FLUIDODINAMICA, AA 2012/2013

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

23 Gennaio 2013

1

Il moto di un fluido non viscoso è descritto dal potenziale di velocità :

$$\phi(r,\theta) = A \cdot \theta + B \cdot r \cdot cos\theta$$

con A e B costanti note.

1. Determinare le componenti di velocità v_r e v_θ del fluido. [5%]
2. Verificare che il fluido è incomprimibile. [10%]
3. Determinare l'espressione della funzione di flusso, $\Psi(r,\theta)$. [15%]

2

Un getto di olio molto viscoso ($\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 0.15\ Pa \cdot s$) viene emesso verso l'alto da un condotto di diametro $D_1 = 0.05\ m$ con portata $w = 10\ kg/s$. Si ipotizzi che il profilo di velocità del fluido all'interno del tubo sia uguale a quello all'interno del getto,

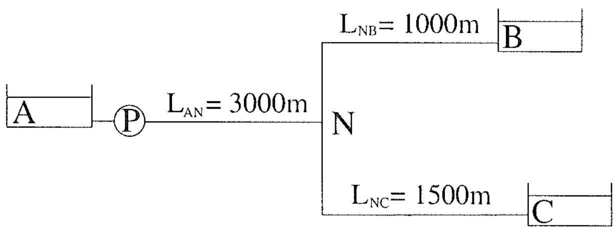
1. determinare l'altezza massima alla quale può arrivare il getto; [10%]
2. determinare l'altezza massima alla quale può essere sostenuto un disco avente una massa pari a 4 kg. [20%]

3

Per trasportare una portata volumetrica $Q = 0.2\ m^3/s$ di acqua ($\rho = 1000\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa{\cdot}s$) dal serbatoio A ai due serbatoi B e C si utilizza l'acquedotto in figura (tubazione liscia: $f = 0.079Re^{-0.25}$).

1. Calcolare il diametro ottimo dell'acquedotto sapendo che *(i)* l'impianto funzionerà per un periodo di esercizio pari ad $N_y = 10$ anni con $N_h = 6000$ ore di esercizio per anno e che *(ii)* i costi da sostenere per realizzarlo sono:
   - costo della tubazione per metro lineare: $K_T D = 310$ €$/m$,
   - costo della stazione di pompaggio: $K_P = 150$ €$/kW$,
   - costo di esercizio: $K_E = 0.01$ €$/kWh$. [30%]
2. Per il diametro determinato al punto precedente, calcolare la potenza della pompa e le portate volumetriche nei rami NB e NC. [10%]

Figura 1: Circuito idraulico (esercizio 3).



Relazioni di Cauchy-Riemann (Coord. polari) $v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $v_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$.

Eq. Continuita' (Coord. polari) $\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$,

Equazione di Bernoulli (forma integrale) $B_{1\to 2} : \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + w_s - l_v = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho}$

Conservazione della quantità di moto $\mathbf{0} = w(\beta_1 \mathbf{v}_1 - \beta_2 \mathbf{v}_2) + p_1 \mathbf{A}_1 - p_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{F} + \left(\int_{z_1}^{z_2} \rho A dz \right) \mathrm{g}$

EXE 1

$$\phi(r,\theta) = A\cdot\theta + B\cdot r\cdot\cos\theta$$

1.1) $v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -B\cos\theta$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{A}{r} + B\sin\theta \qquad [5\%]$$

1.2) Flusso incomprimibile se $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-Br\cos\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{A}{r} + B\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{B}{r}\cos\theta + \frac{B}{r}\cos\theta = 0 \quad \text{c.v.d.} \qquad [10\%]$$

1.3) $v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Rightarrow d\psi = -r v_r\, d\theta$

$$= B\cdot r\cos\theta\, d\theta$$

$$\psi = Br\sin\theta + f'(r) \qquad [I^\circ]$$

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} \Rightarrow d\psi = v_\theta\, dr = \left(-\frac{A}{r} + B\sin\theta\right)dr$$

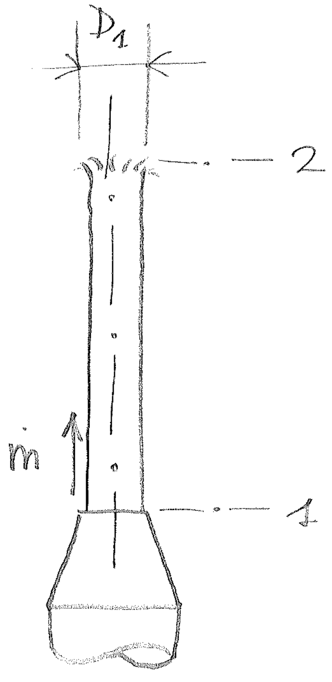
$$\psi = -A\ln r - Br\sin\theta + f''(\theta) \qquad [II^\circ]$$

