

1

Il dispositivo in Fig. 1, utilizzato per effettuare misure di densità, è costituito da un tratto di tubazione ad U collegato ad un serbatoio di sezione circolare (diametro D) contenente aria a pressione p_{int} ed acqua (di densità ρ).

1. Ricavare un'espressione per la densità ρ^* dell'olio contenuto nel ramo destro della tubazione in funzione di ρ , H e p_{int} nell'ipotesi che $p_{int} = 2p_{atm}$. [10%]
2. Disegnare graficamente l'andamento della pressione lungo la parete verticale interna del serbatoio (da A fino a C). [10%]
3. Assumendo $p_{atm} = 10^5 Pa$, $\rho = 10^3 kg/m^3$ e $g = 10 m/s^2$, calcolare il valore minimo di H , in metri, affinché risulti verificata la condizione $\rho^* < \rho$. [10%]

2

Il *dip coating* è un processo utilizzato per deporre film sottili su un substrato solido tramite immersione di tale substrato in una vasca contenente il materiale da deporre in forma liquida. Il substrato così *rivestito* viene successivamente estratto dalla vasca facendolo scorrere verticalmente con velocità costante e pari ad U , come schematizzato in Fig. 2. Lo spessore del film trascinato verticalmente assieme al substrato può essere modificato tramite un getto d'aria trasversale ad alta pressione (*gas jet wiping*): il getto fa ricadere per gravità la portata di film in eccesso verso il basso, riducendo così lo spessore al valore desiderato. Con riferimento alla regione di flusso evidenziata dal rettangolo tratteggiato in Fig. 2, internamente alla quale si può ipotizzare che lo spessore del film sia costante e pari a δ , si chiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame enunciando chiaramente le ipotesi semplificative, [10%]
2. ricavare l'espressione del profilo di velocità nel film, $v_x(y)$, e rappresentarne graficamente l'andamento; [15%]
3. determinare quale deve essere lo spessore δ^* del film affinché la portata volumetrica netta trasferita sia massima. [15%]

3

Per realizzare un processo di verniciatura, si utilizza una pistola a spruzzo per generare goccioline di vernice aventi forma sferica, densità ρ_p e diametro D_p . Le goccioline vengono spruzzate con velocità iniziale $v_p(t=0) = v_i$ contro una parete forata verticale posta ad una distanza pari a d (vedi Fig 3). Si supponga che le goccioline si muovano orizzontalmente in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$) e che abbiano massa m_p costante. Si ipotizzi inoltre che l'aria circostante (avente densità ρ e viscosità μ) sia in quiete.

1. Trascurando gli effetti dovuti alla forza di gravità, impostare il bilancio di forze agenti sulle goccioline e, partendo da tale bilancio, determinare l'espressione della distanza coperta dalle goccioline in direzione orizzontale x_p in funzione del tempo, t , e rappresentarne graficamente l'andamento. [15%]
2. Determinare il valore minimo che deve avere il diametro D_p delle goccioline affinché queste possano raggiungere la parete. [15%]

