FLUIDODINAMICA, AA 2013/2014

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore

24 Gennaio 2014

1

Una portata volumetrica Q_0 $[m^3/s]$ di liquido inquinante fuoriesce accidentalmente dalla sommità di una piccola collina e scorre lungo il pendio orientale di quest'ultima. Il pendio è schematizzabile come un piano costituito da materiale poroso (il terreno) ed inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il piano ha lunghezza L, larghezza W, ed assorbe un flusso volumetrico di liquido proporzionale allo spessore del film: $q_d = k\ \delta(x)$ $[m/s]$.

1. Elencare le ipotesi necessarie per risolvere il problema, scrivere le condizioni al contorno e scrivere le equazioni di Navier-Stokes per il caso in esame. [5%]
2. Calcolare l'espressione del profilo di velocità e della portata volumetrica in funzione dello spessore del film. [10%]
3. Determinare l'andamento dello spessore del film in funzione della coordinata parallela al piano (x). [15%]
4. Calcolare la distanza dall'origine alla quale il film viene completamente assorbito dal terreno sapendo che $Q_0 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$, $\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 0.01\ Pa \cdot s$, $W = 10\ m$, $\alpha = 30^o$ e $k = 1.31 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$. [10%]

2

Un fluido ideale inviscido (avente viscosità trascurabile) viene mantenuto tra due piastre. La piastra inferiore è mantenuta a temperatura maggiore della piastra superiore: in queste condizioni il fluido è soggetto ad un moto convettivo detto di Benard che può essere descritto dalla seguente funzione di flusso:

$$\psi(x, y) = A\ \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)\ , \tag{1}$$

con $A = 10$, $\alpha = \beta = 1$. La funzione di flusso è definita in un piano (x-y), con y asse verticale, avente dimensioni: $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

1. Determinare le componenti di velocità del fluido e disegnare le linee di flusso. [10%]
2. Determinare se il flusso è irrotazionale o meno. [5%]
3. Calcolare la portata movimentata. [5%]

3

Si consideri il circuito per il trasporto di acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$) in figura. Tutto il circuito è in piano e la tubazione è liscia. La portata trasferita al serbatoio B quando la valvola V è chiusa è pari a $Q = 0.25\ m^3/s$.

1. Determinare il diametro ottimo della tubazione sapendo che il circuito deve funzionare per 25 anni e 8000 ore/anno e che i costi per la pompa sono k_P = 1550 €/kW, i costi per l'installazione e l'esercizio sono k_E = 0.02 €/kWh e i costi per la tubazione sono $k_T = 310 \cdot D$ €/m. [20%]
2. Calcolare la potenza della pompa a valvola V chiusa. [5%]
3. Calcolare la portata volumetrica trasferita al serbatoio B quando viene aperta la valvola V nel ramo inferiore del parallelo. Si assuma per la potenza della pompa un valore pari a quello calcolato al punto precedente. [15%]

