FLUIDODINAMICA, AA 2013/2014

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore

24 Gennaio 2014

1

Una portata volumetrica Q_0 $[m^3/s]$ di liquido inquinante fuoriesce accidentalmente dalla sommità di una piccola collina e scorre lungo il pendio orientale di quest'ultima. Il pendio è schematizzabile come un piano costituito da materiale poroso (il terreno) ed inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il piano ha lunghezza L, larghezza W, ed assorbe un flusso volumetrico di liquido proporzionale allo spessore del film: $q_d = k\ \delta(x)$ $[m/s]$.

1. Elencare le ipotesi necessarie per risolvere il problema, scrivere le condizioni al contorno e scrivere le equazioni di Navier-Stokes per il caso in esame. [5%]
2. Calcolare l'espressione del profilo di velocità e della portata volumetrica in funzione dello spessore del film. [10%]
3. Determinare l'andamento dello spessore del film in funzione della coordinata parallela al piano (x). [15%]
4. Calcolare la distanza dall'origine alla quale il film viene completamente assorbito dal terreno sapendo che $Q_0 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$, $\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 0.01\ Pa \cdot s$, $W = 10\ m$, $\alpha = 30^o$ e $k = 1.31 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$. [10%]

2

La vasca di lavaggio di un impianto industriale ha una sezione $S = 2\ m^2$, è alta $H = 1\ m$ ed è piena fino all'orlo. Un tubo di alimentazione scarica con continuità la portata Q_{in} nella vasca, mentre uno scarico sul fondo di diametro $D = 5 \cdot 10^{-2}\ m$ può essere regolato attraverso l'apertura di una valvola. Calcolare il valore della portata Q_{in} per garantire che il livello si dimezzi in 4 minuti. [20%]

3

Si consideri il circuito per il trasporto di acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$) in figura. Tutto il circuito è in piano e la tubazione è liscia. La portata trasferita al serbatoio B quando la valvola V è chiusa è pari a $Q = 0.25\ m^3/s$.

1. Determinare il diametro ottimo della tubazione sapendo che il circuito deve funzionare per 25 anni e 8000 ore/anno e che i costi per l'installazione della pompa sono $k_P = 1550$ €/kW, i costi per l'esercizio sono $k_E = 0.02$ €/kWh e i costi per la posa della tubazione sono $k_T = 310 \cdot D$ €/m. [20%]
2. Calcolare la potenza della pompa a valvola V chiusa. [5%]
3. Calcolare la portata volumetrica trasferita al serbatoio B quando viene aperta la valvola V nel ramo inferiore del parallelo. Si assuma per la potenza della pompa un valore pari a quello calcolato al punto precedente. [15%]

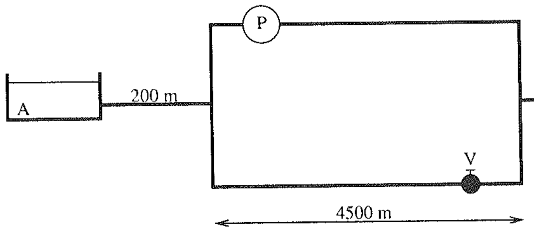
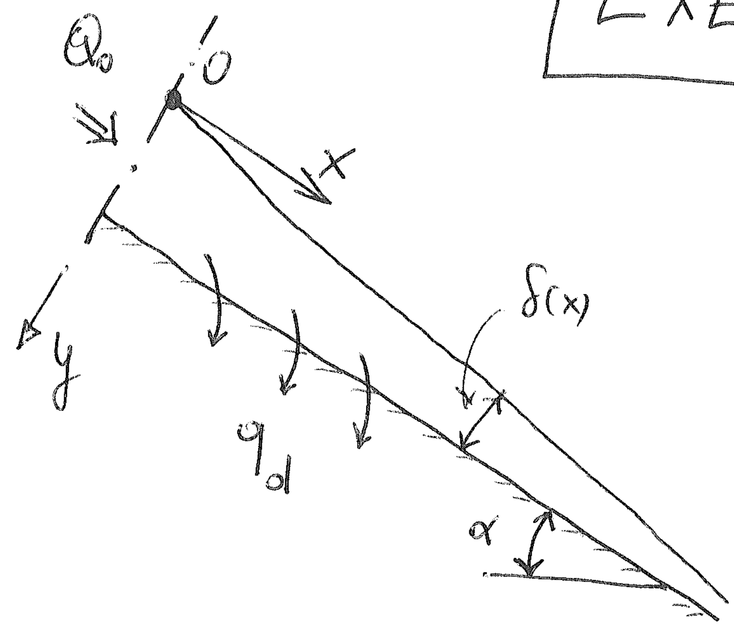