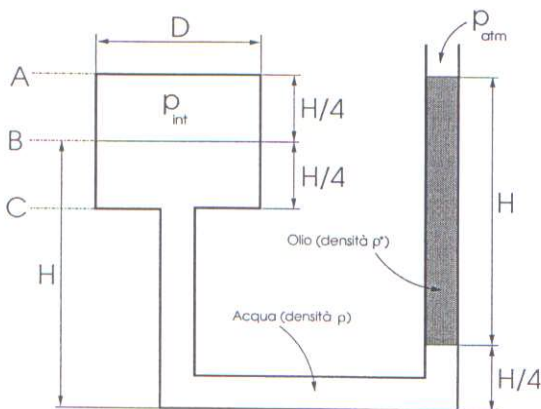


Fig. 1 Dispositivo per misure di densità

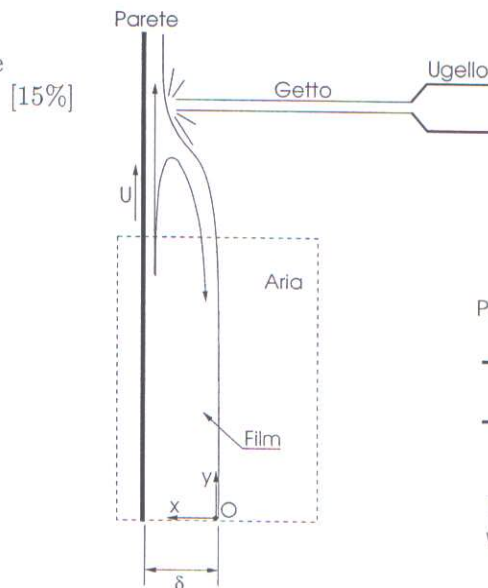


Fig. 2 Dip Coating

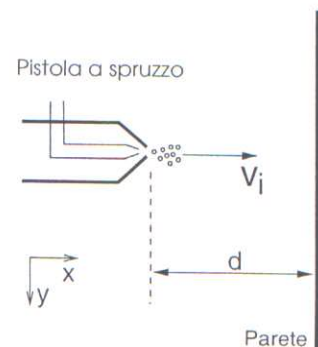
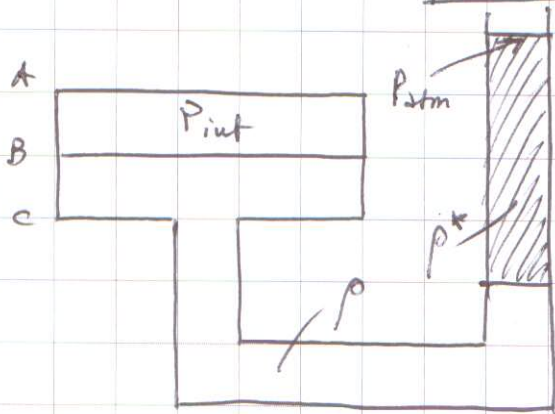


Fig. 3 Pistola a spruzzo

Continuità: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$; Navier-Stokes: $\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$; Sforzo di taglio: $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella: $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p| D_p}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$

EXE 1



1.1) Calcolo di ρ^* :

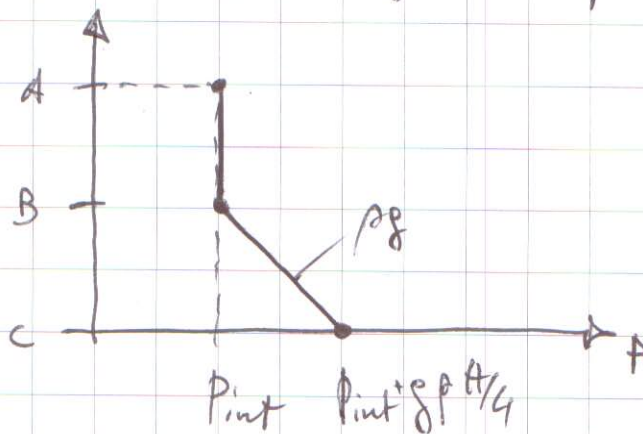
$$P_{int} + \rho g H - \rho g H/4 - \rho^* g H = P_{atm}$$

$$\rho^* = \frac{P_{int} - P_{atm} + \frac{3}{4} \rho g H}{g H}$$

$$P_{int} = 2 P_{atm} \rightarrow$$

$$= \frac{P_{atm} + \frac{3}{4} \rho g H}{g H} \rightarrow \rho^* = \frac{10^4}{H} + 750$$

1.2) Andamento di ρ lungo la parete interna:

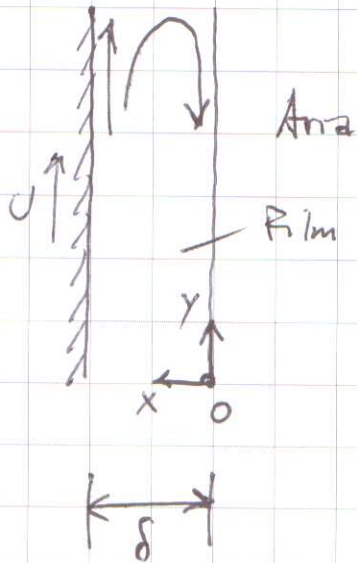


1.3) Valore minimo di H affinché $\rho^* < \rho$:

$$\rho^* < \rho \Rightarrow \frac{P_{atm}}{g H} + \frac{3}{4} \rho < \rho - \frac{3}{4} \rho ; \frac{P_{atm}}{g H} < \frac{1}{4} \rho$$

$$H > \frac{4 P_{atm}}{\rho g} = \frac{4 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10} = 40 \text{ m} \Rightarrow \boxed{H_{min} = 40 \text{ m}}$$

EXE 2



2.1) Ipotesi e semplificazioni:

$$d_y(x) \neq 0$$

$$v_x = v_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (\text{Flusso 2D})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (\text{Flusso staz.})$$

Cont. $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_y : $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$

con $-\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho g \cdot 1 = -\rho g$ (NS_x : $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$)

2.2) Profilo di velocità:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\rho g}{\mu} \xrightarrow{\#1} \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} x + C_1 \xrightarrow{\#2} v_y = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

