Fluidodinamica, AA 2012/2013

Primo Compito - Durata 2 ore - Libri Chiusi

29 Gennaio 2013

1

Un condensatore piano è costituito da una lastra verticale di larghezza W e lunghezza L mantenuta a temperatura costante sulla quale condensa il vapor d'acqua. Il tasso di condensazione del vapore è costante e pari a q [m/s]. Il film di condensazione che si viene a formare sulla lastra ha spessore iniziale nullo ($\delta_0 = \delta(x = 0) = 0$) ed è soggetto ad uno sforzo di taglio τ_i generato all'interfaccia da una corrente d'aria ascendente.

1. Semplificare le equazioni di continuità e Navier-Stokes per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate. [5%]
2. Calcolare il profilo di velocità nel film. [10%]
3. Disegnare graficamente (nella maniera più accurata possibile) il profilo di velocità nel film. [10%]
4. Per misurare il tasso di condensazione q si pratica una incisione ad una distanza $x = L/2$ dall'inizio della lastra e si estrae tutta la portata, che risulta pari a Q_f $[m^3/s]$. Si determini l'espressione per il tasso di condensazione q, per la portata specifica Γ $[kg/m \cdot s]$ e per lo spessore del film tutti valutati in corrispondenza dell'incisione. [15%]

2

Un umidificatore è costituito da un atomizzatore a disco (di raggio R) che ruota a velocità angolare, Ω, costante. Sull'atomizzatore viene alimentato il liquido da utilizzare per l'umidificazione. Per effetto centrifugo, dal bordo del disco si staccano orizzontalmente gocce di diametro D_p e velocità tangenziale iniziale v_i. Si trascurino le forze di gravità e di galleggiamento e si ipotizzi che le particelle si muovano in regime di Stokes ($C_D = 24/\mathrm{Re}_p$).

1. Calcolare il valore di Ω che consente alle gocce di coprire una distanza orizzontale $x_{p,max} = L$ (pari alla *stopping distance*). Ipotizzare massa della goccia costante. [15%]
2. Calcolare il tempo t^* che le gocce impiegano per arrivare a distanza $x_p(t^*) = L/2$. Ipotizzare massa della goccia costante. [5%]
3. Dal momento in cui le gocce si staccano dal disco, il liquido evapora con tasso di evaporazione $c = k\pi D^2$ (con $D = D(t)$ diametro della particella e k costante espressa in kg/m^2s). Indicato con D_i il diametro iniziale delle gocce, determinare la velocità di queste ultime quando il loro diametro si è ridotto a $0.5D_i$. [20%]

3

Un serbatoio di sezione quadrata e volume $V_s = 10\ m^3$ contiene gas metano ($M = 16\ kg/kmol$, $R = 8134\ J/Kkmol$) a temperatura $T = 25°C$. Il serbatoio è collegato al ramo sinistro di un manometro ad U contenente mercurio ($\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$). Il ramo destro del manometro è aperto e a contatto con aria atmosferica.

1. Determinare la massa di gas metano presente nel serbatoio sapendo che il dislivello di mercurio tra i due rami del manometro è $\Delta h_{Hg} = 30\ cm$. [10%]
2. Determinare il nuovo dislivello di mercurio Δh_{Hg} nel caso in cui venga iniettato all'interno del serbatoio olio viscoso ($\rho_o = 800\ kg/m^3$) per un volume pari a $V_s/2$. [10%]

Continuità $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

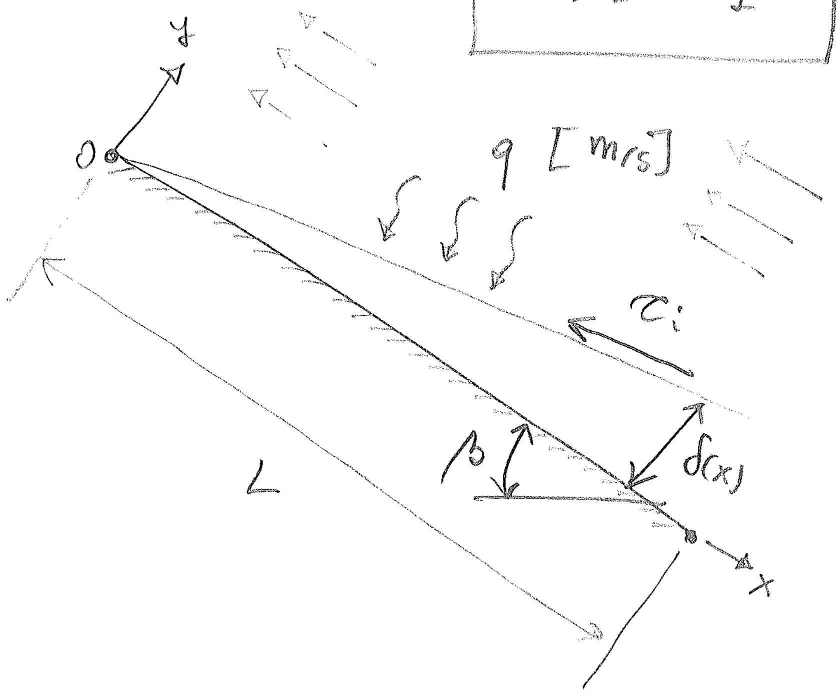
Sforzo di taglio $$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

