FLUIDODINAMICA, AA 2007/2008

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

30 Novembre 2007

1

Quando una brezza soffia sulla superficie calma del mare, negli strati di acqua vicino alla superficie si sviluppa un tipo particolare di circolazione detta di Langmuir (Fig.1) dal nome del fisico che la studiò per primo. Tale circolazione origina una serie di celle adiacenti, orientate in direzione del vento e contenenti lunghi vortici in cui l'acqua si muove lungo traiettorie circolari. Per caratterizzare il vortice in ciascuna cella, è possibile usare la seguente funzione di flusso:

$$\Psi(x,y) = UL sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \tag{1}$$

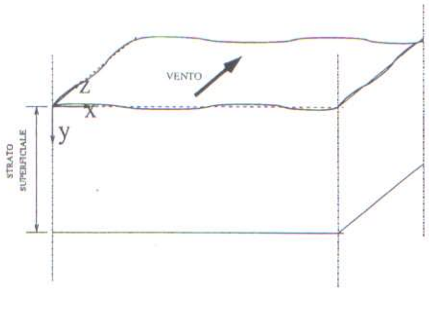
con U velocità dell'acqua sul bordo della cella ed L lato della cella. Supponendo note U ed L, si richiede di:

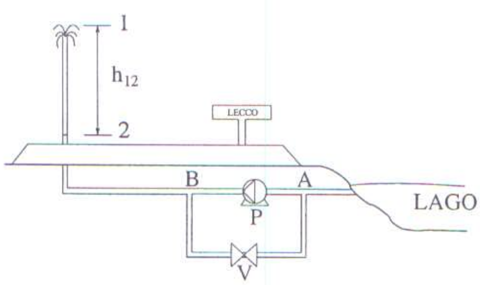
1. determinare l'espressione per le componenti di velocità v_x e v_y del fluido; [5%]
2. disegnare l'andamento del profilo di velocità e le linee di corrente (iso-Ψ) all'interno della cella; [10%]
3. verificare che il flusso all'interno di ciascuna cella è irrotazionale; [10%]
4. calcolare la portata di acqua circolante all'interno di ciascuna cella. [5%]

2

Il comune di Lecco ha recentemente approvato uno stanziamento di fondi per la realizzazione di una fontana nella piazza principale della città . Lo schema della fontana è mostrato in Fig. 2: una tubazione liscia ($f = 0.079 \cdot Re^{-0.25}$) di diametro $D = 0.4\ m$ e lunghezza complessiva $L = 200\ m$ viene utilizzata per alimentare la fontana prelevando l'acqua dal vicino lago tramite una pompa assiale.

1. Determinare la velocità che è necessario garantire all'uscita della tubazione per produrre un getto d'acqua avente altezza $h_{12} = 6\ m$. [5%]
2. Determinare, nell'ipotesi di valvola V chiusa, la pressione assoluta che è necessario garantire alla mandata della pompa per ottenere il getto di altezza desiderata nell'ipotesi di perdite concentrate trascurabili. [10%]
3. Durante le ore notturne, si prevede di ridurre l'altezza del getto prodotto dalla fontana. A tal fine, viene aperta la valvola V e viene utilizzato un circuito di by-pass tra i punti A e B a monte ed a valle della pompa. Il circuito di by-pass ha lunghezza equivalente $L_{eq} = 20\ m$ e diametro D. Sapendo che $p_A = p_{atm}$, determinare la prevalenza fornita dalla pompa, w_s in $[m^2/s^2]$, affinchè l'altezza del getto si riduca a $h_{12} = 1\ m$. [20%]





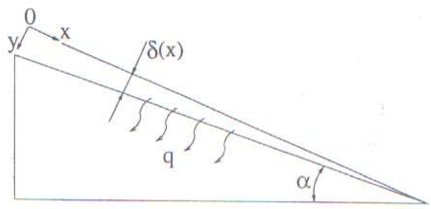


Fig. 1 Circolazione di Langmuir (Es 1) **Fig. 2** Fontana di Lecco (Es. 2) **Fig. 3** Film di idrocarburi (Es. 3)

