

1

Il serbatoio a sezione quadrata (avente altezza H e larghezza L note) rappresentato in Fig. 1 contiene olio (densità ρ_o) per due terzi del volume e gas (densità ρ_g) per un terzo del volume.

1. Supponendo note le quote h_1 ed h_2 nel manometro ad U ed indicando con ρ_m la densità del mercurio, determinare la pressione del gas nel serbatoio. [5%]
2. Tracciare graficamente l'andamento della pressione lungo la parete laterale interna del serbatoio. [5%]
3. Determinare la forza di pressione agente su ciascuna parete laterale del serbatoio. [10%]

2

Un precipitatore a gravità viene utilizzato per separare particelle di cenere (densità ρ_p) da un flusso di fumi gassosi (densità $\rho \ll \rho_p$). Le particelle si muovono in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$). Con riferimento allo schema di precipitatore riportato in Fig. 2 e sapendo che la velocità dei fumi è pari a $u_x(y) = \frac{U}{H}y$ (con U e H noti) si chiede di:

1. derivare un'espressione che descriva l'evoluzione temporale della velocità delle particelle in ciascuna delle due direzioni di moto: $v_{p,x}(t)$ lungo x e $v_{p,y}(t)$ lungo y , [15%]
2. derivare un'espressione che descriva l'evoluzione temporale della distanza coperta dalle particelle in ciascuna delle due direzioni di moto: $x_p(t)$ lungo x e $y_p(t)$ lungo y , [15%]
3. derivare un'espressione per la distanza L percorsa orizzontalmente da una particella P avente velocità iniziale nulla che attraversa la sezione di ingresso del precipitatore nel punto di coord. $x_i = x_p(t=0) = 0$; $y_i = y_p(t=0) = H/2$. *Suggerimento:* ipotizzare che la distanza L venga coperta in un tempo $t \gg \tau_p$. [10%]

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella: $Re_p = \frac{\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|D_p}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$

3

Il *wire coating* è un processo utilizzato per la lavorazione industriale dei fili metallici. Il processo, schematizzato in Fig. 3, consiste nel far passare il filo attraverso un bagno di materiale plastico mantenuto allo stato liquido: in tal modo, sul filo (estratto dal bagno a velocità costante, U) viene a formarsi un sottile strato di rivestimento. Indicati con R_w il raggio del filo da rivestire, con R_d il raggio del canale di estrazione del filo (avente quindi sezione circolare) e con R_c il raggio finale del filo rivestito, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame, enunciando chiaramente le ipotesi semplificative adottate, [5%]
2. determinare l'espressione del profilo di velocità del liquido all'interno del canale di estrazione (di lunghezza L), [15%]
3. calcolare l'espressione del raggio finale R_c del filo rivestito in funzione di R_w ed R_d . [15%]