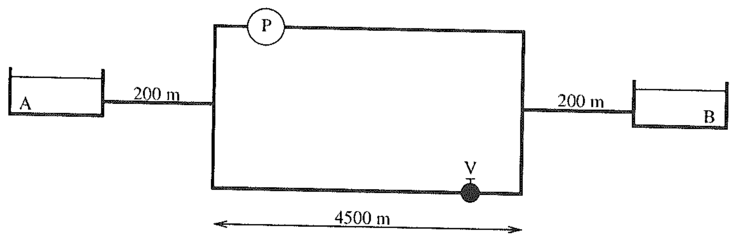


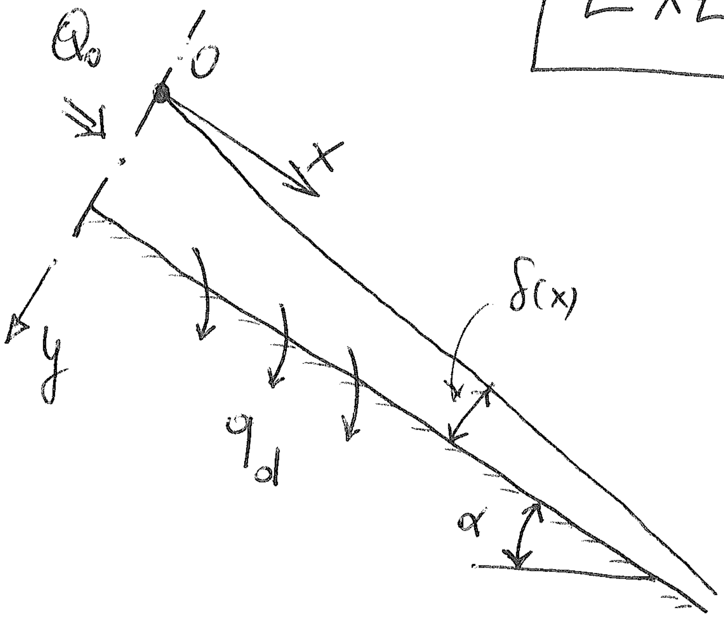
Figure 1: Circuito per il trasporto di acqua.

Eq. Navier-Stokes: coordinate cartesiane $\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Eq. Bernoulli $p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 - \rho l_v + \rho w_s$

Relaz. di Cauchy-Riemann $v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ *Vorticità* $\omega_k = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

EXE 1



$$q_d = k \cdot \delta(x) \left[\frac{m^3}{m^2 s}\right]$$

1.1) Hp: $Re \cdot \frac{\delta(x)}{L} \ll 1 \Rightarrow$ Th. della Lubrificazione

CONT. $\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS x $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad$ con $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha$

NS y $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

[5%]

1.2) $$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \xrightarrow{\int \#1} \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} y + C_1$$

$$\xrightarrow{\int \#2} v_x(x, y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

CALCOLO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE:

I° CASO: ORIGINE SULL' INTERFACCIA LIQUIDO-GAS

I° C.C. $v_x(x, y = \delta(x)) = 0 \qquad$ II° C.C. $\tau_{xy}(y=0) = 0$

$$0 = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\delta^2(x) + \cancel{c_1 \delta(x)}^{\,0} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\delta^2(x)$$

$$0 = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \Rightarrow 0 = \mu \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\boxed{v_x(x,y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(y^2 - \delta^2(x)\right)}$$

6%

II° CASO: ORIGINE SUL PIANO

I° c.c. $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

II° c.c. $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow 0 = -\rho g \sin\alpha\, \delta(x) + \mu c_1$

$$c_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\delta(x)$$

$$\boxed{v_x(x,y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(y^2 - 2\delta(x)\cdot y\right)}$$

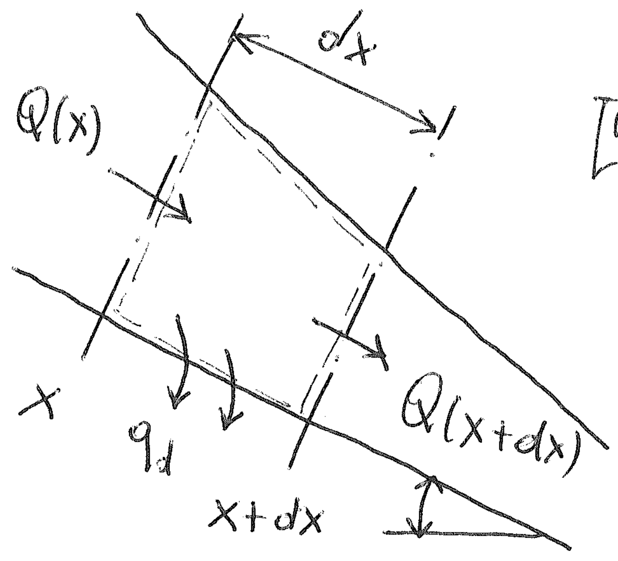
$$\boxed{\frac{Q}{W}(x)} \triangleq \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\underbrace{\int_0^{\delta(x)}\left[y^2 - \delta^2(x)\right]dy}_{\left.\frac{y^3}{3} - \delta^2(x)\cdot y\right|_0^{\delta(x)} = -\frac{2}{3}\delta^3(x)}$$

$$= \boxed{\frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu}\delta^3(x)} \quad (*)$$

