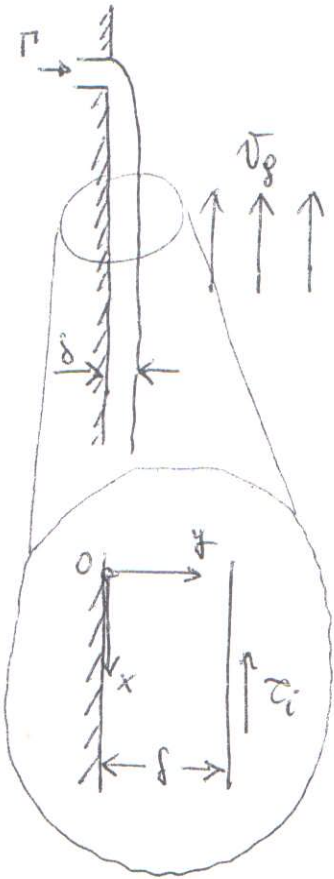


14/11/2008 - A.A. 2008/2009

EXE 1.

Il problema è assimilabile a quello di flusso di film su lastra piana verticale. Data la configurazione di flusso, si può adottare un sistema di riferimento cartesiano rispetto al quale semplificare le eq. di conservazione.



$$H_p: \frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0 \quad \text{STAZIONARIETA'}$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0 \quad \text{FLUSSO 2D (Linea di flusso nel piano x-y)}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_x(y) \neq 0 \\ v_y = v_z = 0 \end{array} \right\} \text{FLUSSO UNIDIREZ.}$$

$$\text{CONT. } \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{FLUSSO COMP. SVILUPPATO}$$

$$\text{NS}_x \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{con } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho g$$

$$\text{NS}_y \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow P = P(x)$$

$$\text{NS}_z \quad 0 = 0$$

$$\text{Dalla NS}_x: \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} (-\rho g) \Rightarrow \int^{\#1} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} (-\rho g) y + C_1$$

$$\int \#2 \Rightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g) y^2 + C_1 y + C_2$$

c.c. #1 :  $v_x(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

c.c. #2 :  $\tau_{xy}(y=\delta) = -\tau_i \Rightarrow \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = -\tau_i \Rightarrow$

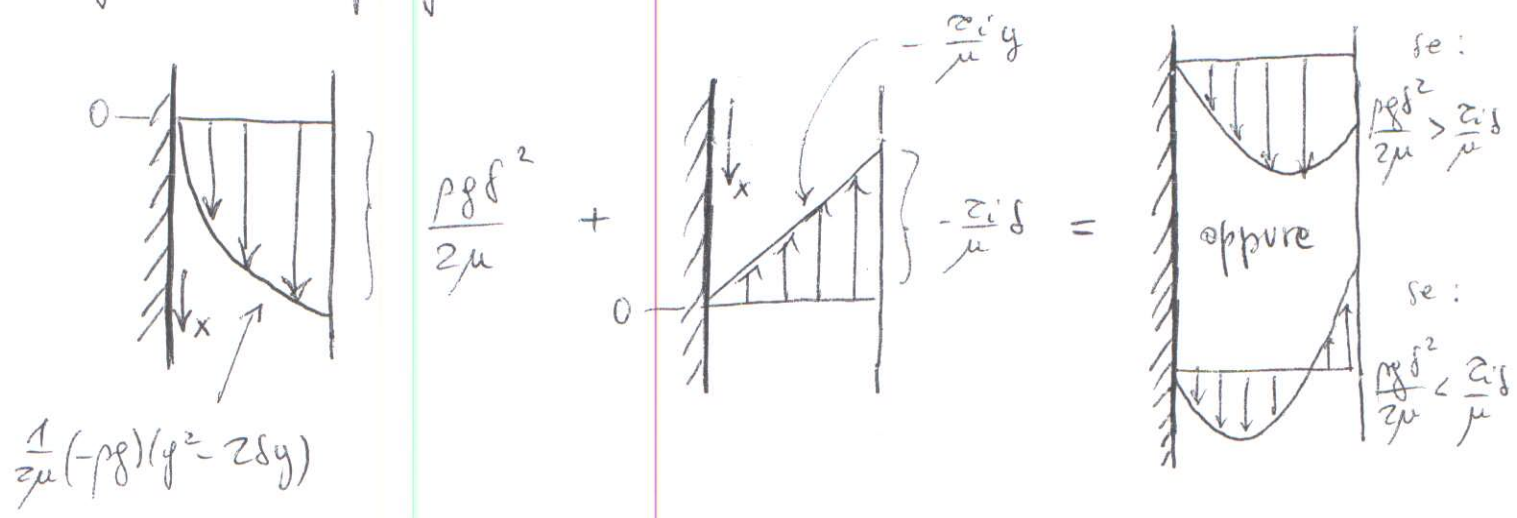
$$\Rightarrow -\rho g \delta + \mu C_1 = -\tau_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \delta}{\mu} - \frac{\tau_i}{\mu}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (-\rho g) (y^2 - 2\delta y) - \frac{\tau_i}{\mu} y$$