Navier-Stokes $$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_i}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_i}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}\right)$$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la goccia: $$Re = \frac{\rho_f D_p|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{\mu_f}, \quad \mathbf{F}_D = \frac{1}{2}C_D\rho_f A_p(\mathbf{u} - \mathbf{v})|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$

Legge di Stevino: $$\mathrm{d}p(z) = -\rho g \mathrm{d}z$$

EXE 1



SOLUZIONE PER LASTRA INCLINATA MA VALIDA ANCHE PER PIASTRA VERTICALE ($\beta = 90°$)

1.1) $Re \frac{\delta(x)}{L} \ll 1 \Rightarrow$ Th Lubrificazione

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{con} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \sin\beta \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \qquad [5\%]$$

1.2) $$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + C_1$$

$$\Rightarrow v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

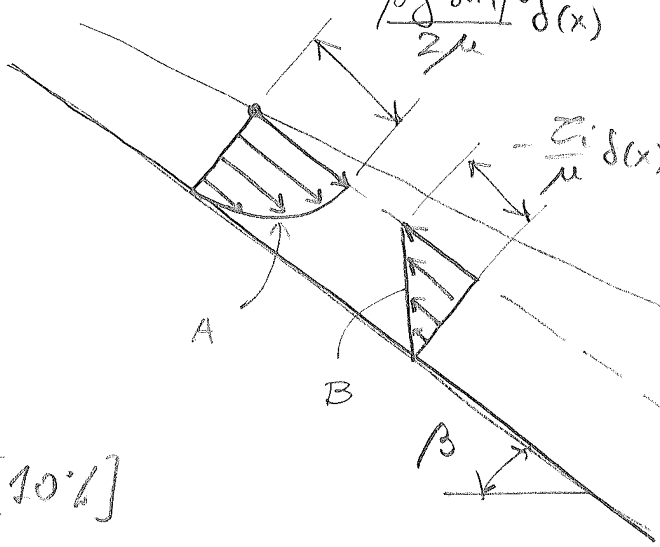
C.C. #1 : $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = -\tau_i \Rightarrow \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = -\tau_i$

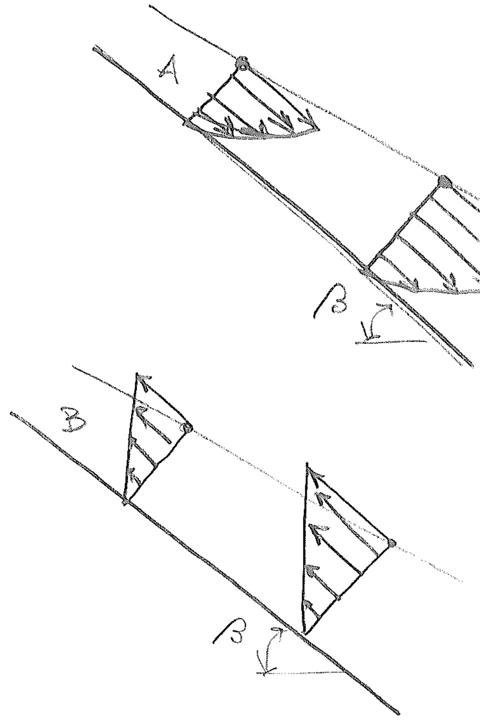
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta(x) + \mu C_1 = -\tau_i \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta(x) - \frac{\tau_i}{\mu}$$

[10%] $$\boxed{v_x(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2\mu}(-\rho g \sin\beta)\left[y^2 - 2\delta(x)\cdot y\right]}_{A} \underbrace{- \frac{\tau_i}{\mu}\cdot y}_{B}}$$

1.3)



[10%]

