FLUIDODINAMICA, AA 2013-2014

III Appello - Seconda prova - Durata 2 ore - Libri Aperti

21 settembre 2014

1

Si consideri il circuito in Figura con tubi lisci, utilizzato per il trasporto di acqua ($\rho = 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$). La pressione in A sia $P_A = 0.5\ MPa$ e in B ci sia pressione atmosferica. I diametri delle linee A1 e 2B siano pari a $D_1 = 0.1\ m$.

1. Si determini il valore della portata in uscita al punto B nel caso di pompa spenta. [15%]
2. Si determini la potenza della pompa P affiché la portata in B sia doppia di quella calcolata al punto precedente. [25%]

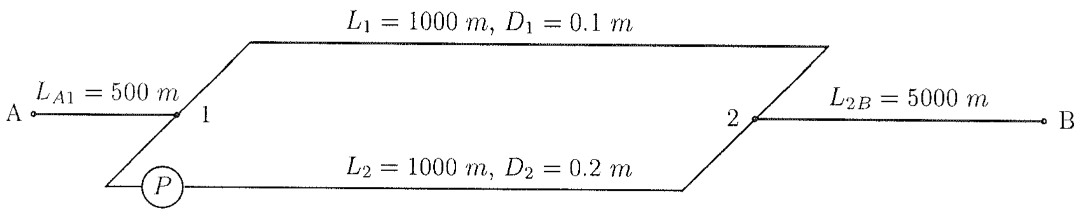


Figura 1: Schema di circuito idraulico

2

Il serbatoio in figura (avente sezione circolare di area $S = 1\ m^2$) è alimentato da una portata costante $Q_{in} = 30 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ di acqua. Il diametro del foro di uscita è $D = 0.05\ m$ e scarica la portata Q_{out} direttamente in atmosfera. Il livello iniziale di liquido nel serbatoio è $h_o = 0.5\ m$ e la corrispondente pressione dell'aria vale $p_o = 1.1 \cdot 10^5 Pa$.

1. Determinare il valore iniziale di portata in uscita dal serbatoio, $Q_{out,0}$, in modo da dimostrare che il serbatoio si riempie. [10%]
2. Determinare il valore massimo del livello dell'acqua nel serbatoio, sapendo che $H = 2\ m$ ed ipotizzando che l'aria intrappolata nella parte superiore del serbatoio subisca una compressione isoterma durante il riempimento. [20%]

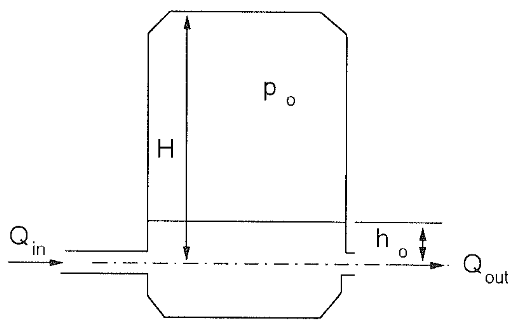


Figura 2: Serbatoio.

3

Un getto di olio molto viscoso ($\rho = 800\ kg/m^3$, $\mu = 0.15\ Pa \cdot s$) viene emesso verso l'alto da un condotto di diametro $D_1 = 0.05\ m$ con portata $w = 10\ kg/s$. Si ipotizzi che il profilo di velocità del fluido all'interno del tubo sia uguale a quello all'interno del getto.

1. Determinare l'altezza massima alla quale può arrivare il getto; [10%]
2. Determinare l'altezza massima alla quale può essere sostenuto un disco avente una massa pari a 4 kg. [20%]

EXE 1

1.1) Pompa spenta (ramo 1P2 chiuso)

$$B_{AB}: \cancel{\frac{1}{2}v_A^2} + \cancel{gh_A} + \frac{P_A}{\rho} + \cancel{W_s}^{0} - lv_{AB} = \cancel{\frac{1}{2}v_B^2} + \cancel{gh_B} + \frac{P_B}{\rho}$$

$$h_A = h_B$$

$$v_A = v_B$$

$$lv_{AB} = \frac{P_A - P_B}{\rho} = \frac{5\cdot 10^5 - 10^5}{10^3} = 400\ \frac{m^2}{s^2}$$

Ipotizzando flusso turbolento: $lv_{AB} = 2 f v_{AB}^2 \frac{L_{AB}}{D}$

con $f = 0{,}079\, Re_{AB}^{-0{,}25}$ e $D = D_1 = 0{,}1\ m$

$$lv_{AB} = 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} v_{AB}^{1.75} \frac{L_{AB}}{D^{1.25}} = 400\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$v_{AB} = \left[\frac{400\cdot(0{,}1)^{1.25}}{0{,}158\,(10^6)^{-0{,}25}\cdot 6500}\right]^{\frac{1}{1.75}} \cong 0{,}81\ m/s$$

$$Q_{AB} = \frac{\pi D_1^2}{4}\cdot v_{AB} \cong 6{,}37\cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