Grafico del profilo di velocità:



Affinché risulti nulla la portata netta trasportata e sufficiente che si annulli la velocità media del liquido all'interno del filare, ovvero:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_x(y) dy = 0$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{2\mu} (-\rho g) \int_0^\delta (y^2 - 2\delta y) dy - \frac{\tau_i}{\mu} \int_0^\delta y dy \right] \quad \boxed{3}$$

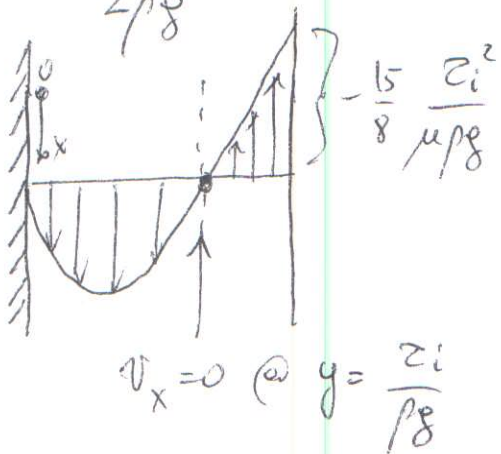
$$= \frac{-\rho g}{2\mu\delta} \left( \frac{\delta^3}{3} - \delta^3 \right) - \frac{\tau_i}{\mu} \frac{\delta^2}{2} \frac{1}{\delta} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} - \frac{\tau_i}{2\mu} \delta = 0!$$

Esprimendo in funzione di  $\delta$ :

$$\delta \left( \frac{\rho g}{3\mu} \delta - \frac{\tau_i}{2\mu} \right) = 0 \begin{cases} \rightarrow \delta = 0 \text{ (spessore del film nullo)} \\ \rightarrow \delta = \frac{3\tau_i}{2\rho g} \end{cases}$$

NOTA:

Se  $\delta = \frac{3\tau_i}{2\rho g}$  allora  $v_x(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} (\delta^2 - 2\delta y) - \frac{\tau_i}{\mu} y =$



$$= \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} - \frac{\tau_i \delta}{\mu} = \frac{\rho g}{2\mu} \frac{9\tau_i^2}{4\rho^2 g^2} - \frac{\tau_i}{\mu} \frac{3\tau_i}{\rho g}$$

$$= \frac{9}{8} \frac{\tau_i^2}{\mu \rho g} - \frac{3\tau_i^2}{\mu \rho g} = -\frac{15}{8} \frac{\tau_i^2}{\mu \rho g}$$

EXE 2:

Pallone sonda :  $R_0 = 1 \text{ m} \Rightarrow V_{\text{pallone}} = \frac{\pi (2R_0)^3}{6} = \frac{8\pi}{6} [\text{m}^3]$

$$m_p = 2.4 \text{ kg}$$

$$m_g = 0.9 \text{ kg}$$

Legge di variazione della temperatura:

14

$$T(z) = T_0 - \alpha z$$

con  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$ .

Determinazione della legge di variazione della pressione in funzione dell'altezza da terra:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{RT(z)}{M} \Rightarrow \rho(z) = \frac{M p(z)}{RT(z)}$$

$$dp = -\rho(z) g dz \Rightarrow dp = -\frac{Mg}{R} \cdot \frac{p(z)}{T(z)} dz$$

Separando le variabili:

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{Mg}{R} \int_{z=0}^z \frac{dz}{T(z)} \quad \text{con } p_0 = p(z=0) = p_{\text{atm}}$$
$$\ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = \ln \left[ \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right] \cdot \left( -\frac{1}{\alpha} \right)$$

Quindi:

$$\ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = \frac{Mg}{R\alpha} \ln \left[ \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right]$$

$$(1) \quad p(z) = p_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\alpha}} \quad \text{"Soluz. letterale"}$$

$$p(z) = 101325 \left( \frac{293 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot z}{293} \right)^{\frac{29 \cdot 9,81}{8314 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = 6,84$$



$$p(z) = 101325 (1 - 1.7065 \cdot 10^{-5} \cdot z)^{6,84}$$

$$\approx (5,4 - 9,2 \cdot z) \cdot 10^{-5} \text{!!}$$

soluz. "numerica"

Es. : se  $z = 20 \text{ km}$  allora  $p(z) \approx 5,9 \text{ kPa}$

se  $z = 0$  (terreno) allora  $p(z) \approx 102229 \text{ Pa} \approx 101325 \text{ Pa}$  ok!