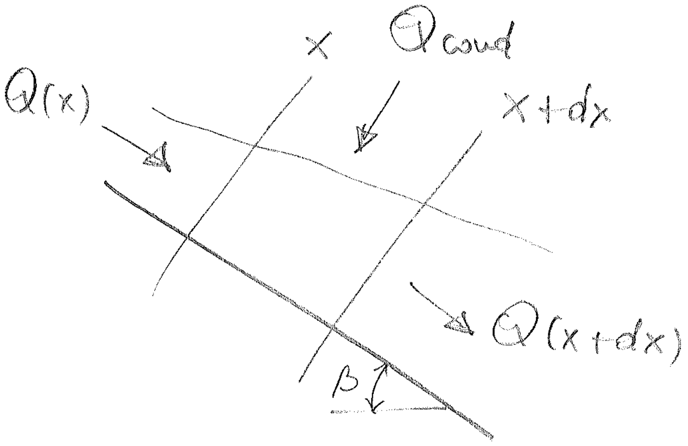


1.4) $$\frac{Q(x)}{W} = \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \sin\beta)\underbrace{\left[\frac{\delta^3_{(x)}}{3} - 2\delta(x)\frac{\delta^2_{(x)}}{2}\right]}_{-\frac{2}{3}\delta^3_{(x)}} - \frac{\tau_i}{\mu}\cdot\frac{\delta(x)^2}{2}$$

$$= \frac{\rho g \sin\beta}{3\mu}\delta^3_{(x)} - \frac{\tau_i}{2\mu}\delta(x)^2$$

[1%] $$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d(Q(x)/W)}{dx}\cdot W = \left[\frac{\rho g \sin\beta}{\mu}\delta^2_{(x)}\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{\tau_i}{\mu}\delta(x)\frac{d\delta(x)}{dx}\right]W$$

Bilancio di massa:



$$Q(x+dx) = Q(x) + Q_{cond}$$

$$\stackrel{!}{=} Q(x) + q \cdot W dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = q \cdot W \quad [II°]$$

Uguagliando [I°] e [II°]:

$$\Big[\underbrace{\frac{\rho g \sin\beta}{\mu}}_{C_1} \delta^2(x) - \underbrace{\frac{\tau_i}{\mu}}_{C_2} \delta(x) \Big] \frac{d\delta(x)}{dx} = q$$

$$\int_{\delta_0 = 0}^{\delta(x)} \left[C_1 \cdot \delta^2(x) - C_2 \cdot \delta(x) \right] d\delta(x) = q \int_0^x dx$$

$$C_1 \frac{\delta^3(x)}{3} - C_2 \frac{\delta^2(x)}{2} = q \cdot x$$

$$\boxed{\frac{\rho g \sin\beta}{3\mu} \delta^3(x) - \frac{\tau_i}{2\mu} \delta^2(x) = q \cdot x}$$ → Da questa eq. si trova $\delta(x)$

Dalla [II°]: $Q(x) = Q_0 + q \cdot W \cdot x \Big|_{Q_0 = 0} = q \cdot W \cdot x$

[15%]

Pertanto: $Q(x = \frac{L}{2}) = Q_f = q \cdot W \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{q = \frac{2 Q_f}{WL}}$

$\boxed{\Gamma = \rho q \frac{L}{2}}$ ↔ $\boxed{\Gamma(x = \frac{L}{2}) = \rho \frac{Q(x = \frac{L}{2})}{W} = \rho \frac{Q_f}{W}}$

FLUIDODINAMICA, AA 2012/2013

Primo Compito - Durata 2 ore - Libri Chiusi

29 Gennaio 2013

1

Un condensatore piano è costituito da una lastra verticale di larghezza W e lunghezza L mantenuta a temperatura costante sulla quale condensa il vapor d'acqua. Il tasso di condensazione del vapore è costante e pari a q [m/s]. Il film di condensazione che si viene a formare sulla lastra ha spessore iniziale nullo ($\delta_0 = \delta(x=0) = 0$) ed è soggetto ad uno sforzo di taglio τ_i generato all'interfaccia da una corrente d'aria ascendente.