1.2) Pompa accesa (ramo 1P2 aperto e con flusso)

$$v_{2B} = 2v_{AB} \cong 1{,}62\ m/s$$

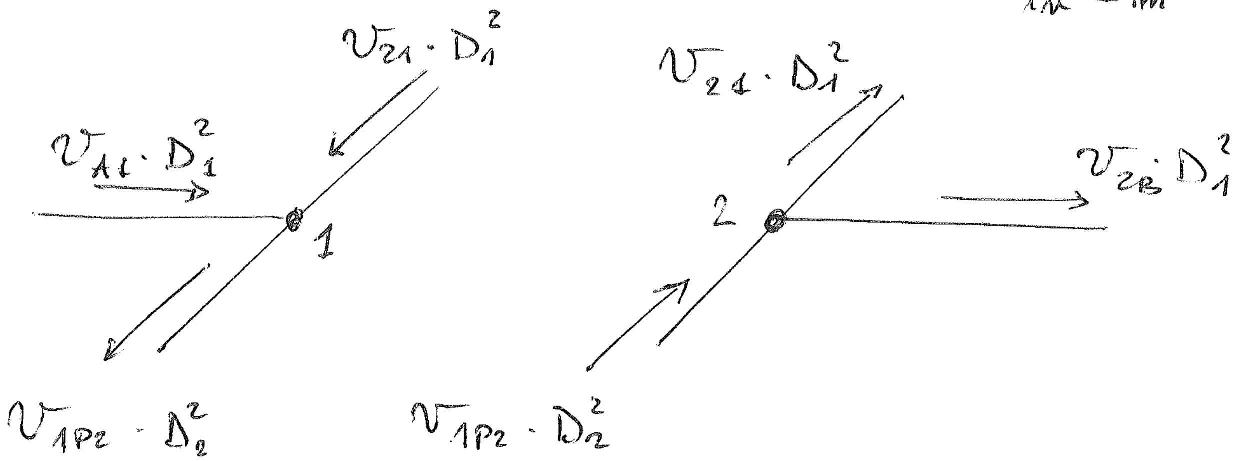
$$B_{2B}: \frac{P_2}{\rho} - lv_{2B} = \frac{P_B}{\rho} \rightsquigarrow P_2 = P_B + \rho\, lv_{2B}$$

$$P_2 = 10^5 + \underbrace{10^3 \cdot 0{,}158\,(10^6)^{-0{,}25}(1.62)^{1{,}75}\frac{5000}{(0{,}1)^{1.25}}}_{\sim 10.3 \cdot 10^5\,Pa}$$

$$\cong 11.3 \cdot 10^5\ Pa$$

Continuità ai nodi : $Q_{in} = Q_{out} \Rightarrow v_{in} A_{in} = v_{out} A_{out}$

$$v_{in} D_{in}^2 = v_{out} D_{out}^2$$



NODO 1 : $v_{A1} \cdot D_1^2 + v_{21} \cdot D_1^2 = v_{1P2} \cdot D_2^2 \Rightarrow v_{1P2} = (v_{A1} + v_{21})\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \frac{v_{A1} + v_{21}}{4}$

NODO 2 : $v_{1P2} \cdot D_2^2 = v_{21} \cdot D_1^2 + v_{2B} \cdot D_1^2 \Rightarrow v_{1P2} = \frac{v_{2B} + v_{21}}{4}$

$\Rightarrow v_{A1} = v_{2B}$

B_{A1} : $\frac{P_A}{\rho} - l_{v_{A1}} = \frac{P_1}{\rho} \Rightarrow P_1 = P_A - \rho\, l_{v_{A1}}$

$$= 5 \cdot 10^5 - 10^3 \cdot \frac{1}{10}\, 10.3 \cdot 10^2$$

$$\cong 3.97 \cdot 10^5\ Pa$$

essendo $l_{v_{A1}} = \frac{1}{10}\, l_{v_{2B}}$ poiché $L_{A1} = \frac{1}{10} L_{2B}$ e tutto il resto è uguale.

Poiché $P_1 \simeq 3.97 \cdot 10^5$ Pa $< P_1 \simeq 11.3 \cdot 10^5$ Pa si ha che il flusso va da 1 a 2 nel ramo della pompa e da 2 a 1 nel ramo di by-pass.

