{1}{4}\frac{U}{h}\left(-\frac{2h^2}{3U}\right) \overset{!}{=} \frac{h}{6}$$

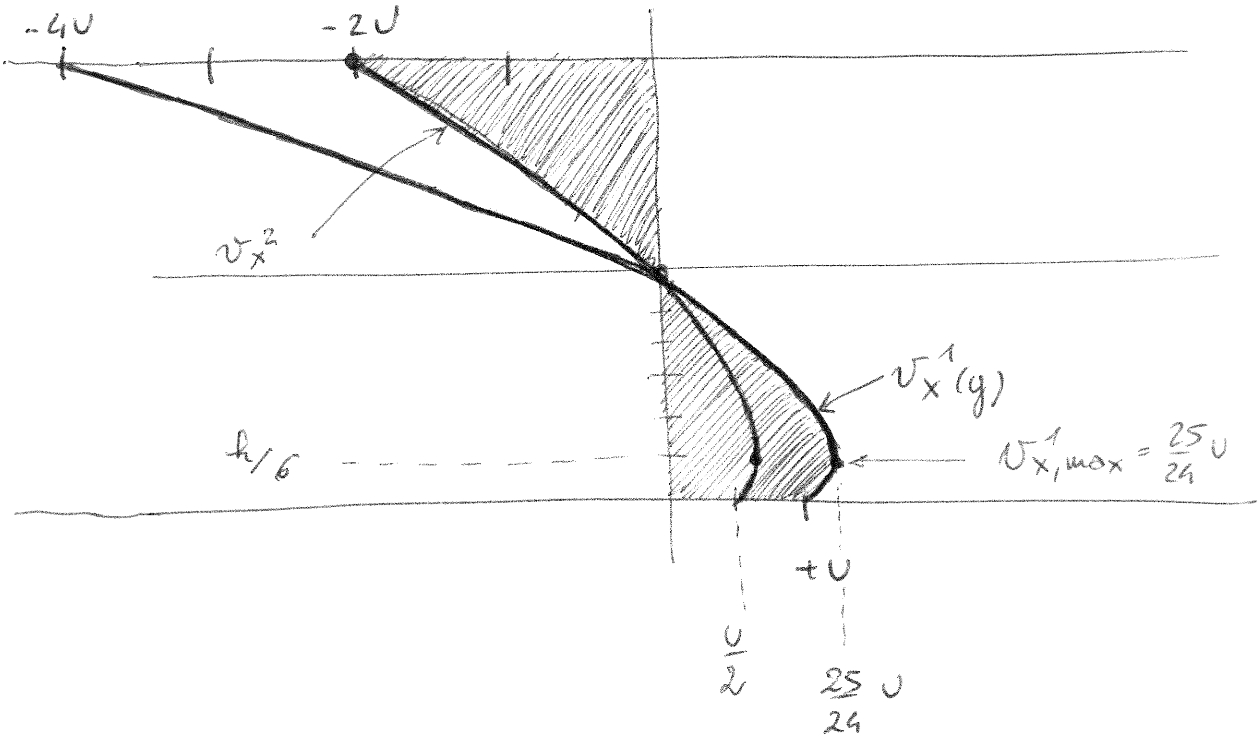
$$v_x^2\left(y=\frac{h}{6}\right) = -\frac{3}{4}\frac{U}{h^2}\cdot\frac{h^2}{36} + \frac{1}{4}\frac{U}{h}\cdot\frac{h}{6} + \frac{U}{2}$$

$$\overset{!}{=} -\frac{U}{48} + \frac{U}{24} + \frac{U}{2} = \frac{-1+2+24}{48}U$$

$$\overset{!}{=} \frac{25}{48}U$$

$v_x^2(y=0) = \frac{U}{2}$; $v_x^1(y=2h) = -\frac{3}{2}\frac{U}{h^2}\cdot 4h^2 + \frac{U}{2h}\cdot 2h +$

$$\overset{!}{=} -6U + U + U = -4U$$



$$\tau_{xy}^{1} = \mu \frac{\partial v_x^1}{\partial y} = \mu\left(-\frac{3U}{h^2}y + \frac{U}{2h}\right)$$

$$\overset{!}{=} -\frac{3\mu U}{h^2}y + \frac{\mu U}{2h} \longrightarrow \tau_{xy}^{1}\Big|_{y=0} = \frac{\mu U}{2h}$$

$$\longrightarrow \tau_{xy}^{1}\Big|_{y=h} = -\frac{5}{2}\frac{\mu U}{h}$$

$$\tau_{xy}^{2} = 2\mu \frac{\partial v_x^2}{\partial y} = 2\mu\left(-\frac{3}{2}\frac{U}{h^2}y + \frac{1}{4}\frac{U}{h}\right)$$

$$\overset{!}{=} -\frac{3\mu U}{h^2}y + \frac{\mu U}{2h} \longrightarrow \tau_{xy}^{2}\Big|_{y=h} = -\frac{5}{2}\frac{\mu U}{h}$$

$$\longrightarrow \tau_{xy}^{2}\Big|_{y=2h} = -\frac{11}{2}\frac{\mu U}{h}$$