FLUIDODINAMICA - AA 2008/2009

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

16 Gennaio 2009

1

Un condensatore piano è costituito da una lastra verticale di larghezza $W = 1\ m$ e lunghezza $L = 2\ m$ mantenuta a temperatura costante sulla quale condensa vapor d'acqua. Supponendo che lo spessore del film di condensa all'inizio della piastra ($x = 0$) sia nullo e che il vapore condensi con tasso costante $q = 0.002\ m/s$, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e Navier-Stokes per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate; [10%]
2. determinare il profilo di velocità nel film; [10%]
3. calcolare il valore dello spessore del film alla fine della lastra; [15%]
4. calcolare il tempo T impiegato dal fluido per percorrere la lastra verticale. [10%]

2

Si determini per il flussimetro schematicamente illustrato in figura ?? la relazione tra la portata Q e Δh. La densità del fluido in moto nel condotto sia ρ e la densità del fluido nel manometro sia ρ_m. Si trascurino le perdite viscose e siano note le sezioni A_1 e A_2 del condotto. [20%]

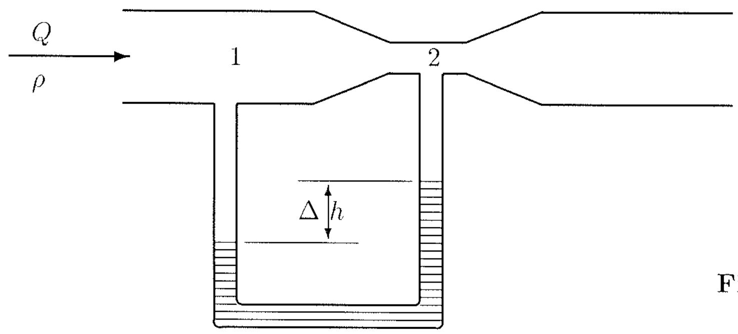


Figura 1 Schema del venturimetro.

3

L'impianto di raffreddamento di uno stabilimento industriale, rappresentato in Fig. 2, è costituito da un serbatoio A in pressione dal quale l'acqua viene inviata alle diverse utenze (B e C) dello stabilimento.

1. Determinare, nell'ipotesi di valvola V chiusa, la portata massica w_B [kg/s] che è possibile alimentare al serbatoio B se la pressione del gas nel serbatoio è pari a $p_0 = 1.163 \cdot 10^5\ Pa$. [10%]
2. Determinare, nell'ipotesi di valvola V aperta, quale deve essere la pressione del gas nel serbatoio per alimentare la portata w_B calcolata al punto precedente se in C deve arrivare una portata $w_C = 8\ kg/s$. [15%]
3. Determinare il diametro della tubazione nel tratto N-C. [10%]

Si considerino tubi commerciali ($f = 0.04 \cdot Re^{-0.16}$) ed i seguenti valori numerici: $p_{atm} = 101325\ Pa$, $h_A = 1\ m$, $h_C = 2\ m$, $D_{AB} = 0.1\ m$, $L_1 = 40\ m$, $L_2 = 160\ m$.

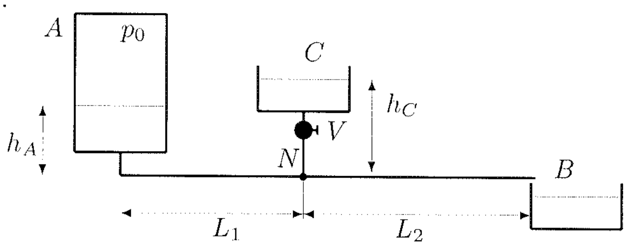


Figura 2 Impianto di raffreddamento.

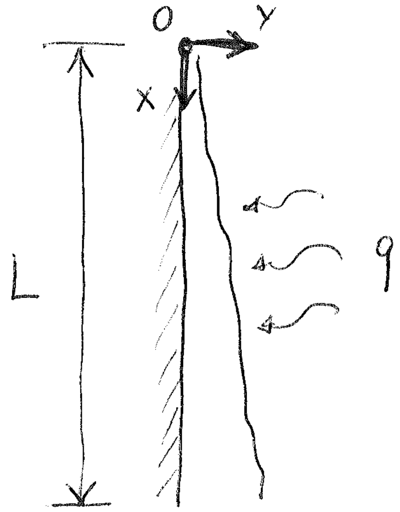
Continuità $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$ *Navier-Stokes* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Sforzo di taglio: $\tau_{i,j} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ *Legge di Stevino:* $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

16/01/09

II° PROVETTA AA 2008/2009

EXE 1



$L = 2\ m$

$W = 1\ m$

$q = 0.002\ m/s = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s}$

(1.1) $Re\,\frac{\delta(x)}{L} \ll 1$ (TH. LUBRIFICAZIONE)

$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$ (FLUSSO STAZ.)

