

1

Un Counter-current Flow Reactor (CFR) è un particolare tipo di reattore all'interno del quale viene realizzato un flusso controcorrente di due fluidi diversi, tipicamente un liquido ed un gas. La configurazione di flusso semplificata per un tale reattore è rappresentata in Fig. 1. La parete del reattore (ipotizzata piana) viene alimentata a film da una portata specifica  $\Gamma$  [ $kg/m \cdot s$ ] di liquido (avente densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ ) mentre il gas fluisce in controcorrente con velocità indisturbata  $v_g$ . Per effetto del flusso controcorrente, il gas esercita sul liquido uno sforzo di taglio  $\tau_i$  in corrispondenza dell'interfaccia. Ipotizzando spessore  $\delta$  del film di liquido costante e portata specifica  $\Gamma$  nota, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame enunciando chiaramente le ipotesi semplificative, [5%]
2. determinare l'espressione del profilo di velocità del liquido nel film e rappresentarne graficamente l'andamento, [15%]
3. determinare l'espressione dello spessore del film di liquido nell'ipotesi che risulti nulla la portata specifica netta trasferita verso il basso. [15%]

2

Un piccolo pallone sonda di forma sferica (raggio  $R_0 = 1 m$ ) viene utilizzato per effettuare delle misure igrometriche in atmosfera. Il pallone, dotato di apposita strumentazione, ha massa  $m_p = 2.4 kg$  ed è riempito con una massa  $m_g = 0.9 kg$  di un gas leggero. Sapendo che la temperatura atmosferica varia in funzione dell'altezza da terra ( $z$ ) secondo la legge  $T(z) = T_0 - \alpha z$ , con  $T_0 = 293 K$  e  $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-3} K/m$ ; e supponendo che l'aria ( $M = 29 kg/kmol$ ) si comporti come un gas perfetto ( $R = 8,314 kJ/kmolK$ ), si richiede di:

1. ricavare l'espressione per la variazione della pressione in funzione dell'altezza da terra,  
Soluzione con valori numerici [15%]  
Soluzione senza valori numerici [10%]
2. determinare l'altezza  $\bar{z}$  alla quale il pallone sonda si ferma nell'ipotesi che il raggio del pallone rimanga costante e che la pressione sulla superficie terrestre sia pari a  $p_0 = 101325 Pa$ .  
Soluzione con valori numerici [20%]  
Soluzione senza valori numerici [10%]

3

Una pistola a spruzzo produce goccioline di vernice (aventi diametro  $D_p$  [ $m$ ], velocità iniziale  $v_p(t=0) = v_i \sqrt{2}$  [ $m/s$ ] e densità  $\rho_p$  [ $kg/m^3$ ]) contro una parete inclinata di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  rispetto all'orizzontale e posta a distanza  $d$  [ $m$ ] (vedi Figura 2). Si supponga che le goccioline si muovano in regime di Stokes ( $C_D = 24/Re_p$ ) e che abbiano massa costante. Si ipotizzi inoltre che l'aria circostante (avente densità  $\rho_f$  [ $kg/m^3$ ] e viscosità  $\mu_f$  [ $Pa \cdot s$ ]) sia in quiete.

1. Derivare un'espressione che descriva l'evoluzione temporale della distanza coperta dalle goccioline in ciascuna delle due direzioni di moto ( $x$  e  $y$ ). [20%]
2. Determinare la *stopping distance* in direzione orizzontale. [10%]