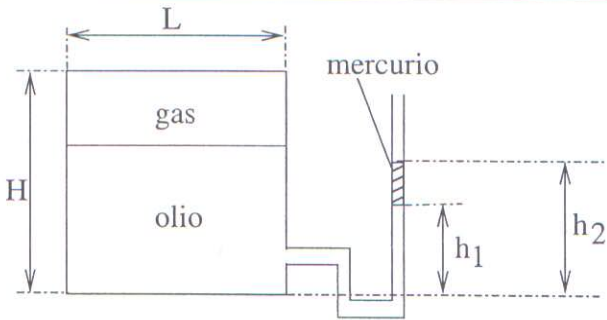


Fig. 1 Serbatoio con manometro

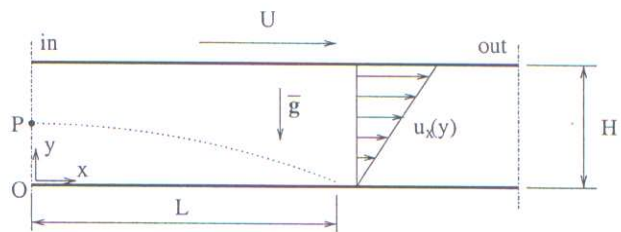


Fig. 2 precipitatore a gravità

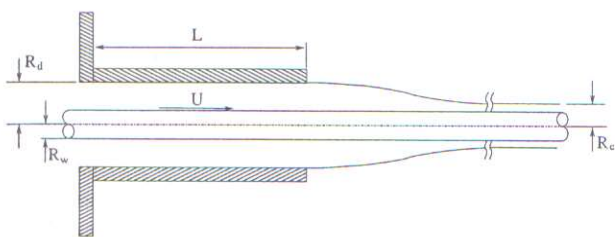
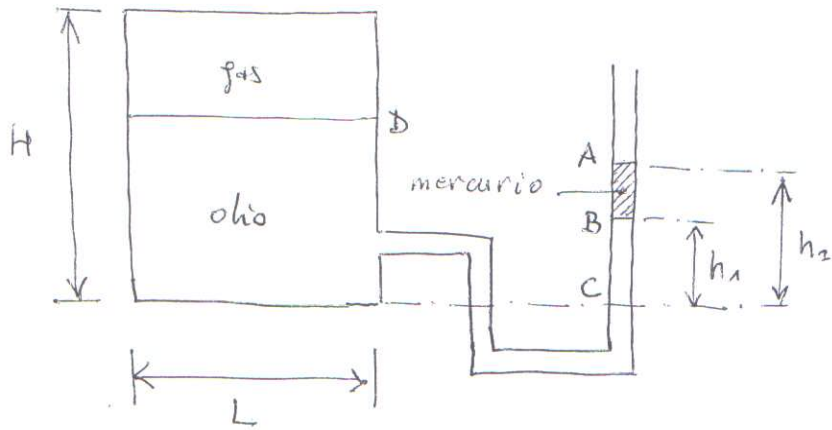


Fig. 3 Wire coating

Continuità: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0$

NS (coord. z): $\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$

NS (coord. r): $\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right]$



Sevatoio : $V_{\text{tot}} = H \cdot L^2$

Gas : densità ρ_g

$V_g = \frac{1}{3} HL^2$

Olio : densità ρ_o

$V_o = \frac{2}{3} HL^2$

Calcolo della pressione del gas nel serbatoio:

$P_A = P_{\text{atm}} \Rightarrow P_B = P_{\text{atm}} + \rho_m g (h_2 - h_1) \Rightarrow P_C = P_B + \rho_o g h_1$

P_C è anche la pressione dell'olio sul fondo del serbatoio.

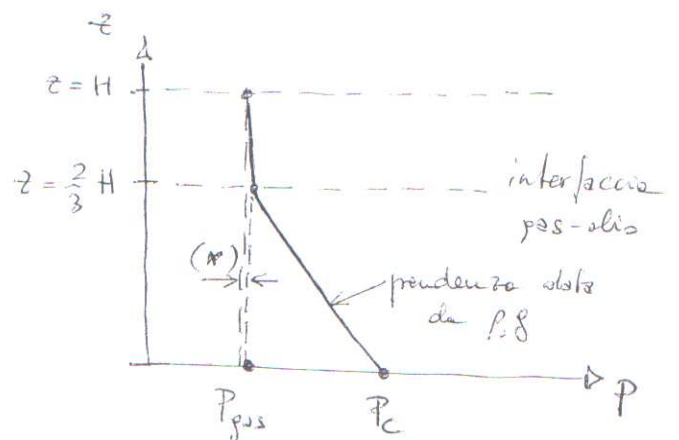
Quindi:

$P_{\text{gas}} = P_D = P_C - \rho_o g \cdot \frac{2}{3} H$

$\hookrightarrow P_{\text{gas}} = P_{\text{atm}} + \rho_m g (h_2 - h_1) + \rho_o g h_1 - \rho_o g \frac{2}{3} H$

$P_{\text{gas}} = P_{\text{atm}} + g \left[\rho_m (h_2 - h_1) + \rho_o \left(h_1 - \frac{2}{3} H \right) \right]$

Grafico della pressione lungo la parete laterale del serbatoio:
 l'incremento (*) di pressione all'interno del gas è praticamente trascurabile ($\rho_{\text{gas}} \ll \rho_{\text{olio}}$)



Calcolo della forza di pressione:

A) nel gas ($P_{\text{gas}} \cong \text{costante}$): $F_g = P_{\text{gas}} \cdot A = P_{\text{gas}} \cdot \frac{HL}{3}$

B) nell'olio (pressione varia linearmente):

1.2

$$F_o = \int dF_o = \int_{dA} p(z) dA = \int_0^{\frac{2}{3}H} (P_c - \rho_o g z) W dz = \frac{2}{3} P_c \cdot WH - \rho_o g W \int_0^{\frac{2}{3}H} z dz$$