Figure 1: Circuito per il trasporto di acqua.

$$\textit{Continuità:}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\ ; \qquad \textit{Navier-Stokes:}\ \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$$

$$\textit{Eq. Bernoulli}\quad p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 - \rho l_v + \rho w_s$$

EXE 1



$$q_d = k \cdot \delta(x) \left[\frac{m^3}{m^2 s} \right]$$

1.1) Hp: $Re \cdot \frac{\delta(x)}{L} \ll 1 \Rightarrow$ Th. della Lubrificazione

CONT. $\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS$_x$ $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ $\quad$ con $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha$

NS$_y$ $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

[5%]

1.2) $$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \xrightarrow{\int \#1} \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} y + C_1$$

$$\xrightarrow{\int \#2} v_x(x, y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

CALCOLO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE:

I° CASO: ORIGINE SULL' INTERFACCIA LIQUIDO-GAS

I° c.c. $v_x(x, y = \delta(x)) = 0$ $\qquad$ II° c.c. $\tau_{xy}(y=0) = 0$

$$0 = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\delta^2(x) + \cancel{C_1\delta(x)}^{0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\delta^2(x)$$

$$0 = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \Rightarrow 0 = \mu \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\boxed{v_x(x,y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(y^2 - \delta^2(x)\right)}$$

6%

II° CASO: ORIGINE SUL PIANO

I° c.c. $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

II° c.c. $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow 0 = -\rho g \sin\alpha\, \delta(x) + \mu C_1$

$$C_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\delta(x)$$

$$\boxed{v_x(x,y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(y^2 - 2\delta(x)\cdot y\right)}$$

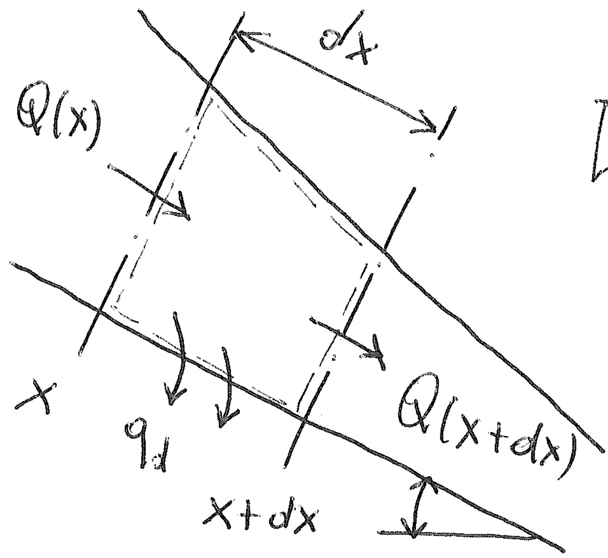
$$\boxed{\frac{Q(x)}{W}} \triangleq \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\underbrace{\int_0^{\delta(x)}\left[y^2 - \delta^2(x)\right]dy}_{\left.\frac{y^3}{3} - \delta^2(x)\cdot y\right|_0^{\delta(x)} = -\frac{2}{3}\delta^3(x)}$$

$$= \boxed{\frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu}\delta^3(x)} \quad (*)$$

[10%]

4%

1.3)



$$\left[\frac{m^3}{s}\right] \quad Q(x) = Q(x+dx) + Q_{ass}$$

$$\text{con } Q_{ass} = q_d \cdot W dx$$

$$\underbrace{\frac{Q(x+dx) - Q(x)}{dx}}_{\text{Nel lim } dx \to 0 \text{ è } \frac{dQ}{dx}} = -q_d W \cancel{dx}$$