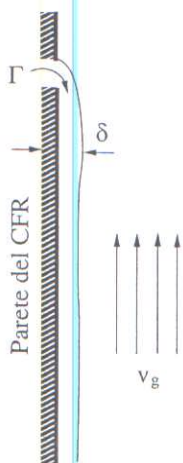


Fig. 1 Schema di funzionamento di un CFR

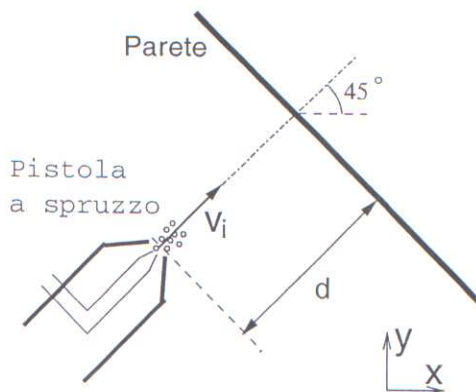


Fig. 3 Pistola a spruzzo

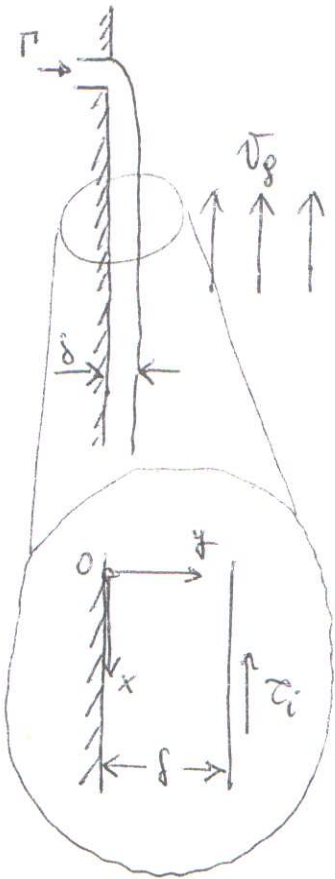
Continuità:  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ ; Navier-Stokes:  $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$ ; Sforzo di taglio:  $\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella:  $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p| D_p}{\mu}$ ,  $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$

14/11/2008 - A.A. 2008/2009

EXE 1.

Il problema è assimilabile a quello di flusso di film su lastra piana verticale. Data la configurazione di flusso, si può adottare un sistema di riferimento cartesiano rispetto al quale semplificare le eq. di conservazione.



Hp :  $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$  STAZIONARIETA'

$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$  FLUSSO 2D (Linea di flusso nel piano x-y)

$$\left. \begin{aligned} v_x = v_x(y) \neq 0 \\ v_y = v_z = 0 \end{aligned} \right\} \text{FLUSSO UNIDIREZ.}$$

WNT.  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$  FLUSSO COMPL. SVILUPPATO

NS<sub>x</sub>  $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$  con  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P^{\text{co}}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho g$

NS<sub>y</sub>  $0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow P = P(x)$

NS<sub>z</sub>  $0 = 0$

Dalla NS<sub>x</sub> :  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} (-\rho g) \int_{\#1} \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} (-\rho g) y + C_1$

$$\int^{\#2} \Rightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g) y^2 + C_1 y + C_2$$

c.c. #1 :  $v_x(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

c.c. #2 :  $\tau_{xy}(y=\delta) = -\tau_i \Rightarrow \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = -\tau_i \Rightarrow$

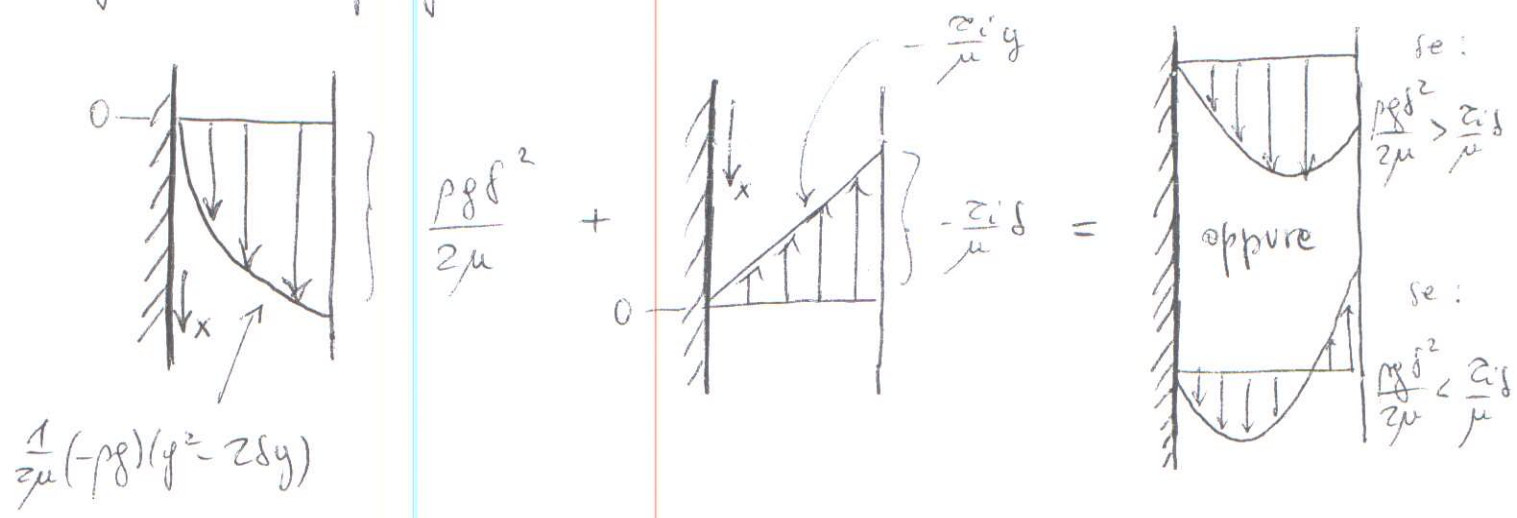
$$\Rightarrow -\rho g \delta + \mu C_1 = -\tau_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \delta}{\mu} - \frac{\tau_i}{\mu}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g) (y^2 - 2\delta y) - \frac{\tau_i}{\mu} y$$



