

## PRIMA PROVA (28/10/2005)

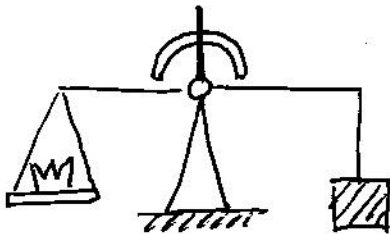
## SOLUZIONE ESERCIZI

EXE 1

$$\rho_{Au} = 19300 \text{ kg/m}^3$$

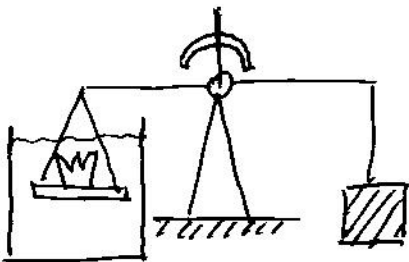
$$\rho_{Ag} = 10500 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$



Pesata in aria :  $m_c = 1 \text{ kg} \Rightarrow F_p = m_c g = 10 \text{ N}$

(Peso rilevato  
dalla bilancia)



Pesata in acqua :  $m = 0,937 \text{ kg} \Rightarrow F_p' = m g = 9,37 \text{ N}$

(Peso rilevato  
dalla bilancia)

N.B. Per semplicità si è assunto  $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m/s}^2$ .

In condizioni di equilibrio statico, il bilancio di forze agenti sulla corona è:

$$0 = \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{pall}} \quad (1)$$

con  $\vec{F}_{\text{pall}}$  trascurabile quando la corona viene pesata in aria.

Per le due pesate, il bilancio (1) diventa, in forma 2  
scalare:

$$\begin{cases} 0 = (\rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag}) g - F_p & \text{in aria} \\ 0 = (\rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag}) g - \rho (V_{Au} + V_{Ag}) g - F_p' & \text{in acqua} \end{cases}$$

con:  $V_{Au} + V_{Ag} =$  volume totale delle corone

$\rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag} =$  massa totale delle corone

Si ha:

$$\begin{cases} 0 = \rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag} - m_c & (2) \\ 0 = \rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag} - \rho (V_{Au} + V_{Ag}) - m & (3) \end{cases}$$

Dalla (2) si ricava subito  $V_{Au} = f(V_{Ag})$ :

$$\boxed{V_{Au} = \frac{m_c - \rho_{Ag} V_{Ag}}{\rho_{Au}}} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) si trova:

$$\boxed{V_{Ag} = \frac{m_c (\rho_{Au} - \rho) - m \rho_{Au}}{\rho (\rho_{Au} - \rho_{Ag})} = 2,453 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3}$$

quindi:  $m_{Ag} = \rho_{Ag} V_{Ag} = 0,253 \text{ kg}$

→

$$V_{Au} = \frac{m_c}{\rho_{Au}} - \frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Au}} V_{Ag} \approx 5,18 \cdot 10^{-5} - 0,544 V_{Ag} = 3,846 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad \underline{\underline{3}}$$

$$m_{Au} = \rho_{Au} V_{Au} = 0,742 \text{ kg}$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA: 
$$V_{Au} = \frac{m_c - m}{\rho} - V_{Ag}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$6,3 \cdot 10^{-5} - V_{Ag} \quad (5)$$

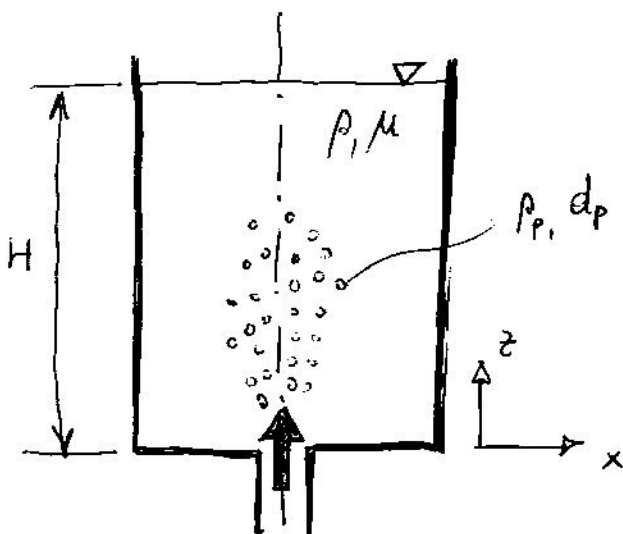
Sostituendo la (5) nella (2), ad es.:

$$0 = \rho_{Au} (6,3 \cdot 10^{-5} - V_{Ag}) + \rho_{Ag} V_{Ag} - m_c$$

$$V_{Ag} = \frac{\rho_{Au} \cdot 6,3 \cdot 10^{-5} - m_c}{\rho_{Au} - \rho_{Ag}} = 2,453 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$V_{Au} = 6,3 \cdot 10^{-5} - 2,453 \cdot 10^{-5} = 3,846 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

## EXE 2



$T$  = tempo di contatto

$\rho_l, \mu$  resparte liquido

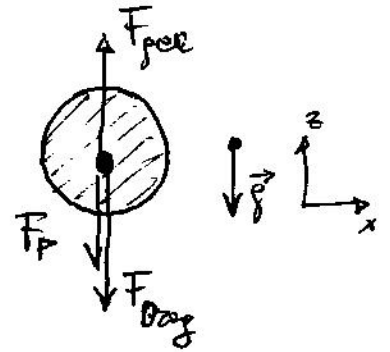
$\rho_p, dp$  resparte passato

In questo caso:  $\rho_p < \rho$  !!

Bilancio di forze agenti sulle bolle di gas quando queste si muovono con velocità pari a quella terminale:

14

$$\vec{F}_T = \vec{F}_D + \vec{F}_P + \vec{F}_{gelle} \quad (1)$$



$$\vec{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho \frac{\bar{u} d_p^2}{4} (\vec{u} - \vec{v}) |\vec{u} - \vec{v}|$$

$$\downarrow$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} = \frac{24 \mu}{\rho |\vec{u} - \vec{v}| d_p} \quad \text{REGIME DI STOKES}$$

$\downarrow$

$$\vec{F}_D = 3\pi \mu d_p (\vec{u} - \vec{v})$$

Poiché il reagente liquido è supposto fermo ( $\vec{u} = \vec{0}$ ):

$$\vec{F}_D = -3\pi \mu d_p \vec{v}$$

$$\vec{F}_P = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \vec{g}$$

$$\vec{F}_{gelle} = \rho \frac{\pi d_p^3}{6} \vec{g}$$

L'eq. vettoriale (1) ha un'unica componente scalare in direzione  $z$ :

$$-3\pi \mu d_p v - \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} g + \rho \frac{\pi d_p^3}{6} g = 0$$

con  $v = v_{terminale}$ !

Quindi :

$$v = - \frac{(\rho_p - \rho) d_p^2}{18\mu} g \quad (2)$$

Ora :  $\rho_p < \rho \Rightarrow \rho_p - \rho < 0 \Rightarrow v_{term} > 0$

La velocità terminale è pertanto diretta verso l'alt.

Bilancio di forze agenti sulle bolle in regime transitorio :

$$\vec{F}_r = \vec{F}_d + \vec{F}_p + \vec{F}_{goll}$$

$$m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\pi\mu d_p \vec{v} + \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \vec{g} - \rho \frac{\pi d_p^3}{6} \vec{g}$$

Anche in questo caso, l'eq. vettoriale ha un'unica componente scalare in direzione z :

$$\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{dv}{dt} = -3\pi\mu d_p v + (\rho - \rho_p) \frac{\pi d_p^3}{6} g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau_p} + \hat{\beta} g \quad (3) \quad \text{con} \quad \tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}, \quad \hat{\beta} = \frac{\rho - \rho_p}{\rho_p} > 0$$

NOTA : se  $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \hat{\beta} g \tau_p = \frac{\rho - \rho_p}{\rho_p} \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu} g$   
 $= -\frac{(\rho_p - \rho)}{18\mu} d_p^2 g$  vedi (2)

Soluzione generale della (3) è :

$v(t=0) = 0 \Rightarrow v(t) = \hat{\beta} g \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$  (4)

Integrando nel tempo :