Quindi: $$\frac{dQ}{dx} = -q_d \cdot W < 0$$

$$\overset{!}{=} -K \cdot \delta(x) \cdot W \qquad (1)$$

Dall'eq. (*): $$\frac{dQ}{dx} = \frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} \cdot W \frac{d\delta^3(x)}{dx}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} W \delta^2(x) \frac{d\delta(x)}{dx} \qquad (2)$$

$$-K \cancel{\delta(x)} \cdot \cancel{W} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \cancel{W} \delta^{\cancel{2}}(x) \frac{d\delta(x)}{dx}$$

$$-\frac{\mu K}{\rho g \sin\alpha} \int_0^x dx = \underbrace{\int_{\delta_0}^{\delta(x)} \delta(x)\, d\delta(x)}_{\left.\frac{\delta^2(x)}{2}\right|_{\delta_0}^{\delta(x)}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \left(\delta_o^2 - \frac{2\mu K}{\rho g \sin\alpha} \cdot x \right)^{1/2}}$$ [15%]

1.4) x^* tale che $\delta(x^*) = 0$ ovvero

$$x^* = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu K} \cdot \delta_o^2$$

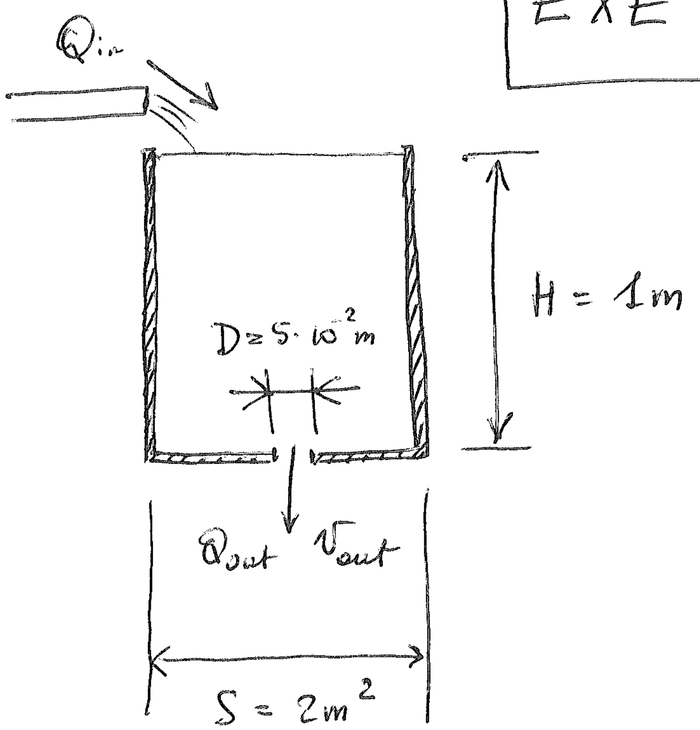
con $\delta_o = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q_o}{\rho g \sin\alpha \cdot W}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 10^{-2} \cdot 2\cdot 10^{-3}}{\cancel{800}^{\cancel{400}\,200} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{10}}}$

$$= \sqrt[3]{1{,}5\cdot 10^{-9}} \cong 1{,}145\cdot 10^{-3}\ m$$

Portanto: $x^* = \frac{\cancel{800}^{400}\cdot 10\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\,(1{,}145\cdot 10^{-3})^2}{2\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}31\cdot 10^{-3}}$

$$= \boxed{200\ m}$$ [10%]

EXE 2 GEST



$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

$$S\,\frac{dh(t)}{dt} = Q_{in} - v_{out} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

con $v_{out}(t) = \sqrt{2g\,h(t)}$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{Q_{in}}{S} - \frac{\pi D^2}{4S}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h(t)}$$

$$= A - B\sqrt{h(t)}$$

$$A - B\sqrt{h(t)} = z \rightarrow \sqrt{h(t)} = \frac{A - z}{B}$$

$$-B\,\frac{1}{2}\,h(t)^{-1/2}\,dh(t) = dz \rightarrow dh(t) = -\frac{2}{B} \cdot \sqrt{h(t)}\,dz$$