Grafico del profilo di velocità:



Affinché risulti nulla la portata netta trasportata è sufficiente che si annulli la velocità media del liquido all'interno del filare, ovvero:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_x(y) dy = 0$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{2\mu} (-\rho g) \int_0^\delta (y^2 - 2\delta y) dy - \frac{\tau_i}{\mu} \int_0^\delta y dy \right] \quad |3$$

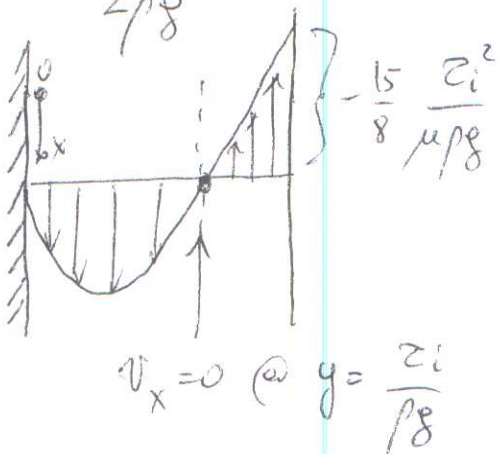
$$= \frac{-\rho g}{2\mu\delta} \left( \frac{\delta^3}{3} - \delta^3 \right) - \frac{\tau_i}{\mu} \frac{\delta^2}{2} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} - \frac{\tau_i \delta}{2\mu} = 0!$$

Esprimendolo in funzione di  $\delta$ :

$$\delta \left( \frac{\rho g}{3\mu} \delta - \frac{\tau_i}{2\mu} \right) = 0 \begin{cases} \delta = 0 \text{ (spessore del film nullo)} \\ \delta = \frac{3\tau_i}{2\rho g} \end{cases}$$

NOTA:

Se  $\delta = \frac{3\tau_i}{2\rho g}$  allora  $v_x(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} (\delta^2 - 2\delta y) - \frac{\tau_i}{\mu} y =$



$$= \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} - \frac{\tau_i \delta}{\mu} = \frac{\rho g}{2\mu} \frac{9\tau_i^2}{4\rho^2 g^2} - \frac{\tau_i}{\mu} \frac{3\tau_i}{\rho g}$$

$$= \frac{9}{8} \frac{\tau_i^2}{\mu \rho g} - \frac{3\tau_i^2}{\mu \rho g} = -\frac{15}{8} \frac{\tau_i^2}{\mu \rho g}$$

EXE 2:

Pallone sonda :  $R_0 = 1 \text{ m} \Rightarrow V_{\text{pallone}} = \frac{\pi (2R_0)^3}{6} = \frac{8\pi}{6} [\text{m}^3]$

$$m_p = 2.4 \text{ kg}$$

$$m_g = 0.9 \text{ kg}$$

Legge di variazione della temperatura:

14

$$T(z) = T_0 - \alpha z$$

$$\text{con } T_0 = 293 \text{ K}, \alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m.}$$

Determinazione della legge di variazione della pressione in funzione dell'altezza da terra:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{RT(z)}{M} \Rightarrow \rho(z) = \frac{M p(z)}{RT(z)}$$

$$dp = -\rho(z) g dz \Rightarrow dp = -\frac{Mg}{R} \cdot \frac{p(z)}{T(z)} dz$$

Separando le variabili:

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{Mg}{R} \int_{z=0}^z \frac{dz}{T(z)} \quad \text{con } p_0 = p(z=0) = p_{\text{atm}}$$
$$\ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = \ln \left[ \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right] \cdot \left( -\frac{1}{\alpha} \right)$$

Quindi:

$$\ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = \left( \frac{Mg}{R\alpha} \right) \ln \left[ \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right]$$

$$(1) \quad p(z) = p_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\delta} \quad \text{"Soluz. letterale"}$$

$$p(z) = 101325 \left( \frac{293 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot z}{293} \right)^{\left( \frac{29 \cdot 9,81}{8314 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \right)} = 6,84$$

→

$$p(z) = 101325 (1 - 1.7065 \cdot 10^{-5} \cdot z)^{6,84}$$

$$\approx (5,4 - 9,2 \cdot z) \cdot 10^{-5} \text{!!}$$

soluz. "numerica"

Es. : se  $z = 20 \text{ km}$  allora  $p(z) \approx 5,9 \text{ kPa}$   
 se  $z = 0$  (terreno) allora  $p(z) \approx 102229 \text{ Pa} \approx 101325 \text{ Pa}$  ok!