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \hat{\rho} g z_p (1 - e^{-t/\tau_p}) dt = \\
 &= \hat{\rho} g z_p \left( t \Big|_0^t + \tau_p e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t \right) = \\
 &= \hat{\rho} g z_p \left[ t + \tau_p (e^{-t/\tau_p} - 1) \right]
 \end{aligned}$$

$$z(t) = \hat{\rho} g z_p \left[ t - \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \right] \quad (5)$$

Il zergente passato deve coprire una distanza  $z(t) = H$  in un tempo minimo  $t = T$ :

$$H = \hat{\rho} g z_p \left[ T - \tau_p (1 - e^{-T/\tau_p}) \right]$$

Poiché  $T > \tau_p$  si può assumere  $e^{-T/\tau_p} \ll 1$  \* ovvero  $1 - e^{-T/\tau_p} \approx 1$ . Quindi:

\* N.B.: ma non  $T \gg \tau_p$ !

$$\begin{aligned}
 H &= \hat{\rho} g z_p (T - \tau_p) \\
 &= \hat{\rho} g z_p T - \hat{\rho} g z_p^2
 \end{aligned}$$

Esprimendolo in funzione di  $\tau_p$  (che contiene il termine incognito  $d_p$ ):

$$\tau_p^2 - \tau_p T + \frac{H}{\hat{\rho} g} = 0 \quad (6)$$

Poiché  $\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}$ , la (6) si può riscrivere come:

$$d_p^4 - \frac{18\mu T}{\rho_p} d_p^2 + \left( \frac{18\mu}{\rho_p} \right)^2 \frac{H}{\hat{\rho} g} = 0$$

$$d_p^4 - B d_p^2 + C = 0$$

con  $B = \frac{18\mu T}{\rho_p} > 0$

$$C = \left(\frac{18\mu}{\rho_p}\right)^2 \frac{H}{\rho_g} > 0$$

(e  $A=1$ )

$$d_{p_{1,2}}^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{\frac{18\mu T}{\rho_p} \pm \sqrt{\left(\frac{18\mu}{\rho_p}\right)^2 T^2 - 4\left(\frac{18\mu}{\rho_p}\right)^2 \frac{H}{\rho_g}}}{2}$$

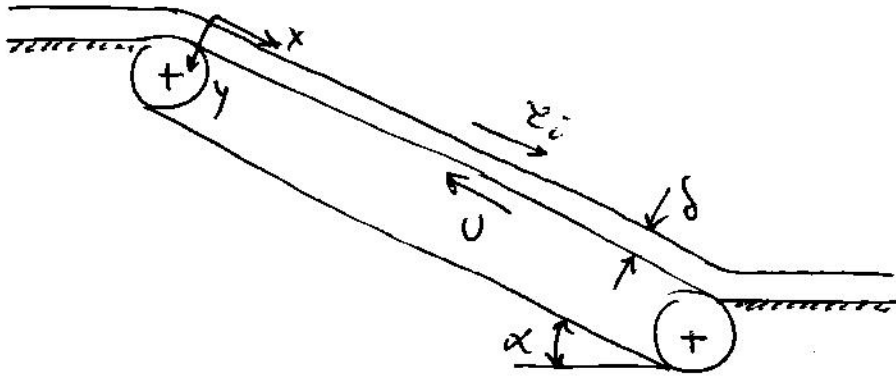
$$= \frac{18\mu T}{2\rho_p} \pm \frac{18\mu T}{2\rho_p} \sqrt{1 - \frac{4H}{\rho_g}}$$

$$= \frac{9\mu T}{\rho_p} \left( 1 \pm \underbrace{\sqrt{1 - \frac{4H}{\rho_g}}}_{\substack{> 0 \\ < 1}} \right) \quad (7)$$

I valori accettabili per  $d_p$  risultano essere:

$$d_p = \sqrt{\frac{9\mu T}{\rho_p} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4H}{\rho_g}} \right)}$$

Espressione per il valore del diametro delle bolle che garantisce un tempo min. di contatto per  $\rho$  e  $T$  col reagente liquido



Dimensioni nostro:  $W, L$

Inclinazione:  $\alpha$

Fluido viscoso:  $\rho, \mu$

IPOTESI :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  FLUSSO STAZIONARIO