3

Una miscela di idrocarburi (avente densità ρ, $[kg/m^3]$) viene accidentalmente versata lungo un pendio, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale ed avente lunghezza $x = L$. Il film di idrocarburi scorre lungo il pendio venendo assorbito dal terreno con tasso costante, q $[m/s]$, come schematizzato in Fig. 3. Detto $\delta(x)$ lo spessore del film, si richiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame, enunciando chiaramente tutte le ipotesi semplificative; [5%]
2. calcolare il profilo di velocità del film e lo sforzo di taglio alla parete; [15%]
3. calcolare la portata specifica, $\Gamma(x)$, $[kg/ms]$, e lo spessore del film di idrocarburi, $\delta(x)$, alla fine del pendio nell'ipotesi che $q = \Gamma_0/3\rho L$ con $\Gamma_0 = \Gamma(x=0)$. [15%]

Continuità $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \qquad$ *Navier-Stokes* $\quad \rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Relaz. di Cauchy-Riemann $\quad v_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y},\ v_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad$ *Vorticità* $\quad \omega_k = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

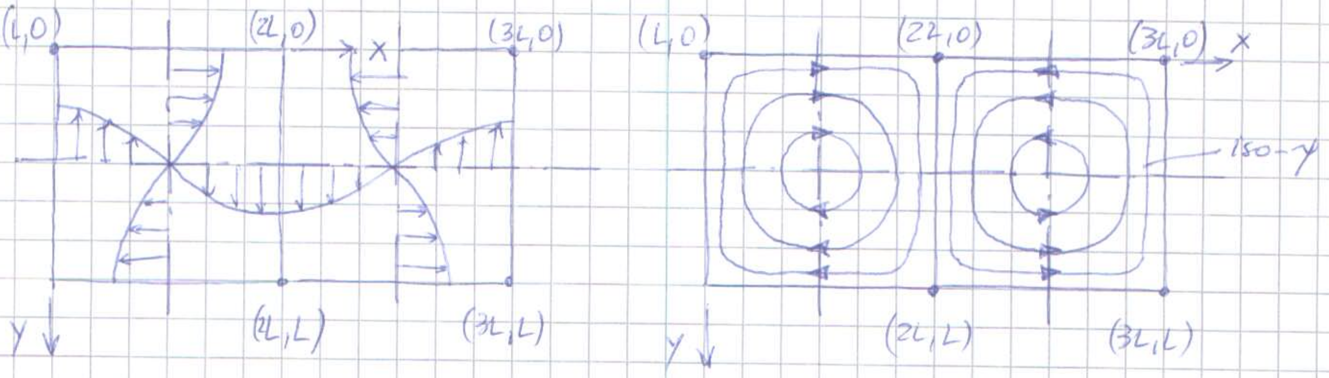
II^a PROVA INTERMEDIA - 30 NOV. 2007

EXE 1

$$\psi(x,y) = UL \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

1.1) $v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -U\pi \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)$

$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = U\pi \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$

1.2)


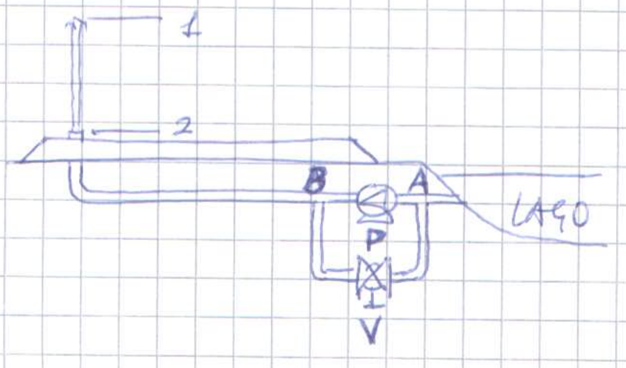
1.3) $\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = U\pi \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \frac{\partial}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \left[-U\pi \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\partial}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right]$

$= -\frac{U\pi^2}{L} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{U\pi^2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) =$

$= -\frac{2U\pi^2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \neq 0 \Rightarrow$ FLUSSO ROTAZIONALE

1.4) $\frac{Q}{W} = \psi_{max} - \psi_{min} = UL - 0 = UL \left[\frac{m^2}{s}\right] \Rightarrow \boxed{\Gamma = \rho UL}$

