

**1**

Nei mari del Nord, caratterizzati da forti escursioni di marea, un barile cilindrico stagno (avente sezione  $S$  [ $m^2$ ] ed altezza  $h$  [ $m$ ]) è utilizzato come boa di segnalazione. In condizioni di equilibrio, il barile (avente massa  $m$  [ $kg$ ]) è immerso per un'altezza pari a  $h_{imm}$  ed è ancorato al fondale marino con una cima (non tesa) lunga  $L$  [ $m$ ].

1. Determinare l'espressione per il calcolo della massa del barile in funzione di  $h_{imm}$ . [5%]
2. Per effetto della marea, il livello dell'acqua si alza ed in alcuni momenti della giornata il barile risulta completamente sommerso con la cima in tensione. Sapendo che il livello del mare varia con la legge:

$$H(t) = H_M + \Delta H \cdot \sin(\omega t),$$

e supponendo noti  $H_M$  [ $m$ ],  $\Delta H$  [ $m$ ],  $\omega = 2\pi/T$  con  $T$  espresso in [ $h$ ], determinare come varia la forza di galleggiamento che agisce sul barile. [15%]

**2**

In un impianto industriale, l'operazione di "lavaggio" di gas viene effettuata spruzzando il gas con spray di soluzioni opportune. Un getto bifase caratterizzato da gocce d'acqua aventi diametro iniziale  $D_i$  e velocità iniziale  $v_i$  viene iniettato orizzontalmente in una camera contenente vapori da lavare. Le gocce si muovono in regime di Stokes.

1. Calcolare come varia la velocità delle gocce nel tempo, nell'ipotesi che abbiano massa  $m_p$  costante. [10%]
2. Parte del vapore condensa sulle gocce con tasso  $c = k\pi D_p^2$  dove  $k$  è il tasso specifico di condensazione, costante ed espresso in [ $kg/m^2s$ ]. Calcolare come varia la velocità delle gocce in questo caso. [20%]
3. Calcolare il valore della velocità delle gocce quando il loro volume è triplicato a causa della condensazione. [10%]

**3**

In un processo industriale per la produzione di film polimerici una portata massica specifica  $\Gamma$  [ $kg/m s$ ] di polimero liquido (densità  $\rho$ , viscosità  $\mu$ ) viene alimentata su un nastro trasportatore (avente lunghezza  $L$  e larghezza  $W$ ) che si muove verso l'alto con velocità  $U = \rho g h^2 \sin\theta / \mu$  dove  $h$  è lo spessore del film e  $\theta$  è l'angolo di inclinazione del nastro rispetto all'orizzontale.

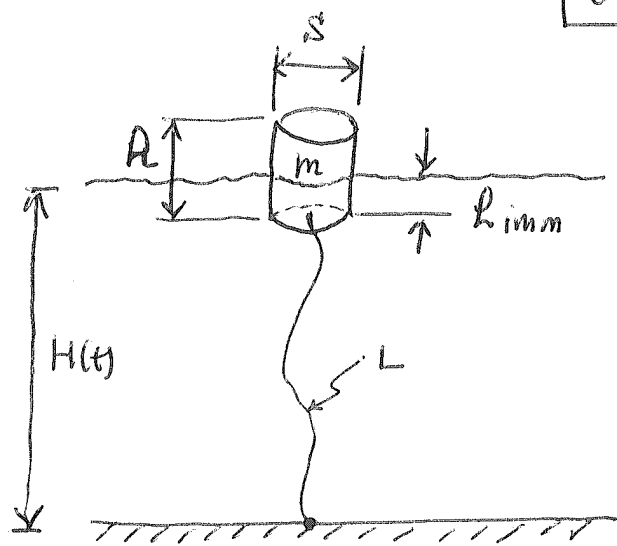
1. Semplificare le equazioni di conservazione (Continuità e Navier-Stokes) per il caso in esame, enunciando chiaramente le ipotesi semplificative adottate. [5%]
2. Ricavare l'espressione del profilo di velocità nel film e disegnarlo graficamente. [15%]
3. Ricavare l'espressione dello spessore  $h$  in funzione della portata  $\Gamma$  e dell'angolo di inclinazione  $\theta$ . [10%]
4. Ricavare l'espressione della potenza (in funzione di  $h$  e  $\theta$  che è necessario fornire per mantenere il nastro in moto con velocità  $U$ , nell'ipotesi di rendimento unitario). [5%]
5. Calcolare il valore numerico della potenza utilizzando i seguenti dati:  $\rho = 600 kg/m^3$ ,  $\mu = 10^{-3} Pa \cdot s$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $g = 10 m/s^2$ ,  $h = 10^{-3} m$ ,  $W = 1 m$ ,  $L = 10 m$ . [5%]