1. Semplificare le equazioni di continuità e Navier-Stokes per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate. [5%]
2. Calcolare il profilo di velocità nel film. [10%]
3. Disegnare graficamente (nella maniera più accurata possibile) il profilo di velocità nel film. [10%]
4. Per misurare il tasso di condensazione q si pratica una incisione ad una distanza $x = L/2$ dall'inizio della lastra e si estrae tutta la portata, che risulta pari a Q_f $[m^3/s]$. Si determini l'espressione per il tasso di condensazione q, per la portata specifica Γ $[kg/m \cdot s]$ e per lo spessore del film tutti valutati in corrispondenza dell'incisione. [15%]

2

Un umidificatore è costituito da un atomizzatore a disco (di raggio R) che ruota a velocità angolare, Ω, costante. Sull'atomizzatore viene alimentato il liquido da utilizzare per l'umidificazione. Per effetto centrifugo, dal bordo del disco si staccano orizzontalmente gocce di diametro D_p e velocità tangenziale iniziale v_i. Si trascurino le forze di gravità e di galleggiamento e si ipotizzi che le particelle si muovano in regime di Stokes ($C_D = 24/\mathrm{Re}_p$).

1. Calcolare il valore di Ω che consente alle gocce di coprire una distanza orizzontale $x_{p,max} = L$ (pari alla *stopping distance*). Ipotizzare massa della goccia costante. [15%]
2. Calcolare il tempo t^* che le gocce impiegano per arrivare a distanza $x_p(t^*) = L/2$. Ipotizzare massa della goccia costante. [5%]
3. Dal momento in cui le gocce si staccano dal disco, il liquido evapora con tasso di evaporazione $c = k\pi D^2$ (con $D = D(t)$ diametro della particella e k costante espressa in kg/m^2s). Indicato con D_i il diametro iniziale delle gocce, determinare la velocità di queste ultime quando il loro diametro si è ridotto a $0.5D_i$. [20%]

3

Un serbatoio di sezione quadrata e volume $V_s = 10\ m^3$ contiene gas metano ($M = 16\ kg/kmol$, $R = 8134\ J/K kmol$) a temperatura $T = 25°C$. Il serbatoio è collegato al ramo sinistro di un manometro ad U contenente mercurio ($\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$). Il ramo destro del manometro è aperto e a contatto con aria atmosferica.

1. Determinare la massa di gas metano presente nel serbatoio sapendo che il dislivello di mercurio tra i due rami del manometro è $\Delta h_{Hg} = 30\ cm$. [10%]
2. Determinare il nuovo dislivello di mercurio Δh_{Hg} nel caso in cui venga iniettato all'interno del serbatoio olio viscoso ($\rho_o = 800\ kg/m^3$) per un volume pari a $V_s/2$. [10%]

Continuità $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$ $\qquad$ *Sforzo di taglio* $\quad \tau_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)$

Navier-Stokes $$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_i}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_i}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}\right)$$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la goccia: $\quad Re = \dfrac{\rho_f D_p|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}{\mu_f}, \quad \mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho_f A_p(\mathbf{u}-\mathbf{v})|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$

Legge di Stevino: $\quad \mathrm{d}p(z) = -\rho g \mathrm{d}z$

Cap. 3 e 4

EXE 2

Hp: moto orizzontale
regime di Stokes

2.1) Lungo x : $\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p}$ $\quad (\vec{F}_I = \vec{F}_D$ lungo x)

$$\int_{v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -\frac{1}{\tau_p}\int_0^t dt \rightarrow \boxed{v_{p,x}(t) = v_i \cdot e^{-t/\tau_p}} \quad \boxed{I°}$$

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = v_{p,x}(t) = v_i\, e^{-t/\tau_p}$$

$$\int_{x_p(t=0)=0}^{x_p(t)} dx_p(t) = v_i \int_0^t e^{-t/\tau_p}\, dt$$

$$\boxed{x_p(t) = v_i\,\tau_p\,(1 - e^{-t/\tau_p})} \quad \boxed{II°}$$

$x_{p,max} = L = x_p(t^*)$ con t^* tale che $v_{p,x}(t^*) = 0$

Dalla I° :

$$t^* = +\infty \Rightarrow x_p(t^*) = v_i\tau_p = L \Rightarrow v_i = \frac{L}{\tau_p}$$

Ma $v_i \hat{=} \Omega \cdot R$ e pertanto :

$$\boxed{\Omega = \frac{L}{R\tau_p}} \quad [15\%]$$

2.2) $X_p(t^*) = \frac{L}{2} \Rightarrow \quad v_i \tau_p (1 - e^{-t^*/\tau_p}) = \frac{L}{2}$

$$e^{-t^*/\tau_p} = 1 - \frac{L}{2 v_i \tau_p}$$

$$-t^*/\tau_p = \ln\left(1 - \frac{L}{2 v_i \tau_p}\right)$$

$$\boxed{t^*} = -\tau_p \ln\left(1 - \frac{L}{2 v_i \tau_p}\right)$$

$$= \boxed{\tau_p \ln\left(\frac{2 v_i \tau_p - L}{2 v_i \tau_p}\right)} \quad [5\%]$$