$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$ (FLUSSO 2D)

CONT. $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS_y $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Rightarrow P = P(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g$

NS_z $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z}$

(1.2) $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\frac{\rho g}{\mu} \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} y + C_1$

$\Rightarrow v_x(x,y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$

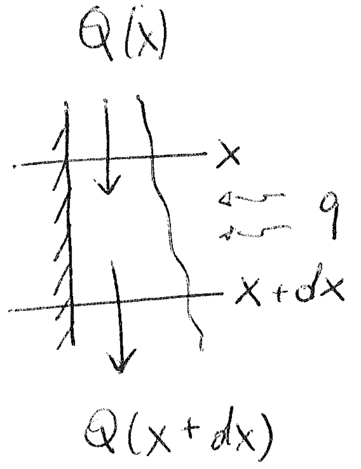
C.C. #1 : $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g}{\mu}\delta(x)$

$$\boxed{v_x(x,y) = -\frac{\rho g}{2\mu}\left(y^2 - 2\delta(x)\, y\right)}$$

1.3 $$Q(x) = \int v_x(x,y)\, dA = \int_0^W \int_0^{\delta(x)} -\frac{\rho g}{2\mu}\left(y^2 - 2\delta(x)\, y\right) dy\, dz$$

$$= -\frac{\rho g}{2\mu} W \left(\frac{\delta^3(x)}{3} - \delta^3(x)\right) = \frac{\rho g\, \delta^3(x)}{3\mu} W \quad (A)$$



$$Q(x) + q \cdot dx \cdot W = Q(x+dx)$$

$$\frac{Q(x+dx) - Q(x)}{dx} = q \cdot W$$

$$\frac{dQ}{dx} = q \cdot W \Rightarrow Q(x) = q \cdot W \cdot x \quad (B)$$

Uguagliando (A) e (B) si trova:

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt[3]{\frac{3\mu q \cdot x}{\rho g}}}$$

Alla fine della piastra $(x = L)$: $\delta(x=L) = \sqrt[3]{\frac{3\mu q L}{\rho g}}$

Valore numerico:

$$\delta(x=L) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{10^{3} \cdot 9{,}81}} = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\,m = 1{,}07\,mm$$

1.4

$$dx = \langle v_x(x,y) \rangle \, dt$$

$$dx = \left[\frac{1}{\delta(x)} \int_0^y v_x(x,y)\,dy \right] dt$$

$$dx = \frac{1}{\cancel{\delta(x)}} \left[-\frac{\rho g}{2\mu} \left(-\frac{2}{3} \delta^{\cancel{3}\,2}(x) \right) \right] dt = \frac{\rho g}{3\mu} \left(\frac{3\mu q x}{\rho g} \right)^{2/3} dt$$

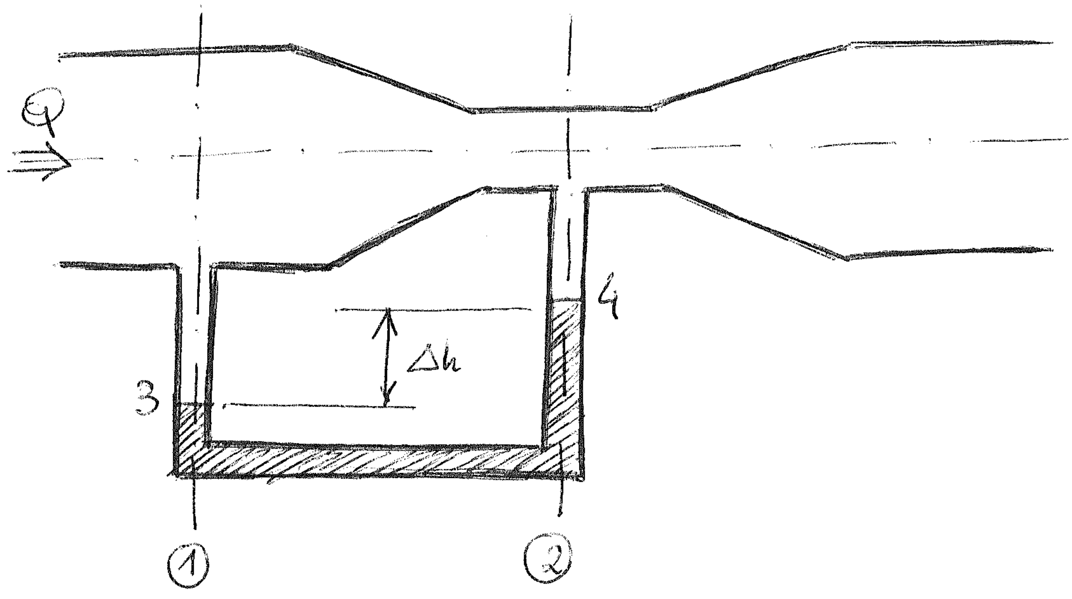
$$dx = \left(\frac{\rho g}{3\mu} \right)^{1/3} x^{2/3} q^{2/3} \, dt$$

