Fluidodinamica - AA 2012/2013

Prima prova intermedia - Durata 2 ore - Libri chiusi

23 Novembre 2012

1

Un umidificatore è costituito da un atomizzatore a disco (di raggio R) che ruota a velocità angolare Ω costante. Sull'atomizzatore viene alimentato il liquido da utilizzare per l'umidificazione. Per effetto centrifugo, dal bordo del disco si staccano orizzontalmente gocce aventi diametro D_p e velocità tangenziale iniziale v_i. Si trascurino le forze di gravità e di galleggiamento e si ipotizzi che le gocce si muovano in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$).

1. Calcolare il valore di Ω che consente alle gocce di coprire una distanza orizzontale $x_{p,max} = L$ (pari alla *stopping distance*). Ipotizzare massa della goccia costante. [10%]
2. Dal momento in cui le gocce si staccano dal disco, il liquido evapora con tasso di evaporazione $c = k\pi D_p^2$ (con $D_p = D_p(t)$ diametro della goccia e k costante espressa in kg/m^2s). Indicato con D_i il diametro iniziale delle gocce, determinare la velocità di queste ultime quando il loro diametro si è ridotto a $0.5D_i$. [20%]

2

Un tubo rugoso avente diametro $D = 0.1\ m$ trasporta una portata pari a $0.02\ m^3/s$ di un olio avente densità $1000\ kg/m^3$ e viscosità $\mu = 0.01\ Pa \cdot s$.

1. Calcolare le perdite per attrito per unità di lunghezza del tubo utilizzando la formula di Blasius modificata per tubazioni commerciali $f = 0.04Re^{-0.16}$. [10%]
2. Calcolare le perdite per attrito per unità di lunghezza utilizzando la formula di Colebrook ed assumendo un valore di rugosità pari a $k = 0.05 \cdot 10^{-3}\ m$. [15%]

3

I vapori di un fluido molto viscoso (avente viscosità μ $[Pa \cdot s]$ e densità ρ $[kg/m^3]$) vengono fatti condensare lungo una lastra lunga L $[m]$ e larga W $[m]$, inclinata di α rispetto all'orizzontale. Il tasso di condensazione è pari a q $[kg/m^2s]$. Trascurando gli effetti dei bordi, si chiede di:

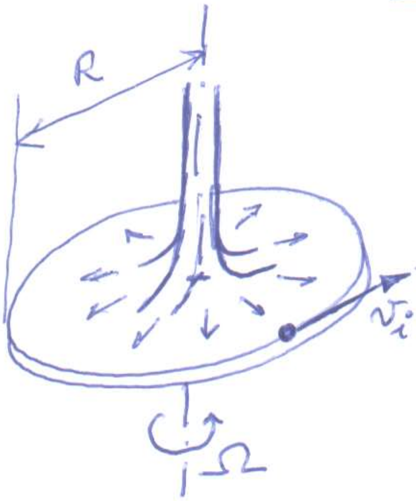
1. semplificare le equazioni di conservazione per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate; [5%]
2. calcolare la portata volumetrica del film di condensazione al bordo inferiore della piastra; [15%]
3. calcolare lo spessore del film di condensazione al bordo inferiore della piastra; [15%]
4. calcolare la forza totale agente sulla piastra. [10%]

Continuità $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \qquad$ *Navier-Stokes* $\quad \rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Eq. di Colebrook $\quad \dfrac{1}{\sqrt{f}} = -1.7\ \ln\left(\dfrac{k}{D} + \dfrac{4.67}{Re\sqrt{f}}\right) + 2.28\ .$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la sfera: $\quad Re_p = \dfrac{\rho D_p|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|}{\mu}\ , \quad \mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D \rho A_p(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$

EXE 1



1.1) $\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p + \vec{F}_{gall}$

Il moto delle gocce avviene in direzione orizzontale. Pertanto:

$$F_{I,x} = F_{D,x} + \cancel{F_{p,x}}^{0} + \cancel{F_{gall,x}}^{0} \Rightarrow \frac{d(m_p v_{p,x})}{dt} = -3\pi\mu v_{p,x} D_p$$

avendo ipotizzato fluido fermo ($\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = 0$).