EXE 2



$L = 200$ m

$D = 0{,}4$ m

2.1) $B_{21}: \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 + \cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \overset{=0}{\cancel{w_s}} = \frac{1}{2} \overset{=0}{\cancel{v_1^2}} + g h_1 + \cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \overset{=0}{l_{v_{21}}}$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$, $v_1 = 0$, $w_s = 0$, $l_{v_{21}} = 0$

$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6} = 10{,}84$ m/s

$$\boxed{v = 10{,}844 \text{ m/s}}$$

2.2) B_{P2} : $\cancel{\frac{1}{2} v_p^2} + \cancel{g h_p} + \frac{P_p}{\rho} + \overset{=0}{\cancel{w_s}} = \cancel{\frac{1}{2} v_2^2} + \cancel{g h_2} + \frac{P_2}{\rho} + l v_{P2}$

$v_p = v_2$, $h_p \cong h_2$, $w_s = 0$, $P_2 = P_{atm}$

$$P_p = P_{atm} + l v_{P2} = P_{atm} + \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} k v^2}_{trasc.} + 2 f v^2 \frac{L}{D}\Big)\rho$$

$v = 10{,}844$ m/s $\rightarrow$ $Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 10^6 \cdot 10{,}844 \cdot 0{,}4$
$= 4{,}34 \cdot 10^6$ ($\gg 4000$)

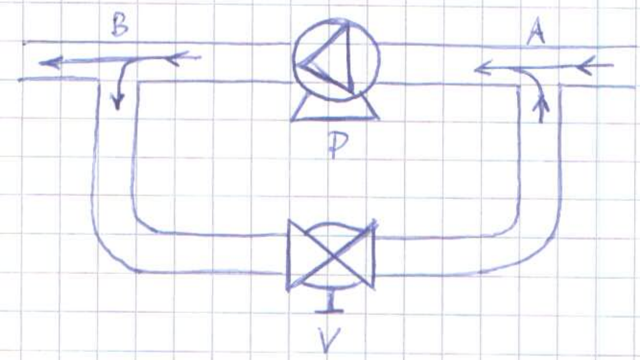
Regime di flusso : turbolento

$f = 0{,}079\, Re^{-0{,}25} = 1{,}731 \cdot 10^{-3}$

$l v_{P2} \cdot \rho = 2 \rho f v^2 \frac{L}{D} = 2 \cdot \cancel{10^3} \cdot 1{,}731 \cdot \cancel{10^{-3}} \cdot (10{,}844)^2 \cdot \frac{200}{0{,}4}$
$= 203\,560{,}6$ [Pa] $\left[\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s^2} = kg \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^2} = Pa\right]$

$\boxed{P_p = 304\,885{,}6 \text{ Pa}}$ Pressione alla mandata della pompa

2.3)



Con valvola V aperta:

$\dot m_{in} = \dot m_{APB} - \dot m_{BVA}$

$\dot m_{out} = \dot m_{APB} - \dot m_{BVA}$

In B: $\dot m_{out} \leftarrow \dot m_{APB}$, $\downarrow \dot m_{BVA}$

In A: $\dot m_{APB} \leftarrow \dot m_{in}$, $\uparrow \dot m_{BVA}$

Poiché il diametro della tubazione non varia ed il fluido è acqua:

$v_{in} = v_{APB} - v_{BVA}$

$v_{out} = v_{APB} - v_{BVA}$

$\Rightarrow v_{in} = v$ ...

B_{21} : $\frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 = gh_1$

Poiché $v_2 = v_{in} = v_{out}$ allora $v_{in} = v_{out} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \underline{4{,}427 \ m/s}$

B_{APB} : $\cancel{\frac{1}{2}v_{APB}^2} + \cancel{gh_A} + \frac{P_A}{\rho} + W_s = \cancel{\frac{1}{2}v_{APB}^2} + \cancel{gh_B} + \frac{P_B}{\rho} +$

$v_A = v_{APB}$ $\qquad$ $v_B = v_{APB}$

$$W_s = \frac{P_B - P_A}{\rho} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\underbrace{k}_{=0} v_{APB}^2 + 2 f_{APB} v_{APB}^2 \frac{L_{APB}}{D}\right)}_{\text{si posso assumere trascurabili}}$$