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$  FLUSSO 2D

$v_x = v_x(y) \neq 0$ ,  $v_y = v_z = 0$  FLUSSO UNIDIREZIONALE

$\rho = \text{cost.}$  FLUIDO INCOMPRESSIBILE

CONTINUITA' :  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$  FLUSSO COMPLETAMENTE SVILUPPATO

NS<sub>x</sub> :  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$  con  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \sin \alpha$

NS<sub>y</sub> :  $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$  con  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha$

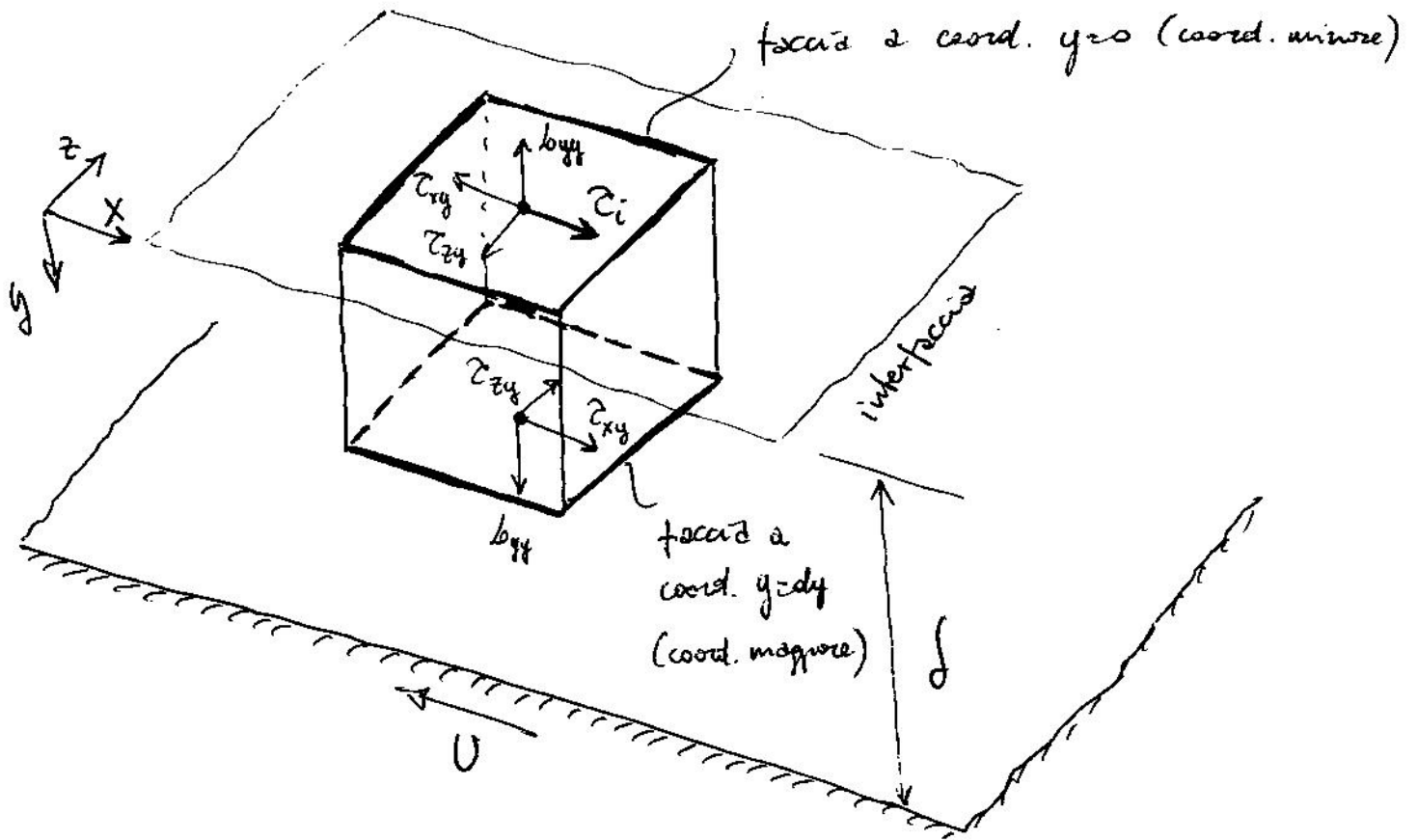
Integrando la NS<sub>x</sub> :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g \sin \alpha) y^2 + C_1 y + C_2$$

c.c. #1 :  $\tau_{xy}(y=0) = -\tau_i \Rightarrow C_1 = -\frac{\tau_i}{\mu}$

c.c. #2 :  $v_x(y=d) = -U \Rightarrow C_2 = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} d^2 + \frac{\tau_i}{\mu} d - U$