Uguagliando $[I^\circ]$ e $[II^\circ]$:

$f''(\theta) = 0$

$f'(r) = -A\ln r$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\psi = -A\ln r - Br\sin\theta}$ [15%]

EXE 2



$\dot m = 10\ kg/s$

$D_1 = 0,05\ m$

$\rho = 800\ \frac{kg}{m^3}$

$\mu = 0,15\ Pa \cdot s$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{4\dot m}{\rho \pi D_1^2}} = \frac{4 \cdot 10}{800\pi(0,05)^2} = \boxed{6,366\ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho v D_1}{\mu} = \frac{800 \cdot 6,366 \cdot 0,05}{0,15} \cong 1700$$ Flusso laminare

2.1) $\boxed{h^{max} = \frac{v^2}{2g} \cong 2,065\ m}$ [10%] (da Bernoulli tra 1 e 2)

2.2) Dovendo sostenere un disco di massa $m = 4\ kg$:

$$0 = \dot m\left[\beta_1 v_1 - \beta_2 \cancel{v_2}^{\,0}\right] + \cancel{p_1 A_1} - \cancel{p_2 A_2} - F - \int_{z_1}^{z_2} \rho g A\, dz$$

[Cons. q.d.m. in direz. verticale] $\quad p_1 = p_2 = p_{atm}$; $\quad A_1 = A_2 = \frac{\pi D_1^2}{4}$

$$0 = \dot m \beta_1 v_1 - F - \rho g A(z_2 - z_1)$$

Con $v_1 = v = 6,366\ m/s$; $z_2 - z_1 = h^{max}_{new}$

F = forza prodotta dal getto sul disco, pari in modulo alla forza peso del disco

$$h^{max}_{new} = \frac{\dot{m}\beta_1 v_1 - mg}{\rho g \frac{\pi D_1^2}{4}}$$

Ora, assumendo profilo di velocità piatto nel getto, possiamo porre $\beta_1 = 1$ anche se il regime di flusso è laminare. Troviamo:

$$\boxed{h^{max}_{new} = \frac{10 \cdot 6{,}366 - 4 \cdot 9{,}81}{800 \cdot 9{,}81 \frac{\pi (0{,}05)^2}{4}} \simeq 1{,}585\ m \quad [20\%]}$$

Chiaramente $h^{max}_{new} < h^{max}$.

EXE 2

(*) $Q = 0{,}2 \ \frac{m^3}{s} \Rightarrow v_{AN} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{0.255}{D^2}$

▶ $C_{TOT} = K_T D L + \left(\frac{K_P + K_E N_y N_h}{10^3}\right) Pot \quad \to L = 5500$

$= 310 \cdot 5500 \cdot D + \left(\frac{150 + 0{,}01 \cdot 10 \cdot 6000}{10^3}\right) Pot$

$= 1{,}705 \cdot 10^6 D + \underbrace{(0.15 + 0{,}6)}_{0{,}75} Pot$

▶ $Pot = \delta W_s \cdot \rho Q$!

▶ B_{AN} : $\frac{P_{atm}}{\rho} + dW_s - dl_v^{AN} = \frac{P_N}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{AN}^2}$ trasc.

$dW_s = \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} + dl_v^{AN} \quad [1]$

▶ B_{NB} : $\cancel{\frac{1}{2} v_{NB}^2} + \frac{P_N}{\rho} - dl_v^{NB} = \frac{P_{atm}}{\rho} \Rightarrow \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} = dl_v^{NB}$ trasc.

▶ B_{NC} : $\cancel{\frac{1}{2} v_{NC}^2} + \frac{P_N}{\rho} - dl_v^{NC} = \frac{P_{atm}}{\rho} \rightarrow \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} = dl_v^{NC}$ trasc.

$\Rightarrow \boxed{dl_v^{NB} = dl_v^{NC}}$

Ora: $Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 10^6 \cdot v \cdot D \overset{(*)}{=} 10^6 \cdot \frac{4Q}{\pi D^2} \cdot D = 2{,}55 \cdot 10^5 / D$

Il flusso è turbolento se: $Re > 4000$ ovvero $\boxed{D < 63{,}66 \, m}$

Probabile!