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} v_{p,x} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p} \quad \text{con} \quad \tau_p \doteq \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$$

$$\int_{v_{p,x}(t=0)=v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -\frac{1}{\tau_p}\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{v_{p,x}(t) = v_i \cdot e^{-t/\tau_p}}$$

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = v_{p,x}(t) \Rightarrow \int_{x_p(t=0)=x_0}^{x_p(t)} dx_p(t) = \int_0^t v_{p,x}(t)\, dt$$

$$x_p(t) - \cancel{x_0}^{=0} = -\tau_p \cdot e^{-t/\tau_p}\Big|_0^t \cdot v_i \Rightarrow \boxed{x_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})}$$

Calcolo stopping distance: $v_{p,x} = 0$ se $t \to \infty$

$$x_p^{max} = x_p(t \to \infty) = v_i \tau_p \equiv L \quad \text{con} \quad v_i = \Omega \cdot R$$

Pertanto: $\Omega R \cdot \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} = L$

$$\boxed{\Omega = \frac{18\mu L}{\rho_p D_p^2 R}}$$

[10%]

1.2) Massa delle gocce variabile con tasso di evaporazione $C = K\pi D_p^2$

Il nuovo bilancio di forze diventa:

$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x}\frac{dm_p}{dt} = -3\pi\mu v_{p,x} D_p \quad \boxtimes$$

con: $$\frac{dm_p}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}\right) = \frac{\rho_p \pi D_p^2}{2}\frac{dD_p}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \cancelto{0}{\dot{m}_{p,in}} - \dot{m}_{p,out} = -C = -K\pi D_p^2 \qquad (2)$$

Dalle eq. (1) e (2): $\rho_p \frac{\cancel{\pi D_p^2}}{2}\frac{dD_p}{dt} = -K\cancel{\pi D_p^2}$

$$\frac{dD_p}{dt} = -\frac{2k}{\rho_p} \Rightarrow \int_{D_i}^{D_p(t)} dD_p = -\frac{2k}{\rho_p}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{D_p(t) = D_i - \frac{2k}{\rho_p}\cdot t} \quad \text{ma anche: } dt = -\frac{\rho_p}{2k}dD_p \; (*)$$

L'eq. $\boxed{\times}$ diventa:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{m_p}\left(-3\pi\mu\, v_{p,x} D_p - v_{p,x}\frac{dm_p}{dt}\right)$$

$$= -\left(\frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} - \frac{K\pi D_p^2}{\rho_p \frac{\pi}{6} D_p^3}\right) v_{p,x}$$

$$= -\left(\frac{K_1}{D_p^2} - \frac{K_2}{D_p}\right) v_{p,x} \quad \text{con} \quad K_1 = \frac{18\mu}{\rho_p}$$

$$K_2 = \frac{6K}{\rho_p}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -\left(\frac{K_1}{D_p^2} - \frac{K_2}{D_p}\right) dt = -\left(\frac{K_1}{D_p^2} - \frac{K_2}{D_p}\right)\left(-\frac{\rho_p}{2K}\right) dD_p$$

$$= +\left(\frac{C_1}{D_p^2} - \frac{C_2}{D_p}\right) dD_p \quad \text{con} \quad C_1 = \frac{9\mu}{K}$$

$$C_2 = 3$$

$$\int_{v_i}^{v_p(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \int_{D_i}^{D_p(t)} \left(\frac{C_1}{D_p^2} - \frac{C_2}{D_p}\right) dD_p$$

$$\ln\left[\frac{v_p(t)}{v_i}\right] = C_1\left(-D_p^{-1}\Big|_{D_i}^{D_p(t)}\right) - C_2 \cdot \ln D_p\Big|_{D_i}^{D_p(t)}$$

$$= C_1\underbrace{\left(-\frac{1}{D_p(t)} + \frac{1}{D_i}\right)}_{\frac{-D_i + D_p(t)}{D_i \cdot D_p(t)}} - C_2 \ln\left[\frac{D_p(t)}{D_i}\right]$$