[10%]

4%

1.3)



$\left[\frac{m^3}{s}\right]\; Q(x) = Q(x+dx) + Q_{ass}$

con $Q_{ass} = q_d \cdot W dx$

$$\underbrace{\frac{Q(x+dx) - Q(x)}{dx}}_{} = -q_d W \cancel{dx}$$

Nel lim $dx \to 0$ è $\frac{dQ}{dx}$

Quindi: $\frac{dQ}{dx} = -q_d \cdot W < 0$

$\overset{!}{=} -K \cdot \delta(x) \cdot W \quad (1)$

Dall'eq. (*): $\frac{dQ}{dx} = \frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} \cdot W \frac{d\delta^3(x)}{dx}$

$= \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} W \delta^2(x) \frac{d\delta(x)}{dx} \quad (2)$

$$-K \cancel{\delta(x)} \cdot \cancel{W} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \cancel{W} \delta^{\cancel{2}}(x) \frac{d\delta(x)}{dx}$$

$$-\frac{\mu K}{\rho g \sin\alpha} \int_0^x dx = \underbrace{\int_{\delta_0}^{\delta(x)} \delta(x)\, d\delta(x)}_{\delta^2(x)/2 \,\big|_{\delta_0}^{\delta(x)}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \left(\delta_0^2 - \frac{2\mu K}{\rho g \sin\alpha}\cdot x\right)^{1/2}}$$

[15%]

1.4) x^* tale che $\delta(x^*)=0$ ovvero

$$x^* = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu K}\cdot \delta_0^2$$

con $\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q_0}{\rho g \sin\alpha \cdot W}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}}{\cancel{800}\cdot 10\cdot \frac{1}{\cancel{2}}\, 10}}$ ($\cancel{400}$, 200)

$$= \sqrt[3]{1{,}5\cdot 10^{-9}} \cong 1{,}145\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Portanto: $x^* = \frac{\overset{400}{\cancel{800}}\cdot 10\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\,(1{,}145\cdot 10^{-3})^2}{2\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}31\cdot 10^{-3}}$

$$= \boxed{200\ \text{m}}$$

[10%]