*Legge di Stevino:*  $dp(z) = -\rho g dz$

*Eq. Continuità*  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ , *Eq. Navier-Stokes*  $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$

*Forza di Attrito*  $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} \rho C_D \frac{\pi D_p^2}{4} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p| (\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)$ ,  $C_D = \frac{24}{Re_p}$ ,  $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p| D_p}{\mu}$

EXE 1



• CALCOLO MASSA BARRILE :

$$F_p = F_{fall} \quad (1)$$

$$mg = \rho_f g V_{imm}$$

$$\downarrow \rho_f g S \cdot h_{imm}$$

$$h_{imm} = \frac{m}{\rho_f \cdot S}$$

$$m = \rho_f S h_{imm}$$

[5%]

• CALCOLO DELLA FORZA DI GALLEGGIAMENTO AGENTE SUL BARRILE

□ Se la cima non è in tensione, il bilancio di forze all'equilibrio statico è dato dall'eq. (1).

Quando la cima è in tensione, il bilancio diventa:

$$T + F_p = F_{fall} \rightarrow h_{imm} = \frac{mg + T}{\rho_f g S}$$

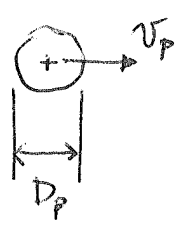
□ La cima è in tensione se  $H(t) \geq L + h$  ed in quel caso  $h = h_{imm}$  ovvero  $F_{fall} = \rho_f g S \cdot h$

□ Se invece si ha  $L + h_{imm} < H(t) < L + h$  (bidone parzialmente sommerso con cima in tensione) risulta:

$$F_{fall} = \rho_f g S [H(t) - L] \quad [15\%]$$

essendo  $h_{imm} = H(t) - L$ .

# EXE 2



$v_p(t=0) = v_i$   
 $D_p(t=0) = D_i$

Flusso orizzontale in regime di Stokes

$\hookrightarrow F_{p,x} = F_{res,x} = 0$

$F_{I,x} = F_{D,x} \Rightarrow m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{2} \rho C_D \frac{\pi D_p^2}{4} |v_{rel,x}| \cdot v_{rel,x}$

con  $v_{rel,x} = v_x - v_{p,x} = -v_{p,x}$

$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \left[ \frac{1}{2} \rho \frac{24}{\rho |v_{rel,x}| D_p} \frac{\pi D_p^2}{4} |v_{rel,x}| v_{rel,x} \right] \frac{1}{\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}}$

$= - \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} v_{p,x} = - \frac{1}{\tau_p} v_{p,x} \Rightarrow \boxed{\frac{dv_{p,x}}{dt} = - \frac{v_{p,x}}{\tau_p}}$

2.1) Caso con  $m_p = \text{cost.}$  :  $\int_{v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = - \frac{1}{\tau_p} \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{v_{p,x}(t) = v_i e^{-t/\tau_p}}$

2.2) Caso con  $m_p \neq \text{cost.}$  :  $\frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{6} \frac{dD_p^3}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{2} D_p^2 \frac{dD_p}{dt}$

$\frac{dm_p}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = C = K \pi D_p^2$

$\rho_p \frac{\pi}{2} D_p^2 \frac{dD_p}{dt} = K \pi D_p^2 \Rightarrow \frac{dD_p}{dt} = \left( \frac{K}{\rho_p} \right)^{-1} \Rightarrow dt = \frac{\rho_p}{2K} dD_p$

$\frac{K \pi D_p^2}{m_p} \cdot v_{p,x} + m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = - \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} v_{p,x}$