$$v_p(t) = v_i \cdot \exp\left\{ \underbrace{\frac{c_1\left(-\frac{2K}{\rho_p}\cdot t\right)}{D_i \cdot D_p(t)}} - c_2 \ln\left[\frac{D_p(t)}{D_i}\right] \right\}$$

$$\frac{1}{D_i \cdot D_p(t)}\left[\frac{9\mu}{\cancel{K}}\left(-\frac{2\cancel{K}}{\rho_p}\cdot t\right)\right] = \left(-\frac{18\mu}{\rho_p}\cdot t\right)\cdot \frac{1}{D_i \cdot D_p(t)} \quad \alpha$$

$$= v_i \cdot \exp\left\{-\alpha\frac{18\mu}{\rho_p}\cdot t + \cancel{3} \ln\left[\frac{D_i}{D_p(t)}\right]^3\right\}$$

$$= v_i \left[\frac{D_i}{D_p(t)}\right]^3 \cdot \exp\left(-\alpha\frac{18\mu}{\rho_p}\cdot t\right)$$

Mi interessa il valore di $v_p(t)$ quando $D_p(t) = \frac{D_i}{2}$

Pertanto: $D_p(t) = D_i/2$ se $\boxed{t = \frac{1}{4}\frac{\rho_p}{K} D_i}$

$$v_p(t) = v_i \left(\frac{\cancel{D_i}}{\cancel{D_i}/2}\right)^3 \cdot \exp\left(-\frac{\cancel{18}^{\,9}\mu}{\cancel{\rho_p}}\cdot \frac{1}{\cancel{4}_2}\frac{\cancel{\rho_p}}{K}\cancel{D_i}\cdot\frac{2}{D_i^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= 8 v_i \exp\left(-\frac{9\mu}{D_i \cdot K}\right) \quad \left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}\cdot s}\cdot\frac{}{\frac{\cancel{kg}}{m^2\cdot s}}\cdot\frac{1}{\cancel{m}}\right] ✓$$

Con $\alpha = \left[D_i \cdot D_p(t)\right]^{-1} = \left[D_i \cdot \frac{D_i}{2}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2}D_i^2\right]^{-1} = \frac{2}{D_i^2}$

$$\boxed{v_p(t) = 8 v_i e^{-\left(\frac{9\mu}{K D_i}\right)}} \quad [20\%]$$

EXE 2

$D = 0.1\ m$

$Q = 0.02\ m^3/s$

$$\left.\begin{matrix} D = 0.1\ m \\ Q = 0.02\ m^3/s \end{matrix}\right\} v = \frac{4Q}{\pi D^2} \cong 2.55\ m/s$$

$\rho = 10^3\ kg/m^3$

$\mu = 0.01\ Pa \cdot s$

$$\Downarrow$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 2{,}55 \cdot 0{,}1}{0.01} \cong 25500 \gg 4000$$

(Flusso turbolento!)

2.1) Calcolo di $\frac{|\Delta p|}{L}$ per tubo rugoso tramite eq. Blasius modificata:

$$f = 0.04\, Re^{-0.16} \cong 7{,}88 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{|\Delta p|}{L} = 2 \rho v^2 \frac{1}{D} \cdot f = 2 \cdot \cancel{10^3} (2{,}55^2) \frac{1}{0{,}1}\ 7.85 \cancel{10^{-3}}$$

$$\cong 1023{,}4\ \frac{Pa}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{|\Delta p|}{L} \cong 1023\ \frac{Pa}{m}}\quad [10\%]$$

2.2) Calcolo di $\frac{|\Delta p|}{L}$ per tubo rugoso tramite eq. Colebrook:

Valore di I° tentativo: $f' = 7{,}88 \cdot 10^{-3}$

Eseguo ora il calcolo iterativo:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{f}}}_{LHS(f)} = \underbrace{-1,7 \ln\left(\frac{K}{D} + \frac{4,67}{Re\sqrt{f}}\right) + 2,28}_{RHS(f)}$$

I° iterazione: $RHS(f = f') = 12.42$

$$LHS(f'') = \frac{1}{\sqrt{f''}} = 12.42$$

$$\hookrightarrow f'' = \frac{1}{(12,42)^2} \cong 6.48 \cdot 10^{-3}$$

Differenza %: $\Delta\% = \frac{|f' - f''|}{f'} \cdot 100 \cong 17,9\%$

(troppo elevata: itero di nuovo!)