Posso pertanto calcolare le perdite usando l'eq. di Blasius per f :

$$\boxed{dl_v = 2 f v^2 \frac{L}{D}} \qquad dl_v^{NB} = dl_v^{NC}$$

$$\hookrightarrow \cancel{0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} v_{NB}^{1{,}75} \frac{L_{NB}}{\cancel{D^{1{,}25}}} = \cancel{0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} v_{NC}^{1{,}75} \frac{L_{NC}}{\cancel{D^{1{,}25}}}$$

$$v_{NB}^{1{,}75} L_{NB} = v_{NC}^{1{,}75} L_{NC}$$

$$\boxed{v_{NB} = v_{NC} \left(\frac{L_{NC}}{L_{NB}}\right)^{\frac{1}{1.75}}}$$

$$\boxed{\cong 1{,}26\, v_{NC}}$$

Cons massa nodo N : $\boxed{v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} \cong 2{,}26\, v_{NC}}$

Tornando alla [1] :

$$\boxed{dW_s} = dl_v^{NC} + dl_v^{AN} = 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \left(v_{NC}^{1{,}75} L_{NC} + v_{AN}^{1{,}75} L_{AN}\right) D^{-1{,}25}$$

$$= 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \left(\frac{L_{NC}}{2{,}26^{1{,}75}} + L_{AN}\right) v_{AN}^{1{,}75} \cdot D^{-1{,}25}$$

$$= 0{,}158 \left(10^6\right)^{-0{,}25} \cdot \left(\frac{1500}{2{,}26^{1{,}75}} + 3000\right) v_{AN}^{1{,}75} \cdot D^{-1{,}25}$$

$$v_{AN} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\cong 16{,}788 \cdot (0{,}255)^{1{,}75} \cdot D^{-4{,}75}$$

$$\cong \boxed{1{,}536 \cdot D^{-4{,}75}}$$

$$Pot = 1{,}536 \cdot D^{-4{,}75} \cdot \rho Q \cong 307{,}24 \cdot D^{-4{,}75}$$

$$C_{TOT} = 1{,}705 \cdot 10^6\, D + \underbrace{0{,}75 \cdot 307{,}24}_{230{,}4324} \cdot D^{-4{,}75}$$

$$\frac{d\,C_{TOT}}{dD} = 1{,}705 \cdot 10^6 - \underbrace{4{,}75 \cdot 230{,}4324}_{1094{,}554} \cdot D^{-5{,}75} = 0$$

$$\boxed{D_{ottimo}} = \underbrace{\left(\frac{1{,}705 \cdot 10^6}{1{,}094 \cdot 10^3}\right)}_{1557{,}7122}^{-\frac{1}{5{,}75}}$$

$$\cong \boxed{0{,}278 \text{ m}}$$

$$\boxed{Pot = 307{,}24 \cdot D_{ott}^{-4{,}75} \cong 133{,}28 \text{ KW}}$$

$$v_{AN} = \frac{0{,}255}{(D_{ott})^2} \cong 3{,}3 \text{ m/s} \to v_{NC} \cong 1{,}46 \text{ m/s}$$

$$\to v_{NB} \cong 1{,}84 \text{ m/s}$$

$$\boxed{Q_{NC} = v_{NC} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} = 0{,}0886 \text{ m}^3/\text{s}}$$

$$\boxed{Q_{NB} = v_{NB} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} = 0{,}1117 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Ridistribuzione delle portate:

$$\ell_v^{NC} = \ell_v^{NB} \Rightarrow \cancel{0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25}} v_{NC}^{1,75} \frac{L_{NC}^{*}}{\cancel{D^{1,25}}} = \cancel{0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25}} v_{NB}^{1,75} \frac{L_{NB}}{\cancel{D^{1,25}}}$$

$$v_{NB} = v_{NC}\left(\frac{L_{NC}^{*}}{L_{NB}}\right)^{\frac{1}{1,75}} = v_{NC} \cdot 3^{1/1,75} \cong 1,87\ v_{NC}$$

$$v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} \cong 2,87\ v_{NC} \Rightarrow \boxed{v_{NC} = \frac{v_{AN}}{2,87} \cong 1,15\ \frac{m}{s}}$$

$$\boxed{v_{NB} = 1,87\ v_{NC} = 2,15\ m/s}$$

$$\boxed{Q_{NC} = v_{NC}\frac{\pi D_{ott}^2}{4} \cong 0,07\ m^3/s} \quad (-21,2\%)$$

$$\boxed{Q_{NB} = v_{NB}\frac{\pi D_{ott}^2}{4} \cong 0,13\ m^3/s} \quad (+21,2\%)$$