2.3) Tasso di evaporazione : $C = K \pi D^2 \left[\frac{Kg}{s}\right]$

$$\vec{F}_I = \frac{d(m_p \vec{v}_p)}{dt} = m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} + \vec{v}_p \frac{dm_p}{dt}$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho_p \frac{\pi D^3}{6}\right) = \rho_p \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt} \quad ⊛$$

Vale anche :

$$\frac{dm_p}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}}^{\,0} - \dot{m}_{out} = -C = -K\pi D^2 \quad ⊛$$

$$\rho_p \cancel{\frac{\pi}{2}} \cancel{D^2} \frac{dD}{dt} = -K \cancel{\pi D^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = -\frac{2K}{\rho_p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{dt = -\frac{\rho_p}{2K} dD} \quad ⊛$$

Il nuovo bilancio di forze diventa:

$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = -3\pi\mu v_{p,x} D - v_{p,x}\frac{dm_p}{dt}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{18\mu}{\rho_p D^2} v_{p,x} - \frac{K\cancel{\pi}\cancel{D^2}}{\rho_p \frac{\cancel{\pi} D^{\cancel{3}}}{6}} \cdot v_{p,x}$$

$$= \left(-C_1 \cdot D^{-2} - C_2 \cdot D^{-1}\right) v_{p,x}$$

con $C_1 = \frac{18\mu}{\rho_p}$, $C_2 = \frac{6K}{\rho_p}$

$$\frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} \overset{*}{=} \left(-C_1 \cdot D^{-2} - C_2 \cdot D^{-1}\right)\left(-\frac{\rho_p}{2K} dD\right)$$

$$= +C_3 \cdot D^{-2} dD + C_4 \cdot D^{-1} dD$$

con $C_3 = C_1\left(\frac{\rho_p}{2K}\right) = \frac{18\mu}{\cancel{\rho_p}} \cdot \frac{\cancel{\rho_p}}{2K} = \frac{9\mu}{K}$

$C_4 = C_2\left(\frac{\rho_p}{2K}\right) = \frac{6K}{\rho_p} \cdot \frac{\rho_p}{2K} = 3$

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_i}\right] = C_3\left(-D^{-1}\right)\Big|_{D_i}^{D(t)} + C_4 \cdot \ln D\Big|_{D_i}^{D(t)}$$

$$= C_3\left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D(t)}\right) + C_4 \ln\left[\frac{D(t)}{D_i}\right]$$

Se $D(t) = D_i/2$ allora:

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_i}\right] = C_3\underbrace{\left(\frac{1}{D_i}-\frac{2}{D_i}\right)}_{-\frac{1}{D_i}} + C_4\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{C_3}{D_i} + C_4\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$v_{p,x}(t) = v_i \cdot \underbrace{e^{\left[-\frac{C_3}{D_i}+C_4\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]}}_{e^{-\frac{C_3}{D_i}}\cdot \underbrace{e^{C_4\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}_{e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{C_4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}}}$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = \frac{v_i}{8}\cdot e^{-\frac{9\mu}{k\cdot D_i}}} \quad \left[\frac{kg}{ms}\cdot\frac{1}{\frac{kg}{m^2 s}}\cdot\frac{1}{m}\right] ✓$$

EXE 3

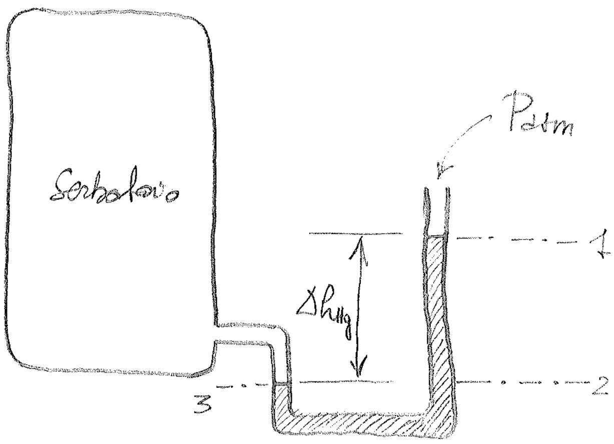
$V_S = 10\ m^3$

$M = 16\ Kg/Kmol$

$R = 8314\ \frac{J}{K\ Kmol}$

$T = 25°C = 298{,}15\ K$

$\rho_{Hg} = 13600\ Kg/m^3$



3.1) $\Delta h_{Hg} = 30\ cm = 0{,}3\ m$

Eq. della statica : $P_3 = P_2 = \underset{P_1 = P_{atm}}{P_1} + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{Hg} = P_{in}$