II° iterazione: $RHS(f = f'') = 12.29$

$$LHS(f''') = \frac{1}{\sqrt{f'''}} = 12.29$$

$$\hookrightarrow f''' \cong 6,62 \cdot 10^{-3}$$

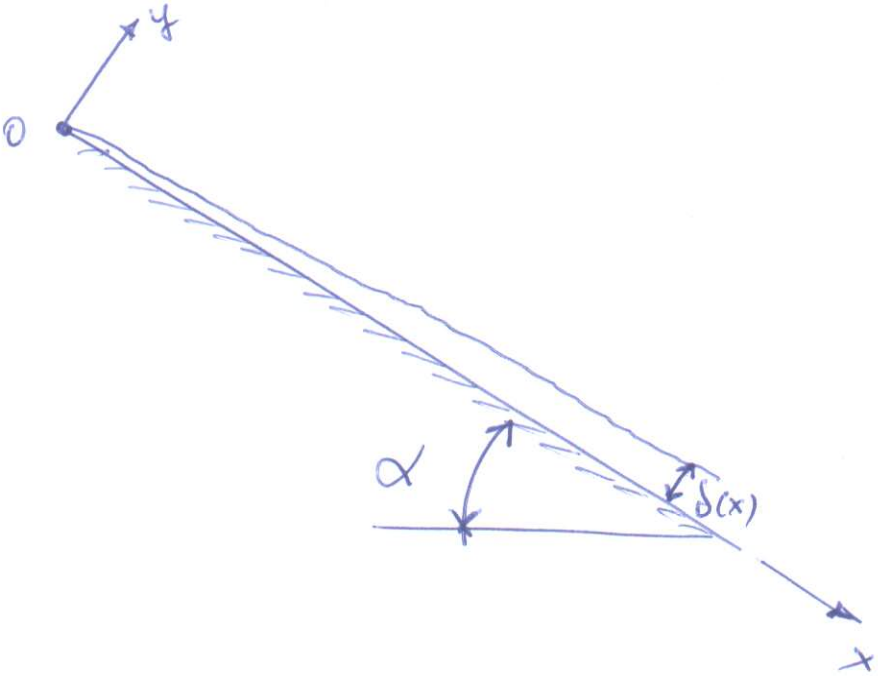
$$\Delta\% = \frac{|f'' - f'''|}{f'''} \cdot 100 \cong 2,2\%$$

(ancora elevato: itero nuovamente)

III° iterazione: $RHS(f = f''') = 12.3 \cong RHS(f = f'')$ ok!

Assumo: $f = 6.6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\frac{|\Delta p|}{L} \cong 857\ Pa/m}$ [20%]

EXE 3



Fluido : ρ, μ

Piano : $L \times W$

Condensazione : $q \left[\frac{kg}{m^2 s} \right]$

3.1) Eq. di conservazione semplificate:

Poiché il fluido è molto viscoso (ovvero Re basso) e $\delta(x)/L \ll 1$ posso assumere:

$$Re \frac{\delta(x)}{L} \ll 1 \Rightarrow \underline{\text{TEORIA DELLA LUBRIFICAZIONE}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Hp: \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \cdot}{\partial z} &= 0 \\ v_z &= 0 \end{aligned}}$$

CONT. $\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS$_x$ $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS$_y$ $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

Con $\frac{\partial P}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{\,0} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha < 0$

3.2) Calcolo della portata volumetrica

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y + C_1$$

$$\longrightarrow v_x(x, y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

$$\text{C.C. \#1} : \quad v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\text{C.C. \#2} : \quad \tau_{xy}(x, y=\delta) = 0 \Rightarrow \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$$

$$\mu\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \cdot \delta + C_1\right] = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \cdot \delta}$$