Incognita : P_B

B_{B2} : $P_B = P_{atm} + lv_{B2} = P_{atm} + \left(\frac{1}{2}\underbrace{k}_{\text{trasc.}} v_{out}^2 + 2f\, v_{out}^2 \frac{L_{B2}}{D}\right)$

Assumendo $L_{B2} \simeq 200$ m si ha:

$$P_B = P_{atm} + 2\cdot\left(0{,}079\, Re^{-0{,}25}\right) v_{out}^2 \frac{L_{B2}}{D}\rho$$

con $Re = \frac{\rho v_{out} D}{\mu} = 1770800$

Pertanto $P_B = 101325 + 0{,}158 \cdot 0{,}0274\,(4{,}427)^2 \frac{200}{0{,}4} \cdot 10^3 =$

$= \underline{\underline{143767{,}8 \ Pa}}$

Si trova : $W_s = \frac{143767{,}8 - 101325}{1000} = 42{,}4428 \ \frac{m^2}{s^2}$

$\boxed{W_s \simeq 42{,}4 \ m^2/s^2}$ PREVALENZA DELLA POMPA

NOTA: non volendo trascurare le perdite distribuite nel tratto APB si doveva procedere così:

B_{BVA} : $\cancel{\frac{1}{2}v_{BVA}^2} + \cancel{gh_B} + \frac{P_B}{\rho} + \underbrace{W_s}_{=0} = \cancel{\frac{1}{2}v_{BVA}^2} + \cancel{gh_A} + \frac{P_A}{\rho} + lv_{BVA}$

$$lv_{BVA} = 2 f_{BVA} v_{BVA}^2 \frac{L_{eq}}{D} = \frac{P_B - P_A}{\rho}$$

IV

$$0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} v_{BVA}^{1{,}75} \frac{L_{eq}}{D^{1{,}25}} = \frac{P_B - P_{atm}}{\rho}$$

$$v_{BVA} = \left[\left(\frac{P_B - P_{atm}}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{0{,}25} \frac{D^{1{,}25}}{0{,}158\, L_{eq}}\right]^{\frac{1}{1{,}75}}$$

$$= \left[\left(\frac{143767{,}8 - 101325}{10^3}\right)\left(10^6\right)^{0{,}25} \cdot \frac{(0{,}4)^{1{,}25}}{0{,}158 \cdot 20}\right]^{\frac{1}{1{,}75}}$$

$$\cong 16{,}5 \ m^2/s^2$$

Per la continuità al nodo: $v_{APB} = 16{,}5 + 4{,}427 = 20{,}927$ m/s

$$l_{v_{APB}} = 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} v_{APB}^{1{,}75} \cdot \frac{L_{APB}}{D} = \leftarrow \text{Assumo } L_{APB} \cong 20\,m \overset{!}{=} L_{eq}$$

$$= 0{,}158 \left(10^6\right)^{-0{,}25} (20{,}927)^{1{,}75} \cdot \frac{20}{0{,}4}$$

$$= 51{,}161 \ m^2/s^2$$

$$W_s = \frac{P_B - P_A}{\rho} + l\, v_{APB} = 93{,}6038 \ m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{W_s \cong 93{,}6 \ m^2/s^2}$$

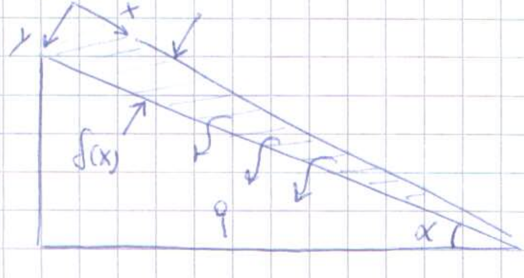
NOTA: Nel caso di perdite trascurabili nel tratto APB, la potenza richiesta alla pompa è:

$$Pot = W_s \cdot \dot{m}_{APB} = W_s \cdot \rho\, v_{APB} \frac{\pi D^2}{4} = 42{,}4 \cdot 10^3 \cdot 20{,}927 \frac{\pi (0{,}4)^2}{4}$$

$$\cong 111502\, W \Rightarrow Pot \cong 111{,}5\, kW$$

Il valore è elevato in quanto è elevata la portata di fluido da elaborare ($\dot{m}_{APB} \cong 2630$ kg/s $\Rightarrow Q \cong 157{,}8\ m^3/min$)

EXE 3



Ipotesi: $Re \cdot \frac{\delta(x)}{L} \ll 1$ (Th. LUBRIF.)