$$\underbrace{\int_0^L x^{-2/3}\,dx}_{3x^{1/3}\big|_0^L = 3L^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{\rho g q^2}{3\mu}} \int_0^T dt \Rightarrow \boxed{T = 3\sqrt[3]{\frac{3\mu L}{\rho g q^2}}}$$

Valore numerico: $T = 3\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{10^{3} \cdot 9{,}81 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}} \cong 1{,}6$ sec.

EXE 2

$\Longrightarrow$



CONTINUITA' : $Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow \langle v_1 \rangle A_1 = \langle v_2 \rangle A_2$

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \frac{A_2}{A_1}$$

BERNOULLI : $\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + \cancel{g h_1} + \cancel{W_s}^{\to 0} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + \cancel{g h_2} + \cancel{l_v}$

trase.

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2$$
$$= \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

Dalla statica : $P_1 = P_3 - \rho g (h_1 - h_3)$

$$= P_4 + \rho_m g \Delta h - \rho g (h_1 - h_3)$$
$$= P_2 + \rho g (\cancel{h_2} - h_4) + \rho_m g \Delta h - \rho g (\cancel{h_1} - h_3)$$
$$= P_2 + \rho_m g \Delta h + \rho g \underbrace{(h_3 - h_4)}_{-\Delta h}$$

5

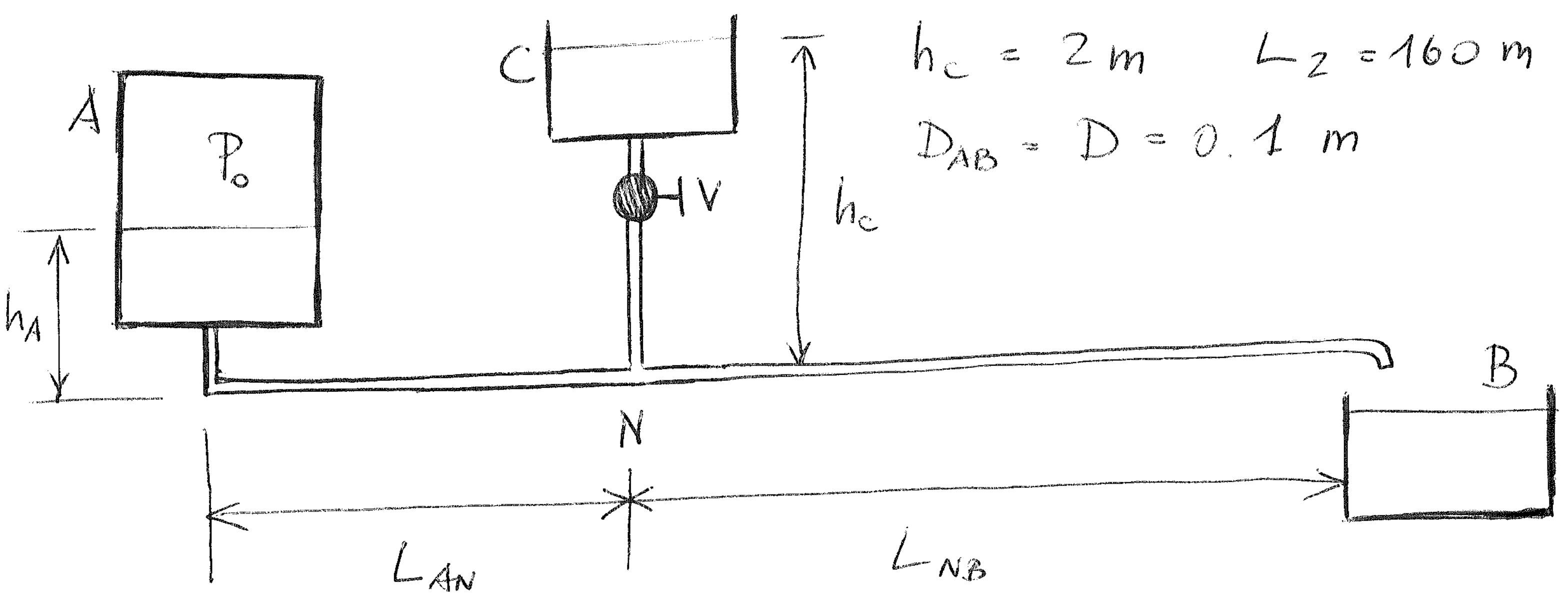
$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h \quad + \quad Q_2 = \langle v_2 \rangle A_2$$