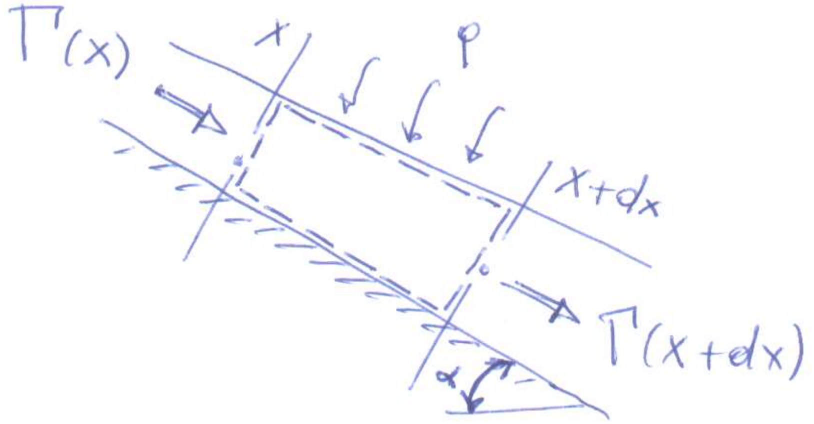
$$\boxed{v_x(x, y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - 2\delta y)}$$

$$\frac{Q}{W}(x) = \int_0^\delta v_x(x, y)\, dy = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\underbrace{\int_0^\delta (y^2 - 2\delta y)\, dy}_{\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^\delta - \left.2\delta \frac{y^2}{2}\right|_0^\delta = \frac{\delta^3}{3} - \delta^3 = -\frac{2}{3}\delta^3}$$

$$= \frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^3 \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\Gamma(x) = \rho \frac{Q(x)}{W} = \frac{\rho}{3\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^3 \quad \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right] \quad (1)$$

La portata specifica è ottenibile anche dal seguente bilancio dei flussi di massa:



$$\Gamma_{in} = \Gamma_{out} \Longrightarrow \Gamma(x) + q \cdot dx = \Gamma(x+dx)$$

$$\frac{\Gamma(x+dx) - \Gamma(x)}{dx} = \frac{d\Gamma(x)}{dx} = +q \quad \text{nel lim. } dx \to 0$$

$$\int_{\Gamma_0}^{\Gamma(x)} d\Gamma(x) = q \cdot \int_0^x dx \longrightarrow \Gamma(x) = \cancelto{0}{\Gamma_0} + q \cdot x \quad (2)$$

Dalle eq. (1) e (2): $\boxed{\delta(x) = \left[\frac{3 \mu q \cdot x}{\rho \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right)} \right]^{1/3}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q}{W}(x) = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{3 \mu q \cdot x}{\rho \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right)} = \frac{q \cdot x}{\rho}} \quad \left[\frac{kg}{m^2 s} \cdot \frac{m^3}{kg} \, m \right]$$

Al bordo inferiore della lastra ($x = L$):

$\boxed{\frac{Q(x=L)}{W} = \frac{q \cdot L}{\rho}}$ [15%] e $\boxed{\delta(x=L) = \left[\frac{3 \mu q L}{\rho \left(-\partial P / \partial x \right)} \right]^{1/3}}$ [15%]

3.4) Forza totale agente sulla lastra (= prodotta per attrito)

$$F_\tau = \int_A |\tau_w| \cdot dA \quad \text{con } \tau_w = \tau_{xy}\big|_{y=0}$$

$$= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \overset{\text{trasc.}}{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}}}\right)\Bigg|_{y=0}$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(y^2 - 2\delta y\right)\right]\Bigg|_{y=0} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y - \delta)\Big|_{y=0}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\cdot \delta(x) \Longrightarrow \text{Quindi anche } \tau_w = \tau_w(x)\,!$$

$$F_\tau = \int_A \left|\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right| \cdot \delta(x)\, dA = \int_0^W\!\!\int_0^L \left|\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right| \cdot \left[\frac{3\mu q \cdot x}{\rho\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)}\right]^{1/3} dx\, dz$$

$$= W \cdot \left[\frac{3\mu q \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{\rho}\right]^{1/3} \underbrace{\int_0^L x^{1/3}\, dx}$$

$$\frac{3}{4}\cdot x^{4/3}\Big|_0^L = \frac{3}{4} L^{4/3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{F_\tau}{W} = \frac{3}{4}\left[3\nu q \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 L^4\right]^{1/3}} \quad [10\%]$$