$v_z = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$ (Flusso 2D)

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (Flusso stazionario)

V

Cont. $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad$ con $\quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha$

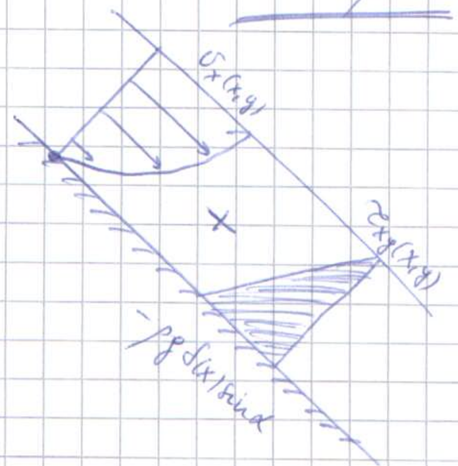
NS_y $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad$ con $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha \Rightarrow P = P(x)$

3.2) $v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) y^2 + C_1 y + C_2$

C.C. #1 : $\tau_{xy}(y=0) = 0 \Rightarrow \mu \cdot \frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) y\Big|_{y=0} + C_1 = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$

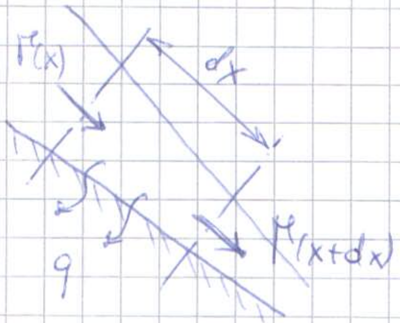
C.C. #2 : $v_x(x, y = \delta(x)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\delta^2(x) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\delta^2(x)$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(y^2 - \delta^2(x)\right) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(y^2 - \delta^2(x)\right)}$$



$$\boxed{\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho g y \sin\alpha}$$

3.3)



$\underbrace{\Gamma(x)}_{\frac{kg}{ms}} = \Gamma(x+dx) + \underbrace{\rho q\, dx}_{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m}{s}\cdot m}$

$\frac{\Gamma(x+dx) - \Gamma(x)}{dx} = -\rho q \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = -\rho q$

Integrando fra $x=0$ ed x : $\Gamma(x) = \Gamma_0 - \rho q x$

Quando $x = L$: $\Gamma(x=L) = \Gamma_0 - \rho q L = \Gamma_0 - \rho L \frac{\Gamma_0}{3\rho L} = \frac{2}{3}\Gamma_0$

$$\boxed{\Gamma(x=L) = \frac{2}{3}\Gamma_0}$$

$\Gamma(x) = \rho \frac{Q(x)}{W} = \rho \cdot \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\, dy = \rho \cdot \left[-\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\int_0^{\delta(x)} [y^2 - \delta^2(x)]\, dy\right] \Rightarrow$

(VI)

$$\Gamma(x) = -\frac{\rho^2 g \sin\alpha}{\mu}\underbrace{\left(\frac{y^3}{3} - \delta^2(x)\, y\right)\Big|_0^{\delta(x)}}_{\frac{\delta^3(x)}{3} - \delta^3(x) = -\frac{2}{3}\delta^3(x)} = \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{3\mu}\cdot \delta^3(x)$$

In $x = L$: $\quad \Gamma(x=L) = \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{3\mu}\,\delta^3(x=L)$

$$\delta(x=L) = \left[\frac{3\mu\,\Gamma(x=L)}{\rho^2 g \sin\alpha}\right]^{1/3} = \left(\frac{\cancel{3}\mu}{\rho^2 g \sin\alpha}\,\frac{2}{\cancel{3}}\,\Gamma_0\right)^{1/3}$$

$$\boxed{\delta(x=L) = \left(\frac{2\mu}{\rho^2 g \sin\alpha}\,\Gamma_0\right)^{1/3}}$$