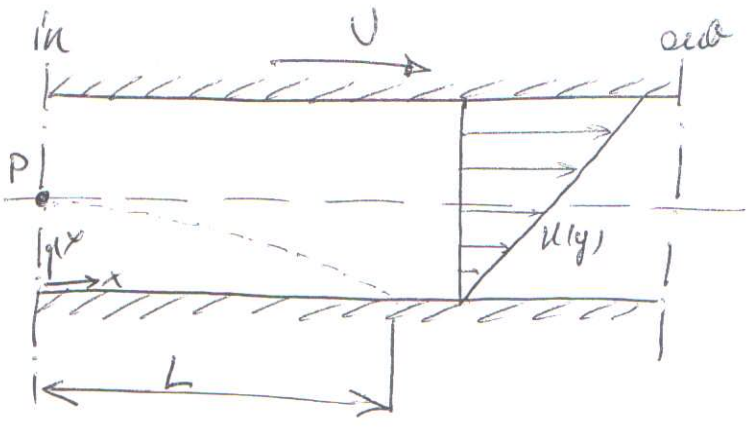
$\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\frac{2}{3}H} = \frac{2}{9} H^2$

$$F_o = \frac{2}{3} P_c WH - \frac{2}{9} \rho_o g WH^2$$

Volendo calcolare l'integrale "dall'alto verso il basso":

$$\begin{aligned} F_o &= \int dF_o = \int_{dA} p(z) dA = \int_0^{\frac{2}{3}H} (P_{gas} + \rho_o g z) W dz = \frac{2}{3} P_{gas} WH + \frac{2}{9} \rho_o g WH^2 \\ &= \frac{2}{3} (P_c - \rho_o g \frac{2}{3} H) \cdot WH + \frac{2}{9} \rho_o g WH^2 \\ &= \frac{2}{3} P_c \cdot WH - \frac{4}{9} \rho_o g WH^2 + \frac{2}{9} \rho_o g WH^2 \\ &= \frac{2}{3} P_c WH - \frac{2}{9} \rho_o g WH^2 \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

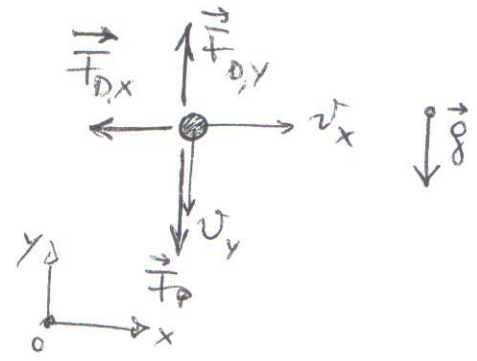
EXE 2



$P(0, H/2)$
 $\uparrow \quad \nwarrow$
 $X_i \equiv X_p(t=0) \quad Y_p(t=0) \equiv y_i$

1. Calcolo comp. di vel. della particella, v_x e v_y :

Bilancio di forze: $\vec{F}_F = \vec{F}_D + \vec{F}_p - \vec{F}_{pelle}$



Lungo x: $\int_x = 0 \Rightarrow \vec{F}_{p,x} = \vec{F}_{pelle,x} = 0$
 $\Rightarrow \vec{F}_{F,x} = \vec{F}_{D,x}$

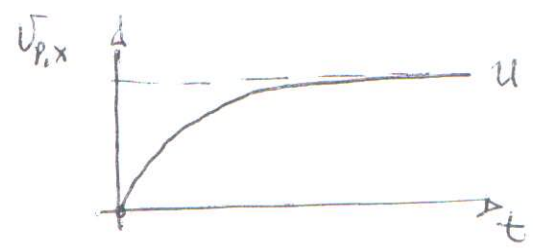
$m_p \frac{d\vec{v}_{p,x}}{dt} = + 3\pi\mu \vec{v}_{p,x}^{rel} D_p$ con $\vec{v}_{p,x}^{rel} = u - v_{p,x}$

$\frac{dv_{p,x}}{dt} = + \frac{v_{p,x}^{rel}}{\tau_p}$ con $\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$

N.B.: $\vec{u} = (u, 0) !!$

Integrando: $\int_{v_{p,x}(t=0)}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}^{rel}} = + \frac{1}{\tau_p} \int_0^t dt \Rightarrow v_{p,x}(t) = u(1 - e^{-t/\tau_p})$