$$\frac{(\rho_m - \rho) g \Delta h}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{A_2^2} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

$$Q_2 = Q = \sqrt{\frac{2 A_2^2 (\rho_m - \rho) g \Delta h}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{2 A_1^2 A_2^2 (\rho_m - \rho) g \Delta h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}}$$

EXE 3



$h_A = 1\ m \qquad L_1 = 40\ m$

$h_c = 2\ m \qquad L_2 = 160\ m$

$D_{AB} = D = 0.1\ m$

(3.1) Valvola V chiusa : $\dot{m}_B = ?$ se $P_0 = 1{,}163 \cdot 10^5\ Pa$

$$B_{AB} : \frac{1}{2} v_A^2 + g h_A + \frac{P_A}{\rho} + w_s = \frac{1}{2} v_B^2 + g h_B + \frac{P_B}{\rho} + l v_{AB}$$

$v_A = v_B = 0 \quad m/s$

$P_A = P_0 \quad ; \quad P_B = P_{atm}$

$h_B = 0 \quad m \quad ; \quad W_s = 0$

$$l_{v_{AB}} = 2 f_{AB} v_{AB}^2 \frac{L_{AB}}{D} = 0{,}08 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.16} v_{AB}^{1.84} \frac{L_{AB}}{D^{1.16}}$$

$$\Rightarrow l_{v_{AB}} = \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho} + g h_A = \frac{1{,}163 \cdot 10^5 - 101325}{10^3} + 9{,}81 \cdot 1 = 24{,}785 \frac{m^2}{s^2}$$

$$v_{AB} = \left[\frac{l_{v_{AB}} \cdot D^{1{,}16}}{0{,}08 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}16} L_{AB}}\right]^{\frac{1}{1{,}84}} = \left[\frac{24{,}785 \cdot (0{,}1)^{1.16}}{0{,}08 \, (10^6)^{-0{,}16} \cdot 200}\right]^{\frac{1}{1.84}} = 0{,}98765 \ m/s$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{AB} = \rho v_{AB} \frac{\pi D_{AB}^2}{4} = 10^3 \cdot 0{,}98765 \frac{\pi \, 10^{-2}}{4}$$

$$\boxed{\dot{m}_{AB} = 7{,}757 \ kg/s}$$

3.2 Valvola V aperta : $P_0 = ?$ se $\dot{m}_{NC} = 8 \ kg/s$

Dal bilancio di conservazione della massa al nodo N:

$$\dot m_{AN} = \dot m_{NC} + \dot m_{NB} = 8 + 7{,}757 = 15{,}757\ kg/s$$ 7

$$v_{AN} = \frac{4\dot m_{AN}}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \cdot 15{,}757}{10^3 \cdot \pi \cdot 10^{-2}} \cong 2\ m/s$$

$$v_{NB} = \frac{4 \dot m_{NB}}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \cdot 8}{10^3 \pi \cdot 10^{-2}} \cong 1{,}02\ m/s$$

$$v_{NC} = (v_{AN} - v_{NB}) \frac{D_{AB}^2}{D_{NC}^2} \cong 9{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot D_{NC}^{-2}$$