EXE 2

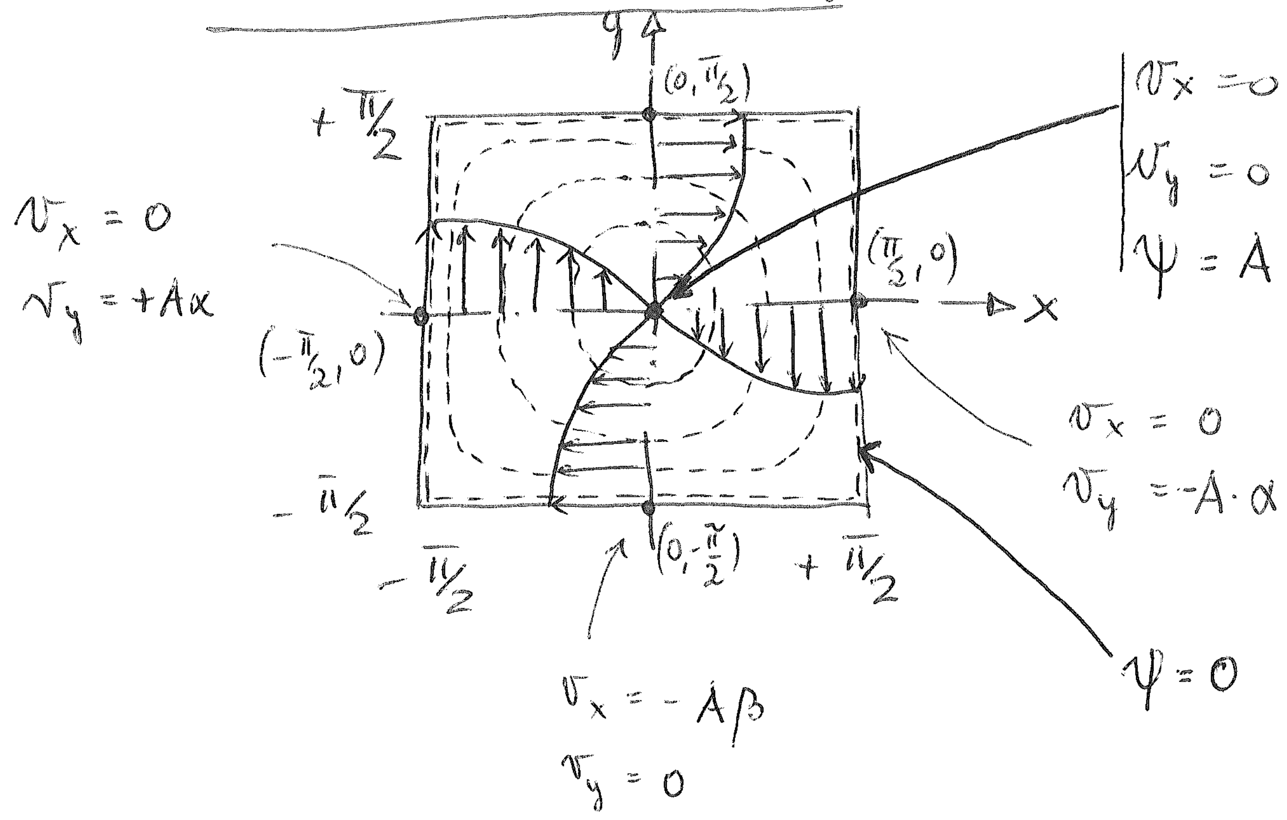
$$\psi(x,y) = A \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$$

2.1) $v_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -A\cos(\alpha \cdot x)\left[-\sin(\beta y)\cdot \beta\right]$

$\overset{!}{=} \underline{A \cdot \beta \cdot \cos(\alpha x)\sin(\beta y)}$

$v_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = A\cos(\beta y)\left[-\sin(\alpha \cdot x)\cdot \alpha\right]$

$\overset{!}{=} \underline{-A \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha x)\cos(\beta y)}$



2.2) $\omega_z = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -A\alpha\cos(\beta y)\dfrac{\partial \sin(\alpha x)}{\partial x}$

$- A\beta \dfrac{\partial \sin(\beta y)}{\partial y} \cdot \cos(\alpha x)$ →

$$\omega_z = -A\alpha^2 \cdot \cos(\beta y) \cdot \cos(\alpha x) - A\beta^2 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$$

$$= -A(\alpha^2 + \beta^2)\left[\cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)\right] \neq 0$$

$\Rightarrow$ IL FLUSSO NON E' IRROTAZIONALE E NON AMMETTE QUINDI UNA FUNZIONE POTENZIALE

Dimostrazione: $v_x = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow d\phi = -v_x\, dx$

$$\phi(x,y) = -\int v_x\, dx = -A\cdot\beta \sin(\beta y) \cdot \int \cos(\alpha x)\, dx = -\frac{A\cdot\beta}{\alpha} \sin(\beta y) \sin(\alpha x) + f(y)$$

$v_y = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow d\phi = -v_y\, dy$

$$\phi(x,y) = -\int v_y\, dy = A\alpha \sin(\alpha x) \cdot \int \cos(\beta y)\, dy = \frac{A\alpha}{\beta} \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) + g(x)$$

$$-\frac{A\beta}{\alpha} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + f(y) = \frac{A\alpha}{\beta} \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) + g(x)$$

$\nexists$ $f(y)$; $g(x)$ tali da verificare questa identità.