L'altezza  $\bar{z}$  alla quale il pallone sonda si ferma e' determinabile impostando il bilancio di forze agenti sul pallone medesimo alla quota  $\bar{z}$  :

$$\vec{F}_{\text{Peso}} - \vec{F}_{\text{gale}} = \vec{0} \quad (2)$$

con  $\vec{F}_D = \vec{F}_T = 0$  poiche' il pallone si ferma se  $z = \bar{z}$ !

$$|\vec{F}_{\text{peso}}| = \rho_P V_P g + m_g g = (m_P + m_g) \cdot g \quad (3)$$

$$|\vec{F}_{\text{gale}}| = \rho V_P g \quad \text{con } \rho = \rho(z) \quad (4)$$

Strutturando l'eq. (1) :  $\rho(z) = \frac{M p(z)}{RT(z)} = \frac{M}{R} \cdot P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^\delta \cdot \frac{1}{T(z)}$

$$p(z) = \frac{M}{R} \cdot \frac{T_0}{T_0} \cdot P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^\delta \cdot \frac{1}{T_0 - \alpha z} = \frac{M P_0}{R T_0} \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\delta-1}$$

$$(5) \quad p(z) = P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\delta-1}$$

Legge di variaz. della densita' con la distanza da terra

quindi, il bilancio di forze (2) con le relazioni (3), (4) e (5) impone che sia:

$$(m_p + m_g)g = \rho_0 \cdot \left( \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} \right)^{\gamma-1} \cdot V_P g$$

$$\left( \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_P} \Rightarrow \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} = \left( \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_P} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{T_0}{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_P} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right]}$$

Soluz. "letterale"

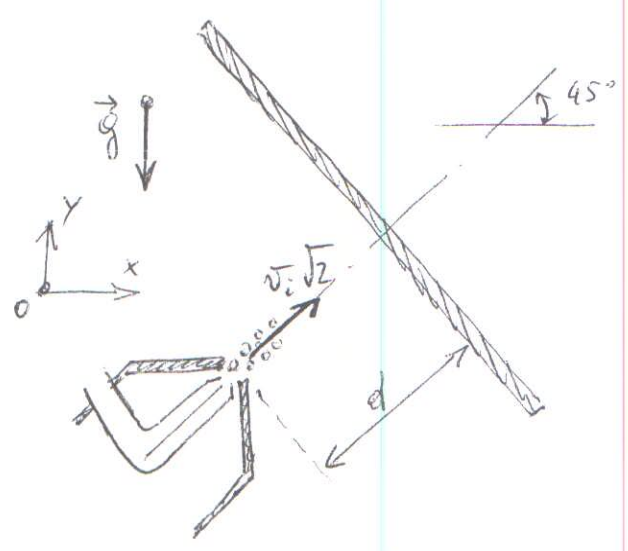
Sostituendo i valori numerici:

$$\boxed{\bar{z} = \frac{293}{5 \cdot 10^{-3}} \left[ 1 - \left( \frac{2.4 + 0.9}{1.206 \cdot \frac{8}{6} \pi} \right)^{\frac{1}{0.84-1}} \right]} \approx 4120.5 \text{ m}$$

Soluz. "numerica"

essendo:  $\rho_0 = \frac{M p_0}{R T_0} = \frac{29 \cdot 101325}{8314 \cdot 293} = 1,206 \text{ kg/m}^3$

EXE 3



$\rho_p > \rho_{\text{fluido}}$  !!

Si vuole studiare il moto di goccioline sferiche (diam.  $D_p$  [m]) di vernice spruzzate con vel. iniziale  $v_i$  contro una parete inclinata.