$\frac{dv_{p,x}}{dt} = - \left( \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} + \frac{6K}{\rho_p D_p} \right) v_{p,x} \Rightarrow \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = - \left( \dots \right) dt$

$$\int_{v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = - \int_{D_i}^{D_p} \left( \frac{9\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2} + \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p} \right) \frac{\rho_p}{2k} dD_p$$

$$= - \frac{9\mu}{k} \int_{D_i}^{D_p} \frac{1}{D_p^2} dD_p - 3 \int_{D_i}^{D_p} \frac{1}{D_p} dD_p$$

$$\ln \left[ \frac{v_{p,x}(t)}{v_i} \right] = - \frac{9\mu}{k} \left( -\frac{1}{D_p} \right) \Big|_{D_i}^{D_p} - 3 \ln \left[ \frac{D_p(t)}{D_i} \right]$$

$$\underbrace{-\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_i}}$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_i \cdot \exp \left\{ \frac{9\mu}{k} \left( \frac{1}{D_p} - \frac{1}{D_i} \right) + \ln \left[ \frac{D_p(t)}{D_i} \right]^3 \right\}}$$

$$= v_i \cdot \left[ \frac{D_i}{D_p(t)} \right]^3 \cdot \exp \left[ \frac{9\mu}{k} \left( \frac{1}{D_p} - \frac{1}{D_i} \right) \right]$$

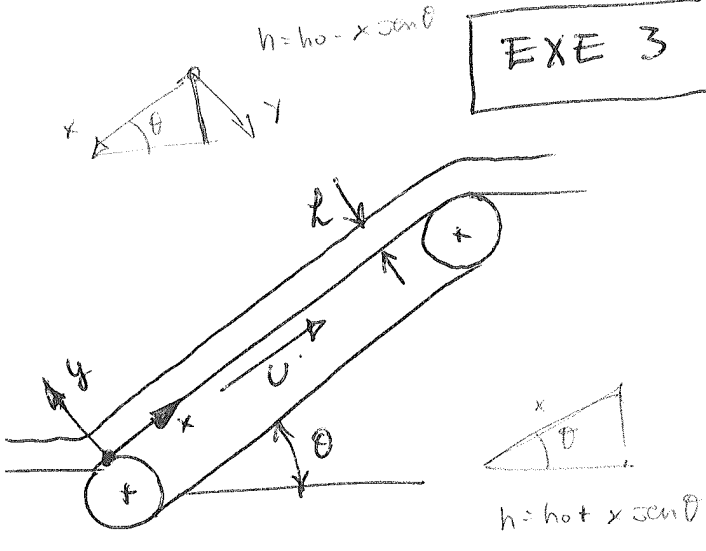
2.3) Se il volume si triplica:  $V_p(t) = 3V_i \Rightarrow D_p(t) = 3D_i$

ovvero  $\left[ \frac{D_i}{D_p(t)} \right]^3 = \frac{1}{3}$  e  $D_p(t) = \sqrt[3]{3} \cdot D_i$

$$v_{p,x}(t) = \frac{1}{3} v_i \cdot \exp \left[ \frac{9\mu}{k D_i} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - 1 \right) \right]$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = \frac{v_i}{3} \cdot \exp \left[ \frac{3\mu}{k D_i} \left( \sqrt[3]{9} - 1 \right) \right]}$$

**EXE 3**



IPOTESI :

- FLUSSO UNIDIR.  $v_x(y) \neq 0$
- FLUSSO 2D  $v_y = v_z = 0$
- FLUSSO STAZ.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

EQ. SEMPLIFICATE :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad [\text{CONT.}]$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad [\text{NS}_x] \quad \text{con} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \sin \theta > 0$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad [\text{NS}_y]$$

[5%]

PROFILO DI VELOCITA':  $v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) y^2 + C_1 y + C_2$

c.c. #1 :  $\tau_{xy}(y=h) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} (\rho g \sin \theta) y \Big|_{y=h} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\mu} (\rho g \sin \theta) h$$