2.3) Portata movimentata: $\frac{Q}{W} = \psi^{max} - \psi^{min}$

$= A - 0 = A = 10 \frac{m^2}{s}$

Calcolo alternativo:

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{\pi/2} v_x \Big|_{x=0} dy = A \cdot \beta \underbrace{\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}}_{=1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\beta y)\, dy$$

$$= A \cdot \beta \cdot \left[-\frac{1}{\beta} \cos(\beta y) \right]\Bigg|_0^{\pi/2} = -A \left[\underbrace{\cos\left(\beta \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\cos(\beta \cdot 0)}_{=1} \right]$$

$$= A$$

oppure $$\frac{Q}{W} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_y \Big|_{y=0} dx = -A\alpha \cdot \underbrace{\cos(\beta y)\Big|_{y=0}}_{=1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha x)\, dx$$

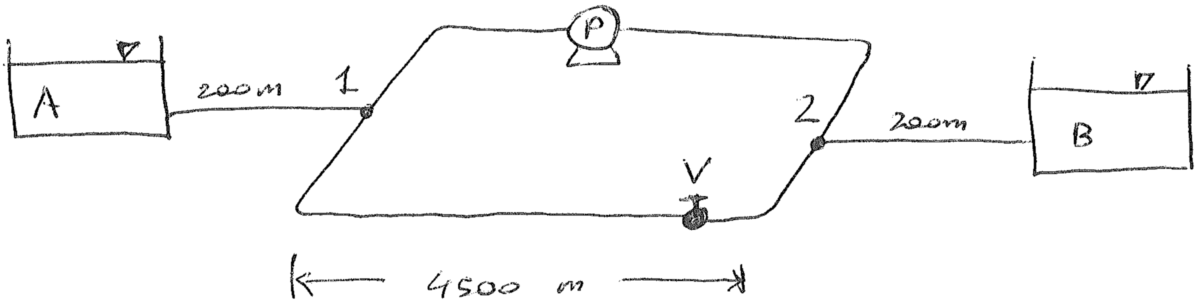
$$= -A \cdot \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) \right]\Bigg|_0^{\pi/2} = A \left[\underbrace{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\cos(\alpha \cdot 0)}_{=1} \right]$$

$$= -A$$ (negativa xchè calcolata rispetto ad una sezione attraversata dal fluido con v_y negativa!)

Lo stesso valore si ottiene calcolando la portata movimentata come:

$$\frac{Q}{W} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} v_x \Big|_{x=0} dy \qquad o \qquad \frac{Q}{W} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} v_y \Big|_{y=0} dx$$

EXE 3



3.1) Diametro ottimo

$$C_{TOT} = K_T \cdot L + \frac{K_P + K_E \cdot N_h \cdot N_y}{10^3} \cdot Pot$$

$$= 310 \cdot L \cdot D + \frac{1{,}550 + 0.02 \cdot 8000 \cdot 25}{\cancel{10^3}} \cdot Pot$$

$$= 310 \cdot 9400 \cdot D + 5{,}55 \cdot Pot =$$

$$= 2914000 \cdot D + 5{,}55 \cdot Pot$$

Con valvola V chiusa:

$$B_{AB}: \quad w_s - l_v^{A \to B} = 0$$

essendo $v_A = v_B = 0$, $p_A = p_B = p_{atm}$, $h_A = h_B$.