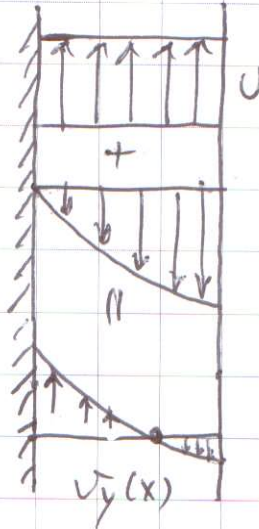
C.C. #1 : $v_y(x = \delta) = U \Rightarrow U = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 + C_1 \delta + C_2$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(x = 0) = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Dalla c.c. #1 con $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = U - \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2$

$$v_y(x) = \underbrace{\frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - \delta^2)}_{\text{Poiseuille } (<0)} + \underbrace{U}_{\text{Couette } (>0)}$$

Andamento grafico:



2.3) δ^* tale per cui $Q = Q_{\max}$

$$\frac{Q}{W} = \int_0^\delta v_y(x) dx = \frac{\rho g}{2\mu} \int_0^\delta (x^2 - \delta^2) dx + U \int_0^\delta dx$$

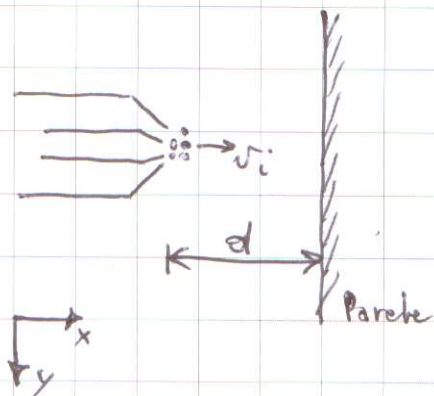
$$= \frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{x^3}{3} - \delta^2 x \right) \Big|_0^\delta + U\delta = - \frac{\rho g}{3\mu} \delta^3 + U\delta$$

$\underbrace{\delta^3/3 - \delta^3 = -\frac{2}{3}\delta^3}_{\text{Poiseuille } (<0)} \quad \underbrace{U\delta}_{\text{Couette } (>0)}$

$$\frac{Q}{W} = \max \text{ sse } \frac{dQ}{d\delta} = 0 \Rightarrow - \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 + U = 0$$

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\mu U}{\rho g}}$$

EXE 3



3.1) Bilancio di forze

$$\vec{F}_T = \vec{F}_0 + \vec{F}_p + \vec{F}_{visc}$$

$$m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho C_D A_p |\vec{u} - \vec{v}_p| (\vec{u} - \vec{v}_p)$$

Nell'unica direz. di moto (direz.ione x):

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}} \left[\frac{1}{2} \rho \frac{e_4}{\rho |\vec{u} - \vec{v}_p| D_p} \cdot \frac{\pi D_p^2}{4} |\vec{u} - \vec{v}_p| (\vec{u} - \vec{v}_p) \right]$$

$$= - \frac{v_p}{\tau_p} \quad \text{con} \quad \tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$$

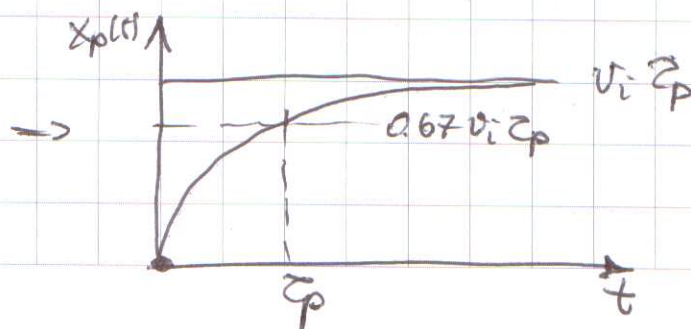
$$\frac{dv_p}{v_p} = - \frac{t}{\tau_p} \Rightarrow v_p(t) = v_i e^{-t/\tau_p}$$

$$X_p(t) = \int_0^t v_p(t) dt = -v_i \tau_p e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$

$$\boxed{X_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})}$$

$$X_p(t=0) = 0$$

$$X_p(t \rightarrow \infty) = v_i \tau_p$$



3.2) Affinché le goccioline zeffino la parete deve essere:

$$x_p^{\max}(t) \geq d$$

$$x_p^{\max}(t) = v_i \tau_p \quad \text{poiché } v_p(t=0) \text{ se } t \rightarrow \infty \text{ e, pertanto}$$

$$x_p^{\max}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = v_i \tau_p$$

$$\text{Quindi } \tau_p \geq \frac{d}{v_i} \Rightarrow \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \geq \frac{d}{v_i} \Rightarrow D_p \geq \sqrt{\frac{18\mu d}{v_i \rho_p}}$$