L'altezza  $\bar{z}$  alla quale il pallone sonda si ferma e' deter-  
minabile impostando il bilancio di forze agenti sul  
pallone medesimo alla quota  $\bar{z}$  :

$$\vec{F}_{\text{Peso}} - \vec{F}_{\text{gale}} = \vec{0} \quad (2)$$

con  $\vec{F}_0 = \vec{F}_T = 0$  poiche' il pallone si ferma se  $z = \bar{z}$ !

$$|\vec{F}_{\text{peso}}| = \rho_P V_P g + m_g g = (m_P + m_g) \cdot g \quad (3)$$

$$|\vec{F}_{\text{gale}}| = \rho V_P g \quad \text{con } \rho = \rho(z) \quad (4)$$

Strutturando l'eq. (1) :  $\rho(z) = \frac{M p(z)}{RT(z)} = \frac{M}{R} \cdot P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^\delta \cdot \frac{1}{T(z)}$

$$\rho(z) = \frac{M}{R} \cdot \frac{T_0}{T_0} \cdot P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^\delta \cdot \frac{1}{T_0 - \alpha z} = \frac{M P_0}{R T_0} \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\delta-1}$$

$$(5) = P_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\delta-1}$$

Legge di variaz. della densita' con  
la distanza da terra

quindi, il bilancio di forze (2) con le relazioni  
(3), (4) e (5) impone che sia:

$$(m_p + m_g) g = \rho_0 \cdot \left( \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} \right)^{\gamma-1} \cdot V_p g$$

$$\left( \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_p} \Rightarrow \frac{T_0 - \alpha \bar{z}}{T_0} = \left( \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_p} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{T_0}{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{m_p + m_g}{\rho_0 V_p} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right]}$$

Soluz. "letterale"

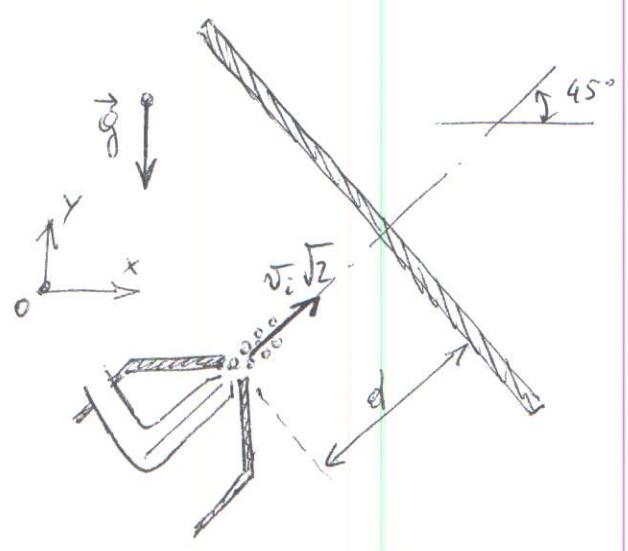
Sostituendo i valori numerici:

$$\boxed{\bar{z} = \frac{293}{5 \cdot 10^{-3}} \left[ 1 - \left( \frac{2.4 + 0.9}{1.206 \cdot \frac{8}{6} \pi} \right)^{\frac{1}{0.84-1}} \right]} \cong 4120.5 \text{ m}$$

Soluz. "numerica"

essendo:  $\rho_0 = \frac{M P_0}{R T_0} = \frac{29 \cdot 101325}{8314 \cdot 293} = 1,206 \text{ kg/m}^3$

EXE 3



$\rho_p > \rho_{\text{fluido}}$  !!

Si vuole studiare il moto di goccioline sferiche (diam.  $D_p$  [m]) di vernice spruzzate con vel. iniziale  $v_i$  contro una parete inclinata.