Pertanto:

$$Pot \triangleq \rho Q \cdot w_s = \rho Q \, l_v^{A \to B}$$

con $l_v^{A \to B} = 2 v^2 \frac{L_{AB}}{D} \cdot f(Re_{AB})$ e $f(Re_{AB}) = 0{,}079 \, Re_{AB}^{-0{,}25}$

→

$$\ell_v^{A\to B} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{L_{AB}}{D^{1.25}} v^{1.75}$$

$v = \frac{4Q}{\pi D^2} \rightsquigarrow$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{L_{AB}}{D^{1.25}} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^{1,75} \cdot D^{-3.5}$$

$$= \underbrace{0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^{1.75} \cdot L_{AB}}_{C_1 \cong 3,3} \cdot D^{-4.75}$$

$$Pot = \rho Q \cdot C_1 \cdot D^{-4,75} = C_2 \cdot D^{-4,75} \quad \text{con } C_2 \cong 825,62$$

La funzione di costo diventa:

$$C_{TOT} = 2914000 \cdot D + 5,55 \cdot C_2 \cdot D^{-4,75}$$

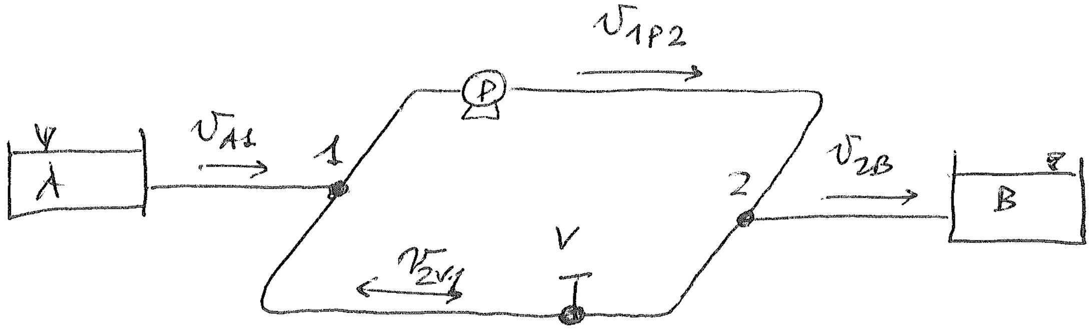
$$\frac{dC_{TOT}}{dD} = 2914000 - 4,75 \cdot 5,55 \cdot C_2 \cdot D^{-5,75} = 0$$

$$D_{ottimo} = \left(\frac{2914000}{26,3625 \cdot C_2}\right)^{-\frac{1}{5.75}} \cong 0,427\,m \quad [20\%]$$

3.2) $Pot = C_2 \cdot D^{-4,75} \cong 47046\,W \cong 47,04\,KW$ [5%]

3.3) Se la valvola V viene aperta:

$\longrightarrow$



CONS. MASSA NODO 1 : $v_{A1} + v_{2V1} = v_{1P2}$ (1)

CONS. MASSA NODO 2 : $v_{2B} + v_{2V1} = v_{1P2}$ (2)

$\Rightarrow v_{A1} = v_{2B}$

B_{A1} : $\dfrac{P_{atm}}{\rho} - l_v^{A\to 1} = \dfrac{P_1}{\rho} + \cancel{\dfrac{1}{2} v_{A1}^2}$ trasc. (3)

B_{2B} : $\dfrac{P_2}{\rho} - l_v^{2\to B} + \cancel{\dfrac{1}{2} v_{2B}^2}$ trasc. $= \dfrac{P_{atm}}{\rho}$ (4)

B_{1P2} : $\dfrac{P_1}{\rho} + w_s - l_v^{1P2} = \dfrac{P_2}{\rho}$ (5)

B_{2V1} : $\dfrac{P_2}{\rho} - l_v^{2V1} = \dfrac{P_1}{\rho}$ (6)

Con $Pot = \rho Q \cdot w_s = \rho\, v_{1P2} \dfrac{\pi D^2}{4} \cdot w_s \Rightarrow w_s = \dfrac{4 \cdot Pot}{\rho \pi D^2 \cdot v_{1P2}}$