$$\boxed{P_{in}} = P_{atm} + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{Hg}$$

$$= 101325 + \underbrace{13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3}_{\sim 40025}$$

$$= 141350\ Pa \simeq \boxed{1{,}41 \cdot 10^5\ Pa}$$

Pressione del metano nel serbatoio

Ipotizzando che il metano si comporti come un gas ideale:

$$\frac{P_{in}}{\rho} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \boxed{\rho} = \frac{M\, P_{in}}{RT} = \frac{16 \cdot 1{,}41 \cdot 10^5}{8314 \cdot 298{,}15}$$

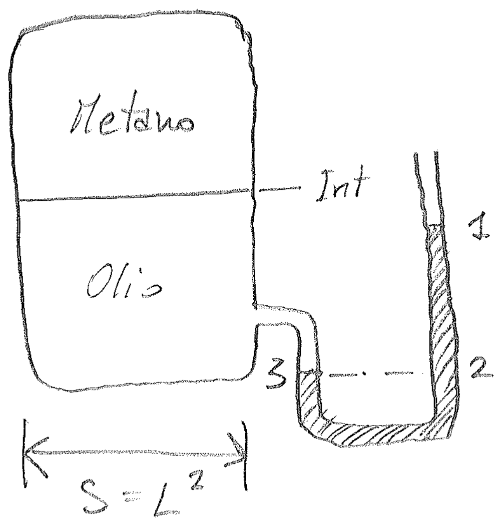
Densità del metano

$$= \boxed{0{,}9124\ Kg/m^3 \simeq 0{,}91\ Kg/m^3}$$

Massa di metano nel serbatoio

$$\boxed{m = \rho \cdot V_s = 0{,}91 \cdot 10 = 9{,}124 \text{ Kg}}$$

3.2) Nella nuova configurazione:



$V_{metano} = 5 \text{ m}^3 \left[= V_s/2 \right]$

Ipotizzando che il metano subisca una compressione isoterma:

$$p \cdot V = \text{cost} \Rightarrow P_{in} \cdot V_s = P_{fin} \cdot V_{metano}$$

$$P_{fin} = P_{in} \cdot \frac{V_s}{V_{metano}} = 2 \cdot P_{in} \cong 2{,}827 \cdot 10^5$$

Dalla statica: $P_{fin} = P_{Int} = P_{atm} + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h^*_{Hg} - \rho_o\, g\, h_o$

con h_o = livello di olio nel serbatoio

$V_o = \frac{V_s}{2} = L^2 \cdot h_o$ con L = lato della sezione del serbatoio

$$\rightarrow h_o = \frac{V_s}{2L^2} = \frac{5}{L^2}$$

$$\Delta h^*_{Hg} = \frac{P_{fin} - P_{atm} + \rho_o g h_o}{\rho_{Hg} \cdot g} = \frac{2{,}827 \cdot 10^5 - 10^5 + 800 \cdot 9{,}81 \cdot h_o}{13600 \cdot 9{,}81}$$

$$\boxed{\Delta h^*_{Hg} = 1,36 + 0,0588 \cdot h_0}$$

Assumendo $\boxed{L = 1\,m} \Rightarrow L^2 = 1\,m^2 \Rightarrow h_0 = 5\,m$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta h^*_{Hg} \cong 1,655\,m}$$

$\boxed{L = 2m} \Rightarrow L^2 = 4\,m^2 \Rightarrow h_0 = 1,25 m$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta h^*_{Hg} \cong 1,433 m}$$

$\boxed{L = \sqrt{5}\,m} \Rightarrow L^2 = 5 m^2 \Rightarrow h_0 = 1\,m$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta h^*_{Hg} \cong 1,42\,m}$$

NB. La nuova pressione del metano nel serbatoio è raddoppiata. Pertanto:

$$\rho^* = \frac{M\,P_{fin}}{RT} = 2\,\rho \cong 1,82\,\frac{Kg}{m^3}$$

e la nuova massa di metano sarà:

$$m^* = \rho^* \cdot \frac{V_S}{2} \cong 9,1\,Kg$$

ovvero la massa si è conservata, come era doveroso attendersi.