$$= -\frac{2}{B^2}(A - z)\,dz$$

$$\int_{h_{in}}^{h_{fin}} \frac{dh(t)}{A - B\sqrt{h(t)}} = -\frac{2}{B^2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{A - z}{z}\,dz = -\frac{2}{B^2}\left[A\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z} - \int_{z_1}^{z_2} dz\right]$$

$$= -\frac{2}{B^2}\left(A \ln z\Big|_{z_1}^{z_2} - z\Big|_{z_1}^{z_2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{B^2}\left\{A \ln\left[A - B\sqrt{h(t)}\right]\Big|_{h_{in}}^{h_{fin}} - \left[A - B\sqrt{h(t)}\right]\Big|_{h_{in}}^{h_{fin}}\right.$$

$$= -\frac{2}{B^2}\left\{ A \cdot \ln\left[\frac{A - B\sqrt{h_{fin}}}{A - B\sqrt{h_{in}}}\right] - \left[\cancel{A} - B\sqrt{h_{fin}} - \cancel{A} + B\sqrt{h_{in}}\right]\right\}$$

$$= -\frac{2}{B^2}\left\{ A \cdot \ln\left[\frac{A - B\sqrt{h_{fin}}}{A - B\sqrt{h_{in}}}\right] + B\left(\sqrt{h_{fin}} - \sqrt{h_{in}}\right)\right\}$$

In questa equazione l' incognita è $A = \frac{Q_{in}}{S}$, o meglio $Q_{in} = A \cdot S$. L' equazione va quindi risolta rispetto ad A sapendo che:

$h_{in} = H = 1\ m$

$h_{fin} = \frac{H}{2} = 0{,}5\ m$

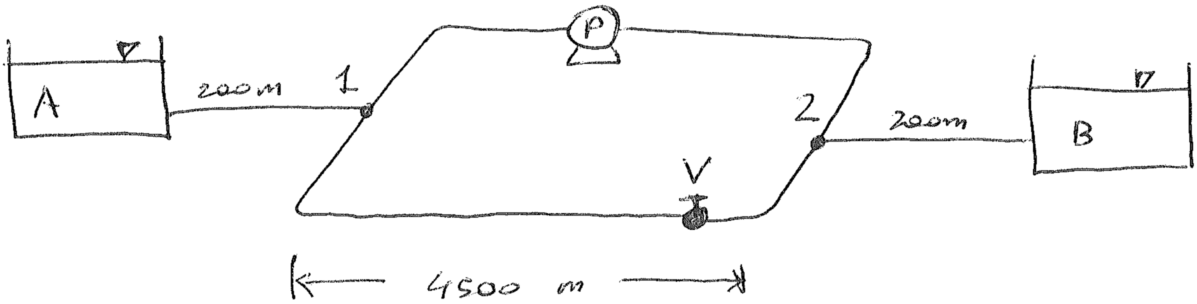
$B = \frac{\pi D^2}{4S}\sqrt{2g} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 2}\sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cong \frac{8{,}7 \cdot 10^{-3}}{2} = 4{,}35 \cdot 10^{-3}$

$T = 4\ min = 240\ sec.$

$$\ln\left[\frac{A - B\sqrt{h_{fin}}}{A - B\sqrt{h_{in}}}\right]^A = -\frac{T \cdot B^2}{2} - B\left(\sqrt{h_{fin}} - \sqrt{h_{in}}\right)$$

$$\ln\left[\frac{A - B\sqrt{h_{in}}}{A - B\sqrt{h_{fin}}}\right]^A = \frac{T \cdot B^2}{2} + B\left(\sqrt{h_{fin}} - \sqrt{h_{in}}\right)$$

EXE 3



3.1) Diametro ottimo

$$C_{TOT} = K_T \cdot L + \frac{K_P + K_E \cdot N_h \cdot N_y}{10^3} \cdot Pot$$

$$= 310 \cdot L \cdot D + \frac{1{,}550 + 0.02 \cdot 8025}{\cancel{10^3}} \cdot Pot$$

$$= 310 \cdot 9400 \cdot D + 5{,}55 \cdot Pot =$$

$$= 2914000 \cdot D + 5{,}55 \cdot Pot$$

Con valvola V chiusa:

$$B_{AB}: \quad w_s - l_v^{A \to B} = 0$$

essendo $v_A = v_B = 0$, $P_A = P_B = P_{atm}$, $h_A = h_B$.