Dalle eq. (3) e (4) : $\dfrac{P_{atm}}{\rho} = \dfrac{P_1}{\rho} + l_v^{A\to 1} = \dfrac{P_2}{\rho} - l_v^{2\to B}$

$\Rightarrow \dfrac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{A\to 1} + l_v^{2\to B}$

Dall'eq. (6) : $\dfrac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{2V1}$

$\Bigg\}\ l_v^{A\to 1} + l_v^{2\to B} = l_v^{2V1}$

$$\cancel{2} v_{A1}^2 \frac{L_{A1}}{\cancel{D}} f(Re_{A1}) + \cancel{2} v_{2B}^2 \frac{L_{2B}}{\cancel{D}} f(Re_{2B}) =$$

$$= \cancel{2} v_{2V1}^2 \frac{L_{2V1}}{\cancel{D}} f(Re_{2V1})$$

$$\cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{A1}^{1.75} \cdot L_{A1}}{\cancel{D^{0.25}}} + \cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{2B}^{1.75} \cdot L_{2B}}{\cancel{D^{0.25}}} =$$

$$= \cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{2V1}^{1.75} \cdot L_{2V1}}{\cancel{D^{0.25}}}$$

Tenendo conto che : $v_{A1} = v_{2B}$ e $L_{A1} = L_{2B}$

$$2 v_{2B}^{1,75} \cdot L_{2B} = v_{2V1}^{1.75} \cdot L_{2V1}$$

$$v_{2V1} = v_{2B} \left(\frac{2 L_{2B}}{L_{2V1}}\right)^{\frac{1}{1,75}} =$$

$$\cong 0{,}25 \cdot v_{2B}$$

Sfruttando la conservazione della massa :

$$v_{1P2} = v_{2B} + v_{2V1} \cong 1{,}25 \cdot v_{2B}$$

Combinando l'eq. (5) con $\frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{A \to 1} + l_v^{2 \to B}$ si ha:

$$W_s - l_v^{1P2} = l_v^{A \to 1} + l_v^{2 \to B} \Rightarrow W_s = l_v^{1P2} + 2 l_v^{2 \to B}$$

$$l_v^{A \to 1} = l_v^{2 \to B}$$

$$\frac{4 \cdot Pot}{\rho \pi D^{2} \cdot v_{1P2}^{-0,75}} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} v_{1P2}^{1.75} \frac{L_{1P2}}{D^{1.25}} +$$

$$+ 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot 2 v_{2B}^{1.75} \frac{L_{2B}}{D^{1.25}}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{v_{1P2}^{1.75} \cdot L_{1P2} + 2 v_{2B}^{1.75} L_{2B}}{D^{1.25}}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{(1,25 \cdot v_{2B})^{1.75} L_{1P2} + 2 v_{2B}^{1.75} L_{2B}}{\cancel{D^{1.25}}}$$

$$\frac{4 \, Pot}{\rho \pi D^{0,75}} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left[(1,25)^{1.75} L_{1P2} + 2 L_{2B}\right] v_{2B}^{1.75} \cdot v_{1P2}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left[(1,25)^{1.75} L_{1P2} + 2 L_{2B}\right] (1,25) v_{2B}^{2.75}$$

$$\underbrace{\frac{4 \cdot 47040}{10^3 \cdot \pi \cdot (0,637)^{0,75}}}_{\sim 83.99} = \overbrace{0,158 \underbrace{\left(10^6\right)^{-0,25}}_{0.0316} \cdot \underbrace{\left[1,48 \cdot 4500 + 400\right]}_{\sim 7050} (1,25)}^{\sim 44} v_{2B}^{2.75}$$

$$v_{2B} \cong \left(\frac{83,99}{44}\right)^{\frac{1}{2.75}} = 1,265 \ m/s$$

$$Q_B = v_{2B} \frac{\pi D^2}{4} = 1,265 \frac{\pi (0,427)^2}{4} \cong 0,182 \ m^3/s$$

[15%]