Hip: moto in regime di Stokes

Possiamo scomporre il moto della singola goccia nelle due direzioni  $x$  e  $y$ :

7

LUNGO  $x$ :  $\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p - \vec{F}_{g_{rel}}$  ( $g_x = 0!$ )

$$m_p \frac{dV_{p,x}}{dt} = -3\pi\mu V_{p,x} \cdot D_p$$

essendo  $u_x = 0$  (fluido fermo) e  $V_{p,x}(t=0) = v_i$ .

$$\frac{dV_{p,x}}{dt} = -\frac{V_{p,x}}{\tau_p} \quad \text{con} \quad \tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \Rightarrow \int_{v_i}^{V_{p,x}(t)} \frac{dV_{p,x}}{V_{p,x}} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau_p}$$

$$V_{p,x}(t) = v_i e^{-t/\tau_p}$$

$$X_p(t) = \int_0^t v_{p,x}(t) dt = \int_0^t v_i \cdot e^{-t/\tau_p} dt = -v_i \tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t$$

$$X_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$

Evoluz. temporale della distanza coperta lungo  $x$

LUNGO  $y$ :  $\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p - \vec{F}_{g_{rel}}$  ( $g_y = -g!$ )

↓

$$m_p \frac{dV_{p,y}}{dt} = -3\pi\mu V_{p,y} \cdot D_p + \rho_p V_p g - \rho V_p g$$

essendo anche  $u_y = 0$  e  $V_{p,y}(t=0) = v_i$

$$\frac{dV_{p,y}}{dt} = -\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g$$

Eq. di moto delle gocce

con  $\hat{\rho} \triangleq (\rho_p - \rho_{fluida})/\rho_p$

Risolvo per sostituzione:

$$-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g = z$$

$$-\frac{1}{\tau_p} dV_{p,y} = dz$$

$V_{p,y}(t)$

$$\frac{dV_{p,y}}{-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{1}{\tau_p} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{\tau_p} \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} =$$

$V_{p,y}(t=0) = V_i$

$$= -\frac{1}{\tau_p} \ln \left( \frac{-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g}{-\frac{V_i}{\tau_p} + \hat{\rho}g} \right) = t$$

↑ risultato di  $\int_0^t dt$

$$-\frac{V_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g = \left(-\frac{V_i}{\tau_p} + \hat{\rho}g\right) \cdot e^{-t/\tau_p} \Rightarrow \hat{\rho}g(1 - e^{-t/\tau_p}) + \frac{V_i}{\tau_p} e^{-t/\tau_p} = \frac{V_{p,y}}{\tau_p}$$

$$V_{p,y}(t) = V_i e^{-t/\tau_p} + \hat{\rho}g\tau_p(1 - e^{-t/\tau_p})$$

NB se  $t \rightarrow 0$  allora  $V_{p,y} \rightarrow V_i$

se  $t \rightarrow \infty$  allora  $V_{p,y} \rightarrow \hat{\rho}g\tau_p > 0$  poiche  $\hat{\rho} > 0$  !!

$$Y_p(t) = \int_0^t V_{p,y}(t) dt = -V_i\tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t + \hat{\rho}g\tau_p(t + \tau_p \cdot e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t)$$

$$Y_p(t) = v_i z_p (1 - e^{-t/z_p}) + \hat{\rho} g z_p \left[ t - z_p (1 - e^{-t/z_p}) \right]$$

Evoluz. temporale delle distanze coperte lungo y

NB se  $t \rightarrow 0$  allora  $Y_p(t) \approx 0$

se  $t \rightarrow \infty$  allora  $Y_p(t) \rightarrow +\infty$

Ovviamente  $X_{p,max} = d \cdot \sqrt{2}$  prima di impattare la parete.

Pertanto, il moto delle goccioline si interromperà ben prima che  $t \rightarrow \infty$ .

La stopping distance in direzione orizzontale è:

$$v_{p,x} = 0 \text{ se } t \rightarrow \infty \Rightarrow X_{p,max} = X_p(t \rightarrow \infty) = v_i z_p$$

Le goccioline raggiungono la parete sse  $v_i z_p > d$  !!

Il tempo  $t^*$  richiesto dalle goccioline per impattare alla parete  $e^-$ , per la sola direz. x:

$$X_p(t^*) = v_i z_p (1 - e^{-t^*/z_p}) = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow t^* = z_p \ln \left( \frac{v_i z_p}{v_i z_p - d/\sqrt{2}} \right)$$

La distanza percorsa dalle goccioline in tale tempo lungo la direz. y è:

$$Y_p(t^*) = v_i z_p \cdot \frac{d/\sqrt{2}}{v_i z_p} + \hat{\rho} g z_p \left[ z_p \ln(\dots) - z_p \cdot \frac{d/\sqrt{2}}{v_i z_p} \right] = \dots$$