B_{21} (by pass): $\frac{P_2}{\rho} - l_{v_{21}} = \frac{P_1}{\rho} \Rightarrow l_{v_{21}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} = 7.33 \cdot 10^2 \simeq 733 \ m^2/s^2$

$$l_{v_{21}} = 2 f_{21} v_{21}^2 \frac{L_{21}}{D_1} = 0,158 (10^6)^{-0,25} v_{21}^{1.75} \frac{1000}{(0,1)^{1.25}}$$

$$v_{21} = \left[\frac{733 \cdot (0,1)^{1.25}}{0,158 (10^6)^{-0,25} \cdot 10^3} \right]^{\frac{1}{1.75}} \simeq 3.2 \ m/s$$

Dalla continuità: $v_{1P2} = \frac{v_{2B} + v_{21}}{4} = \frac{1.62 + 3.2}{4} = \frac{4.82}{4} \simeq 1.2 \ m/s$

$$Re_{1P2} = \rho \frac{v_{1P2} D_2}{\mu} = 10^6 \cdot 1.2 \cdot 0.2 = 6 \cdot 10^5$$

$$f_{1P2} = 0,079 (6 \cdot 10^5)^{-0,25} \simeq 2.84 \cdot 10^{-3}$$

$$B_{1P2}: \frac{P_1}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{1P2}^2} + \cancel{g h_1} + w_s - l_{v_{1P2}} = \frac{P_2}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{1P2}^2} + \cancel{g h_2}$$

$$w_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + l\, v_{1P2}$$

$$= \frac{11.3 \cdot 10^5 - 3.97 \cdot 10^5}{10^2} + 2 \cdot 2{,}84 \cdot \cancel{10^{-3}} (1.2)^2 \frac{\cancel{10^3}}{0.2}$$

$$= 733 + 4{,}09 \simeq 737 \ m^2/s^2$$

$$\text{Pot} = w_s \cdot \dot{m}_{1P2} = w_s \cdot \rho\, v_{1P2} \frac{\pi D_2^2}{4}$$

$$= 737 \cdot 10^3 \cdot 1.2 \ \frac{\pi (0.2)^2}{4}$$

$$= 277.842{,}45 \simeq \underline{\underline{278 \ kW}}$$

EXE 2

1. Valore iniziale di Q_{out} :

$$Q_{out,0} = Q_{out}(h = h_0) = v_{out,0} \cdot A_{out} =$$

$$= \sqrt{2\left(g h_0 + \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho}\right)} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

essendo, da Bernoulli : $\frac{P_0}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{0,in}^2}^{\,0} + g h_0 = \frac{P_{out}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{out}^2 + \cancel{g h_{out}}^{\,0}$

($v_{0,in}$ = vel. sul pelo libero dell'acqua nel serbatoio) (h_{out} = livello zero)

$$v_{out} = \sqrt{2 g h_0 + 2 \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho}}$$

Calcoli : $\boxed{Q_{out,0}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 + 2 \, \frac{1{,}1 \cdot 10^5 - 10^5}{10^3}} \cdot \underbrace{\frac{\pi (0{,}05)^2}{4}}_{A}$

$$= \sqrt{9{,}81 + 20} \cdot A = \sqrt{29{,}81} \cdot \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{4}$$

$$= \underline{\underline{0{,}0107 \ \text{m}^3/\text{s}}} < Q_{in} \rightarrow \text{RIEMPIMENTO!}$$

2. Massimo livello di acqua: viene raggiunto quando si instaura una condizione di equilibrio a seguito del riempimento iniziale del serbatoio.

$$Q_{in} = Q_{out,ep} = v_{out,ep} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$v_{out,ep} = \frac{4 Q_{in}}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{\pi (0{,}05)^2} = 15{,}28 \ \frac{m}{s}$$

Da Bernoulli: $v_{out,ep} = \sqrt{2 g h_{ep} + 2\left(\frac{P_{0,ep} - P_{atm}}{\rho}\right)}$

per cui: $h_{ep} = \frac{v_{out,ep}^2}{2g} - \frac{(P_{0,ep} - P_{atm})}{\rho g}$ (*)

con $P_{0,ep}$ incognita ma ricavabile in funzione di h_{ep} attraverso la condizione di compressione isoterma dell'aria nel serbatoio:

$h_0^* = H - h_0$

$h_{eq}^* = H - h_{eq}$

$$pV = cost \rightarrow P_0 V_0 = P_{0,ep} \cdot V_{eq}$$

con $V_0 = S \cdot h_0^*$, $V_{ep} = S \cdot h_{ep}^* \Rightarrow h_{ep}^* = \frac{P_0}{P_{0,ep}} \cdot h_0^*$

ovvero $P_{0,ep} = P_0 \cdot \frac{h_0^*}{h_{ep}^*}$. Sostituendo nella (*) e ponendo $h_{ep} = x$:

$$x = \frac{v_{out,ep}^2}{2g} - \frac{P_0 \cdot \frac{h_0^*}{x} - P_{atm}}{\rho g}$$

$$2\rho g x^2 = v_{out,eq}^2 \cdot \rho x - 2 P_0 h_0^* + 2 P_{atm} \cdot x$$

$$\frac{\cancel{2\rho g}\, x^2}{} - \frac{(v_{out,eq}^2 \cdot \rho + 2 P_{atm}) \cdot x}{2\rho g} + \frac{2 P_0 h_0^*}{2\rho g} = 0$$