NOTA SULLA C.C. #1 :  $\tau_i$  e<sup>-</sup> da considerare col segno ↳ meno per la convenzione sui segni del taglio. Infatti,  $\tau_i$  spicca sulla faccia di un ipotetico volumetto di controllo di fluido che si trova a coordinate  $m_i$  note :



Il profilo di velocità e<sup>-</sup> :

$$v_x(y) = \underbrace{\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (\delta^2 - y^2)}_{>0} + \underbrace{\frac{\tau_i}{\mu} (\delta - y)}_{>0} - \underbrace{U}_{<0}$$

Ponendo l'origine del rif. sul piano invece che sull'interfaccia :

$$\tau_{xy}|_{y=\delta} = \tau_i$$

$$v_x(y=0) = -U$$

$$\Rightarrow v_x(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (2\delta y - y^2) + \frac{\tau_i}{\mu} y - U$$

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{\delta} v_x(y) dy = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \delta^3 + \frac{\tau_i}{2\mu} \delta^2 - U \delta$$

10

$$\boxed{\delta^3 + \underbrace{\frac{3\tau_i}{2\rho g \sin \alpha}}_A \delta^2 - \underbrace{\frac{3\mu U}{\rho g \sin \alpha}}_B \delta - \underbrace{\frac{3\mu Q}{W \rho g \sin \alpha}}_C = 0} \quad \delta = f(Q)$$

$\delta^3 + A\delta^2 - B\delta - C = 0 \rightarrow$  per tentativi si ricava  $\delta$ !

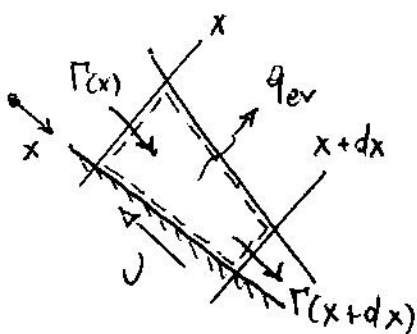
Suriscaldando, infine, il nostro  $e^-$  possibile far evaporare il film. In questo caso, lo spessore del film è variabile lungo  $x$ :  $\delta = \delta(x)$ .

Applicando le ipotesi della teoria della lubrificazione (valide in questo caso poiché  $\delta(x) \ll L$ ) si ha:

$$v_x(x, y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (\delta(x)^2 - y^2) + \frac{\tau_i}{\mu} (\delta(x) - y) - U$$

$$\frac{Q(x)}{W} = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \delta^3(x) + \frac{\tau_i}{2\mu} \delta^2(x) - U \delta(x) \quad (1)$$

Dal bilancio di massa su un volumetto di controllo:



$$\Gamma(x) = \Gamma(x+dx) + \rho q_{ev} dx \rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = -\rho q_{ev}$$

Integrando:  $\Gamma(x) = \Gamma_0 - \rho q_{ev} \cdot x$

A fine nostro ( $x=L$ ):  $\Gamma(L) = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma_0 = \rho q_{ev} L}$

Dal bilancio di massa:

$$\Gamma_0 = \rho q_{ev} L \quad (2)$$

Dalla (1):

$$\Gamma_0 = \rho \frac{Q_0}{W} = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \delta_0^3 + \frac{\tau_i}{\mu} \rho \delta_0^2 - \rho U \delta_0 \quad (3)$$

Eliminando  $\Gamma_0$  dalla (2) e dalla (3):

$$\frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \delta_0^3 + \frac{\tau_i}{\mu} \rho \delta_0^2 - U \delta_0 = q_{ev} \cdot L$$

$$U = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} \delta_0^2 + \frac{\tau_i}{\mu} \delta_0 - \frac{q_{ev} \cdot L}{\delta_0}$$

Poiché  $\delta_0$  è noto, l'espressione ricavata lega  $U$  al tasso di evaporazione  $q_{ev}$ .