Pertanto:

$$Pot \triangleq \rho Q \cdot w_s = \rho Q \, l_v^{A \to B}$$

con $l_v^{A \to B} = 2 v^2 \frac{L_{AB}}{D} \cdot f(Re_{AB})$ e $f(Re_{AB}) = 0{,}079 \, Re_{AB}^{-0{,}25}$

→

$$l_v^{A\to B} = 0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{L_{AB}}{D^{1.25}}\, v^{1.75}$$

$v = \frac{4Q}{\pi D^2} \rightsquigarrow$

$$= 0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{L_{AB}}{D^{1.25}} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^{1,75} \cdot D^{-3.5}$$

$$= \underbrace{0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^{1.75} \cdot L_{AB}}_{C_1 \cong 33} \cdot D^{-4.75}$$

$$Pot = \rho Q \cdot C_1 \cdot D^{-4,75} = C_2 \cdot D^{-4,75} \quad \text{con } C_2 \cong 825,62$$

La funzione di costo diventa:

$$C_{TOT} = 2914000 \cdot D + 5,55 \cdot C_2 \cdot D^{-4,75}$$

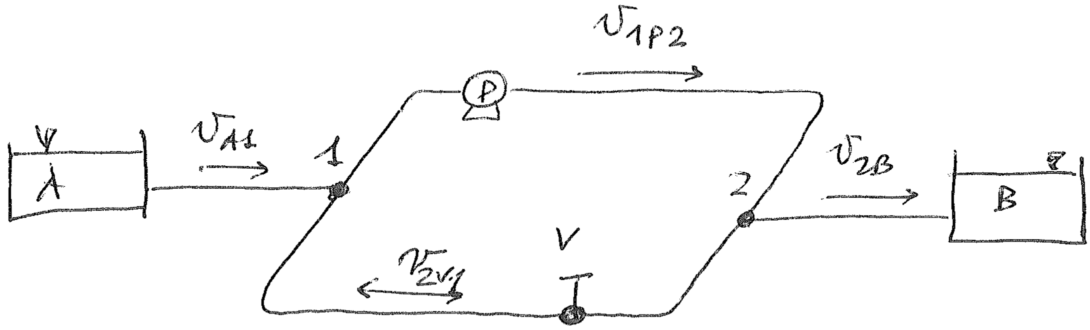
$$\frac{dC_{TOT}}{dD} = 2914000 - 4,75 \cdot 5,55 \cdot C_2 \cdot D^{-5,75} = 0$$

$$D_{ottimo} = \left(\frac{2914000}{26,3625 \cdot C_2}\right)^{-\frac{1}{5.75}} \cong \mathbf{0,427\,m} \quad [20\%]$$

3.2) $Pot = C_2 \cdot D^{-4,75} \cong 47046\,W \cong 47,04\,KW$ [5%]

3.3) Se la valvola V viene aperta:

$\longrightarrow$



CONS. MASSA NODO 1 : $v_{A1} + v_{2V1} = v_{1P2}$ (1)

CONS. MASSA NODO 2 : $v_{2B} + v_{2V1} = v_{1P2}$ (2)

$\Rightarrow v_{A1} = v_{2B}$

B_{A1} : $\frac{P_{atm}}{\rho} - l_v^{A\to 1} = \frac{P_1}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{A1}^2}$ trasc. (3)

B_{2B} : $\frac{P_2}{\rho} - l_v^{2\to B} + \cancel{\frac{1}{2} v_{2B}^2} = \frac{P_{atm}}{\rho}$ trasc. (4)

B_{1P2} : $\frac{P_1}{\rho} + w_s - l_v^{1P2} = \frac{P_2}{\rho}$ (5)

B_{2V1} : $\frac{P_2}{\rho} - l_v^{2V1} = \frac{P_1}{\rho}$ (6)

Con $Pot = \rho Q \cdot w_s = \rho\, v_{1P2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot w_s \Rightarrow w_s = \frac{4 \cdot Pot}{\rho \pi D^2 \cdot v_{1P2}}$