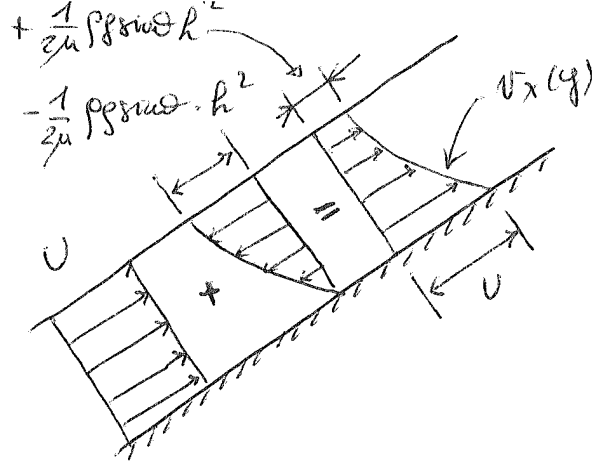
c.c. #2 :  $v_x(y=0) = U \Rightarrow C_2 = U$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) (y^2 - 2h \cdot y) + U$$

[8%]

Poiche'  $U = \frac{\rho g \sin \theta \cdot h^2}{\mu}$  il profilo di velocita' risulta:





[7%]

SPESSORE DEL FILM:

$$\Gamma \triangleq \frac{\rho Q}{W} = \rho \int_0^h v_x(y) dy$$

$$= \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} \int_0^h (y^2 - 2hy) dy + \rho U h$$

$$= -\frac{\rho g h^3 \sin \theta}{3\mu} + \frac{\rho g h^3 \sin \theta}{\mu}$$

$$= \frac{2\rho g h^3 \sin \theta}{3\mu}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\mu\Gamma}{2\rho g \sin \theta}}$$

[10%]

POTENZA:  $Pot = |F_z| \cdot U = |2\tau_w| \cdot LW \cdot U = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot LW \cdot U$

$$= \mu \cdot \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) (2y - 2h) \Big|_{y=0} \cdot LW \cdot U$$

$$= \rho g \sin \theta \cdot LW \cdot \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu}$$

$$[5\%] \quad Pot = \frac{\rho^2 g^2 h^3 \sin^2 \theta}{\mu} LW$$

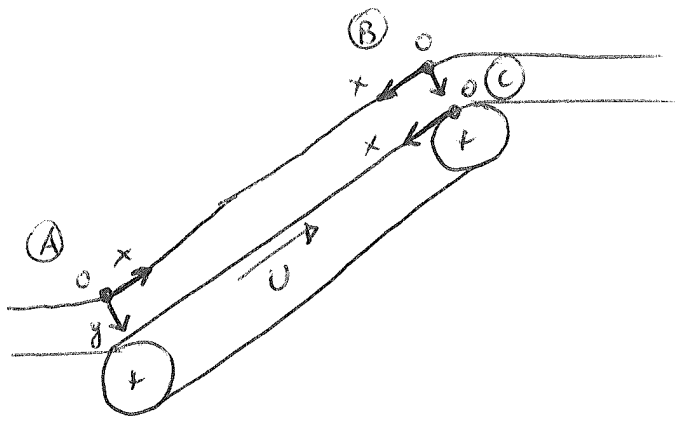
$$\left[ \frac{kg^2}{m^2} \cdot \frac{m^2}{s^4} \cdot m^3 \cdot \frac{m \cdot s}{kg} \cdot m^2 \right] = \left[ \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} \right] = W$$

CALCOLO NUMERICO:

$$Pot = \frac{(6 \cdot 10^2)^2 \cdot 100 (10^{-3}) \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 1}{10^{-3}} = 9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4$$

$\rightarrow 90 W \rightarrow \boxed{Pot = 90W} [5\%]$

N.B. Profilo di velocità per diverse scelte di posizionamento del sistema di riferimento.



Rif. (A) :

$$\tau_{xy}(y=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v_x(y=h) = U \Rightarrow C_2 = U - \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} h^2$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) (y^2 - h^2) + U$$

$$\text{con } \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \theta > 0$$

Rif. (B) :  $\tau_{xy}(y=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$v_x(y=h) = -U \Rightarrow C_2 = -U + \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} h^2$$

$$v_x(y) = -\frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) (y^2 - h^2) - U$$

$$\text{N.B. } \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin \theta < 0$$

Rif. (C) :  $\tau_{xy}(y=h) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\mu} (\rho g \sin \theta) h$

$$v_x(y=0) = -U \Rightarrow C_2 = -U$$

$$v_x(y) = -\frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \theta) (y^2 - 2h \cdot y) - U$$

$$\text{N.B. } \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin \theta < 0$$