Hip: moto in regime di Stokes

Possiamo scomporre il moto della singola goccia nelle due direzioni  $x$  e  $y$ :

7

LUNGO  $x$ :  $\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p - \vec{F}_{g_{x}}$  ( $g_x = 0!$ )

$$m_p \frac{dV_{p,x}}{dt} = -3\pi\mu V_{p,x} \cdot D_p$$

essendo  $v_x = 0$  (fluido fermo) e  $V_{p,x}(t=0) = v_i$ .

$$\frac{dV_{p,x}}{dt} = -\frac{V_{p,x}}{\tau_p} \quad \text{con} \quad \tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \Rightarrow \int_{v_i}^{V_{p,x}(t)} \frac{dV_{p,x}}{V_{p,x}} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau_p}$$

$$V_{p,x}(t) = v_i e^{-t/\tau_p}$$

$$X_p(t) = \int_0^t v_{p,x}(t) dt = \int_0^t v_i \cdot e^{-t/\tau_p} dt = -v_i \tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t$$

$$X_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$

Evoluz. temporale della distanza coperta lungo  $x$

LUNGO  $y$ :  $\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p - \vec{F}_{g_y}$  ( $g_y = -g!$ )

$$m_p \frac{dV_{p,y}}{dt} = -3\pi\mu V_{p,y} \cdot D_p + \rho_p V_p g - \rho V_p g$$

essendo anche  $v_y = 0$  e  $V_{p,y}(t=0) = v_i$

$$\boxed{\frac{dV_{p,y}}{dt} = -\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g} \quad \text{Eq. di moto delle porce}$$

con  $\hat{\rho} \triangleq -(\rho_p - \rho_{fluido})/\rho_p < 0$  poiche  $\rho_p > \rho_{fluido}$ !

Risolvo per sostituzione:  $-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g = z$

$$-\frac{1}{\tau_p} dV_{p,y} = dz$$

$$\int_{V_{p,y}(t=0)=V_i}^{V_{p,y}(t)} \frac{dV_{p,y}}{-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{1}{\tau_p} \cdot \frac{dz}{z} = -\frac{1}{\tau_p} \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} =$$

$$= -\frac{1}{\tau_p} \ln \left( \frac{-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g}{-\frac{V_i}{\tau_p} + \hat{\rho}g} \right) = t \quad \uparrow \text{risultato di } \int_0^t dt$$

$$-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g = \left(-\frac{V_i}{\tau_p} + \hat{\rho}g\right) \cdot e^{-t/\tau_p} \Rightarrow \hat{\rho}g(1 - e^{-t/\tau_p}) + \frac{V_i}{\tau_p} e^{-t/\tau_p} = \frac{V_{p,y}}{\tau_p}$$

$$\boxed{V_{p,y}(t) = V_i e^{-t/\tau_p} + \hat{\rho}g\tau_p(1 - e^{-t/\tau_p})}$$

NB se  $t \rightarrow 0$  allora  $V_{p,y} \rightarrow V_i$   
 se  $t \rightarrow \infty$  allora  $V_{p,y} \rightarrow \hat{\rho}g\tau_p < 0$  poiche  $\hat{\rho} < 0$ !!

$$Y_p(t) = \int_0^t V_{p,y}(t) dt = -V_i\tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t + \hat{\rho}g\tau_p(t + \tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t)$$

$$Y_p(t) = v_i z_p (1 - e^{-t/\tau_p}) + \rho g z_p \left[ t - z_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \right]$$

Evoluz. temporale della distanza coperta lungo y

NB se  $t \rightarrow 0$  allora  $Y_p(t) \approx 0$

se  $t \rightarrow \infty$  allora  $Y_p(t) \rightarrow +\infty$

Ovviamente  $Y_{p,max} = d \cdot \sqrt{2}$  prima di impattare la parete.

Pertanto, il volo delle goccioline si interromperà ben prima che  $t \rightarrow \infty$ .

La stopping distance in direzione orizzontale  $x^-$ :

$$v_{p,x} = 0 \text{ se } t \rightarrow \infty \Rightarrow X_{p,max} = X_p(t \rightarrow \infty) = v_i z_p$$

Le goccioline raggiungono la parete sse  $v_i z_p > d$  !!

Il tempo  $t^*$  richiesto dalle goccioline per impattare alla parete  $x^-$ , per la sola direz. x:

$$X_p(t^*) = v_i z_p (1 - e^{-t^*/\tau_p}) = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow t^* = \tau_p \ln \left( \frac{v_i z_p}{v_i z_p - d/\sqrt{2}} \right)$$

La distanza percorsa dalle goccioline in tale tempo lungo la direz. y  $e^-$ :

$$Y_p(t^*) = v_i z_p \cdot \frac{d/\sqrt{2}}{v_i z_p} + \rho g z_p \left[ \tau_p \ln(\dots) - z_p \cdot \frac{d/\sqrt{2}}{v_i z_p} \right] = \dots$$