Dalle eq. (3) e (4): $\frac{P_{atm}}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + l_v^{A\to 1} = \frac{P_2}{\rho} - l_v^{2\to B}$

$\Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{A\to 1} + l_v^{2\to B}$

Dall'eq. (6) : $\frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{2V1}$

$$\left.\begin{matrix} \frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{A\to 1} + l_v^{2\to B} \\ \frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{2V1} \end{matrix}\right\} \quad l_v^{A\to 1} + l_v^{2\to B} = l_v^{2V1}$$

$$\cancel{2} v_{A1}^2 \frac{L_{A1}}{\cancel{D}} f(Re_{A1}) + \cancel{2} v_{2B}^2 \frac{L_{2B}}{\cancel{D}} f(Re_{2B}) =$$

$$= \cancel{2} v_{2V1}^2 \frac{L_{2V1}}{\cancel{D}} f(Re_{2V1})$$

$$\cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{A1}^{1.75} \cdot L_{A1}}{\cancel{D^{0.25}}} + \cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{2B}^{1.75} \cdot L_{2B}}{\cancel{D^{0,25}}} =$$

$$= \cancel{0{,}079 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} \cdot \frac{v_{2V1}^{1.75} \cdot L_{2V1}}{\cancel{D^{0,25}}}$$

Tenendo conto che : $v_{A1} = v_{2B}$ e $L_{A1} = L_{2B}$

$$2 v_{2B}^{1,75} \cdot L_{2B} = v_{2V1}^{1.75} \cdot L_{2V1}$$

$$v_{2V1} = v_{2B} \left(\frac{2 L_{2B}}{L_{2V1}}\right)^{\frac{1}{1,75}} =$$

$$\cong 0{,}25 \cdot v_{2B}$$

Sfruttando la conservazione della massa :

$$v_{1P2} = v_{2B} + v_{2V1} \cong 1{,}25 \cdot v_{2B}$$

Combinando l'eq. (5) con $\frac{P_2 - P_1}{\rho} = l_v^{A\to1} + l_v^{2\to B}$ si ha:

$$W_s - l_v^{1P2} = l_v^{A\to1} + l_v^{2\to B} \Rightarrow W_s = l_v^{1P2} + 2\, l_v^{2\to B}$$

$$l_v^{A\to1} = l_v^{2\to B}$$

$$\frac{4\,Pot}{\rho \pi D^{2-0,75}\, v_{1P2}} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} v_{1P2}^{1.75} \frac{L_{1P2}}{D^{1.25}} + 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot 2\, v_{2B}^{1.75} \frac{L_{2B}}{D^{1.25}}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{v_{1P2}^{1.75} \cdot L_{1P2} + 2 v_{2B}^{1.75} L_{2B}}{D^{1.25}}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \frac{(1,25\, v_{2B})^{1.75} L_{1P2} + 2 v_{2B}^{1.75} L_{2B}}{\cancel{D^{1.25}}}$$

$$\frac{4\,Pot}{\rho \pi D^{0,75}} = 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left[(1,25)^{1.75} L_{1P2} + 2 L_{2B}\right] v_{2B}^{1.75} \cdot v_{1P2}$$

$$= 0,158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25} \cdot \left[(1,25)^{1.75} L_{1P2} + 2 L_{2B}\right] (1,25)\, v_{2B}^{2.75}$$

$$\underbrace{\frac{4 \cdot 47040}{10^3 \cdot \pi \cdot (0,637)^{0,75}}}_{\sim 83.99} = \overbrace{0,158 \underbrace{\left(10^6\right)^{-0,25}}_{0.0316} \cdot \underbrace{\left[1,48 \cdot 4500 + 400\right]}_{\sim 7050} (1,25)}^{\sim 44} v_{2B}^{2.75}$$

$$v_{2B} \cong \left(\frac{83,99}{44}\right)^{\frac{1}{2.75}} = 1,265 \text{ m/s}$$

$$Q_B = v_{2B} \frac{\pi D^2}{4} = 1,265 \frac{\pi (0,427)^2}{4} \cong 0,182 \text{ m}^3/\text{s}$$

[15%]