Per calcolare P_0 possiamo applicare Bernoulli tra A ed N:

$$B_{AN}: \cancel{\frac{1}{2} v_A^2}^{\simeq 0} + \frac{P_0}{\rho} + g h_A + \cancel{w_s}^{\simeq 0} = \frac{1}{2} v_{AN}^2 + \cancel{g h_N}^{\simeq 0} + \frac{P_N}{\rho} + l\, N_{AN}$$

$$P_0 = P_N + \frac{1}{2}\rho v_{AN}^2 - \rho g h_A + \rho l v_{AN}$$

$$\overset{!}{=} P_N + \frac{1}{2}\rho v_{AN}^2 - \rho g h_A + 0{,}08\, \rho \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}16} v_{AN}^{1{,}84} \frac{L_{AN}}{D^{1{,}16}}$$

$$= P_N + \frac{1}{2} 10^3 (2)^2 - 10^3\ 9{,}81 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 10^3 (10^6)^{-0{,}16} \cdot (2)^{1{,}84} \cdot \frac{(40+1)}{(0{,}1)^{1{,}16}}$$

$$= P_N + 2 \cdot 10^3 - 9{,}81 \cdot 10^3 + 18{,}61 \cdot 10^3$$

$$= P_N + 10{,}8 \cdot 10^3\ [Pa]$$

$$\Downarrow$$

???

$$B_{NB} : \frac{1}{2} v_{NB}^2 + \frac{P_N}{\rho} + \cancel{g h_N} + \cancel{w_s}^{=0} = \cancel{\frac{1}{2} v_B^2}^{=0} + \frac{P_{atm}}{\rho} + \cancel{g h_B} + l v_{NB}$$

$$P_N = P_{atm} - \frac{1}{2} \rho v_{NB}^2 + 0{,}08 \rho \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.16} v_{NB}^{1,84} \frac{L_{NB}}{D^{1,16}}$$

$$= 101325 - \underbrace{\frac{1}{2} 10^3 (1{,}02)^2}_{520.2} + \underbrace{0{,}08 \cdot 10^3 (10^6)^{-0.16} (1{,}02)^{1,84}}_{21{,}04 \cdot 10^3} \cdot \frac{160}{(0{,}1)^{1,16}}$$

$$\simeq 121844{,}25 \text{ Pa} \cong 121{,}84 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Avendo P_N è possibile calcolare P_0:

$$P_0 = 121{,}84 \cdot 10^3 + 10{,}8 \cdot 10^3 = 132{,}64 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$\boxed{P_0 \cong 1{,}33 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

3.3 Calcolo di D_{NC}

$$B_{NC} : \cancel{\frac{1}{2} v_{NC}^2}^{\text{trasc.}} + \cancel{g h_N}^{=0} + \frac{P_N}{\rho} + \cancel{w_s}^{=0} = \cancel{\frac{1}{2} v_C^2}^{=0} + g h_C + \frac{P_{atm}}{\rho} + l v_{NC}$$

$$l v_{NC} = \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} - g h_C = \frac{121844 - 101325}{10^3} - 9{,}81 \cdot 2$$

$$= 0{,}899 \ \frac{m^2}{s^2}$$

$$l v_{NC} = 0{,}08 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,16} v_{NC}^{1,84} \frac{L_{NC}}{D_{NC}^{1,16}}$$

$v_{NC} \Downarrow$??? $D_{NC} \Downarrow$???

Dalla continuità al nodo N:

$$v_{NC} \cong 9{,}8 \cdot 10^{-3}\, D_{NC}^{-2} \Rightarrow l v_{NC} = 0{,}08 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}16} \left(9{,}8 \cdot 10^{-3} D_{NC}^{-2}\right)^{1{,}84} \frac{L_{NC}}{D_{NC}^{1{,}16}}$$

$$= 1{,}61 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}16} L_{NC} \cdot D_{NC}^{-4{,}84}$$

Quindi:

$$D_{NC} = \left[1{,}61 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}16} \frac{L_{NC}}{l v_{NC}}\right]^{\frac{1}{4{,}84}}$$

Valore numerico:

$$D_{NC} = \left[1{,}61 \cdot 10^{-5} \left(10^{6}\right)^{-0{,}16} \frac{2}{0{,}899}\right]^{0{,}2066}$$

$$\cong 0{,}076\ m \Longrightarrow \boxed{D_{NC} \cong 7{,}7\ cm}$$