$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$ con $A = 1$

$$B = -\left(\overbrace{\frac{v_{out,eq}^2}{2g}}^{11.8} + \overbrace{\frac{P_{atm}}{\rho g}}^{10.2}\right) = -22.$$

$$C = \frac{P_0 h_0^*}{\rho g} = \frac{1.1 \cdot \cancel{10^5}^{2} \cdot 0{,}5}{\cancel{10^3} \cdot 9{,}81} \simeq 5.6$$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{+22.1 \pm \sqrt{488 - 4 \cdot 1 \cdot 5{,}61}}{2}$$

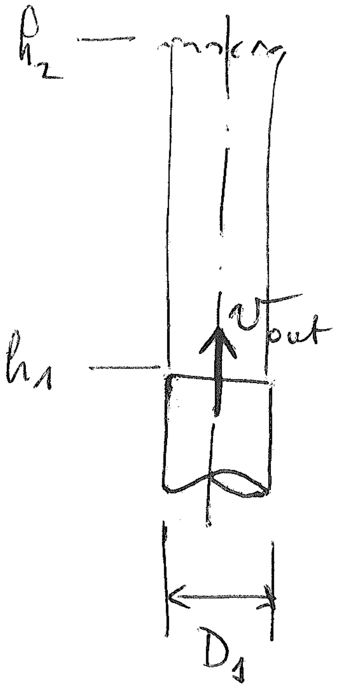
$$= +11.05 \pm 10.79 = \begin{cases} 0.26 \text{ m} \\ 21.84 \text{ m} \quad NA \end{cases}$$

$$P_{0,eq} = P_0 \cdot \frac{h_0^*}{h_{eq}^*} = 1.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}5}{0.26} \quad ; \quad h_{eq} = \underline{\underline{1.74 \text{ m}}}$$

$$= \underline{\underline{2.11 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$$

EXE 3

3.1) Altezza getto "libero":



$\dot{m} = 10\ kg/s$

$D_1 = 0{,}05\ m \rightarrow A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 1.96 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$v_{out} = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{10}{0.8 \cancel{10^3} \cdot 1{,}96 \cdot \cancel{10^{-3}}} \simeq \mathbf{6.4\ m/s}$

Applicando Bernoulli tra sezione di uscita del getto e sommità del getto (sez. 1 e 2 rispettivamente) si ha:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 + \cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \cancel{W_s}^{0} - \cancel{l v_{1\to 2}}^{0} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} v_2^2}^{0} + g h_2 + \cancel{\frac{P_2}{\rho}}$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ per ipotesi di profilo di velocità piatto.
Vale inoltre $P_1 = P_2 = P_{atm}$, $W_s = 0$, $l v_{1\to 2} \simeq 0$.
Si trova:

$$\boxed{h_{getto} = h_2 - h_1 = \frac{1}{2} v_1^2 / g \simeq \underline{\underline{\mathbf{2.07\ m}}}}$$

3.2) Altezza del getto con disco:

$m_{disco} = 4\ Kg$

Deve valere la conservazione della p.d.m. in direzione verticale (coord. z):

$$0 = \dot m \left[\beta_1 \vec v_1 - \beta_2 \vec v_2 \right] + p_1 \vec A_1 - p_2 \vec A_2 - \vec F + \int_{z_1}^{z_2} \rho \vec g \, dA$$

$$0 = \dot m \left[\beta_1 v_{1,z} - \beta_2 v_{2,z} \right] + p_1 A_{1,z} - p_2 A_{2,z} - F_z + \int_{h_1}^{h_2} \rho g A \, dz$$

Assumendo che la sezione del getto non cambi (ovvero $A_{1,z} = A_{2,z} = A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$) e sapendo che $P_1 = P_2 = P_{atm}$, oltre che $\beta_1 = \beta_2 = 1$, si trova:

$$0 = \dot m \left(v_{1,z} - v_{2,z} \right) - F_z - \rho g A_1 (h_2 - h_1)$$

con $v_{1,z} = \frac{\dot m}{\rho A_1}$, $v_{2,z} = 0$, $F_z = mg$

$$\boxed{h_{getto}} = h_2 - h_1 = \frac{\dot m v_{1,z} - F_z}{\rho g A_1}$$

$$= \frac{10 \cdot 6.4 - 4 \cdot 9{,}81}{\cancel{800}\, 0.8 \cdot 9{,}81 \cdot 1.96 \cdot \cancel{10^{-3}}}$$

$$\cong 1.59 \text{ m}$$

L'altezza del getto passa da 2.07 m a 1.59 m per sostenere il disco di 4 kg.