$-\ln[u - v_{p,x}(t)] \Big|_{v_{p,x}(t=0)=0}^{v_{p,x}(t)}$

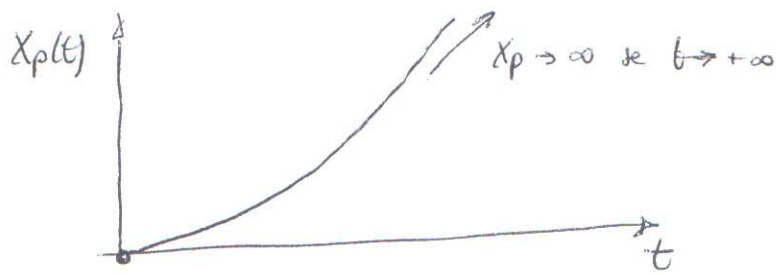


$X_p(t) = \int_0^t v_{p,x}(t) dt = u \int_0^t (1 - e^{-t/\tau_p}) dt = u [t - \tau_p(1 - e^{-t/\tau_p})]$

In realtà, questo deriva da: $\int_{X_p(t=0)=0}^{X_p(t)} dX_p = X_p(t) - X_p(t=0) = 0 !!$

Quindi:

$$x_p(t) = u \left[t - \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \right]$$



Lungo y:

$$g_y = -g \Rightarrow \vec{F}_{F,y} = \vec{F}_{D,y} + \vec{F}_{P,y} - \vec{F}_{mg,y}$$

($u_y = 0!$)

$$m_p \frac{d\vec{v}_{P,y}}{dt} = -3\pi\mu v_{P,y} \tau_p + (\rho - \rho_f)g V_p$$

$$\frac{dv_{P,y}}{dt} = -\frac{v_{P,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g$$

con $\hat{\rho} = \frac{\rho - \rho_f}{\rho_f}$
($\hat{\rho} \leq 0$)

Integrando:

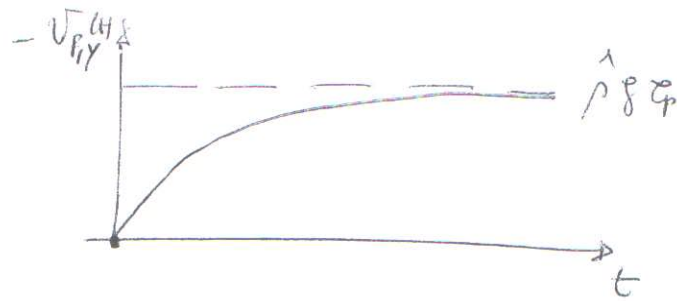
$$-\frac{v_{P,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g = z \Rightarrow -\frac{1}{\tau_p} dv_{P,y} = dz$$

$$\int_{v_{P,y}(t=0)}^{v_{P,y}(t)} \frac{dv_{P,y}}{-\frac{v_{P,y}}{\tau_p} + \hat{\rho}g} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{1}{\tau_p} \cdot \frac{dz}{z} = -\frac{1}{\tau_p} \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} =$$

$$= -\frac{1}{\tau_p} \ln \left[\frac{-\frac{v_{P,y}(t)}{\tau_p} + \hat{\rho}g}{-\frac{v_{P,y}(t=0)}{\tau_p} + \hat{\rho}g} \right] \equiv \int_0^t dt = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{v_{P,y}(t)}{\tau_p} + \hat{\rho}g = \hat{\rho}g \cdot e^{-t/\tau_p}$$

$$v_{P,y}(t) = \hat{\rho}g\tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$



$$\int_{y_p(t=0)}^{y_p(t)} dy_p(t) = \int_0^t v_{p,y}(t) dt \Rightarrow y_p(t) = \underbrace{y_p(t=0)}_{y_i} + \hat{\rho} g \tau_p \int_0^t (1 - e^{-t/\tau_p}) dt$$

$$y_p(t) = \frac{H}{2} + \hat{\rho} g \tau_p \left[t - \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \right]$$

La particella che parte dal punto $(0, H/2)$ impatta alla parete inferiore, posta alla cavat. $y_p=0$. Il tempo t^* necessario per tale impatto è:

$$0 = \frac{H}{2} + \hat{\rho} g \tau_p \left[t - \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \right] \quad (1)$$

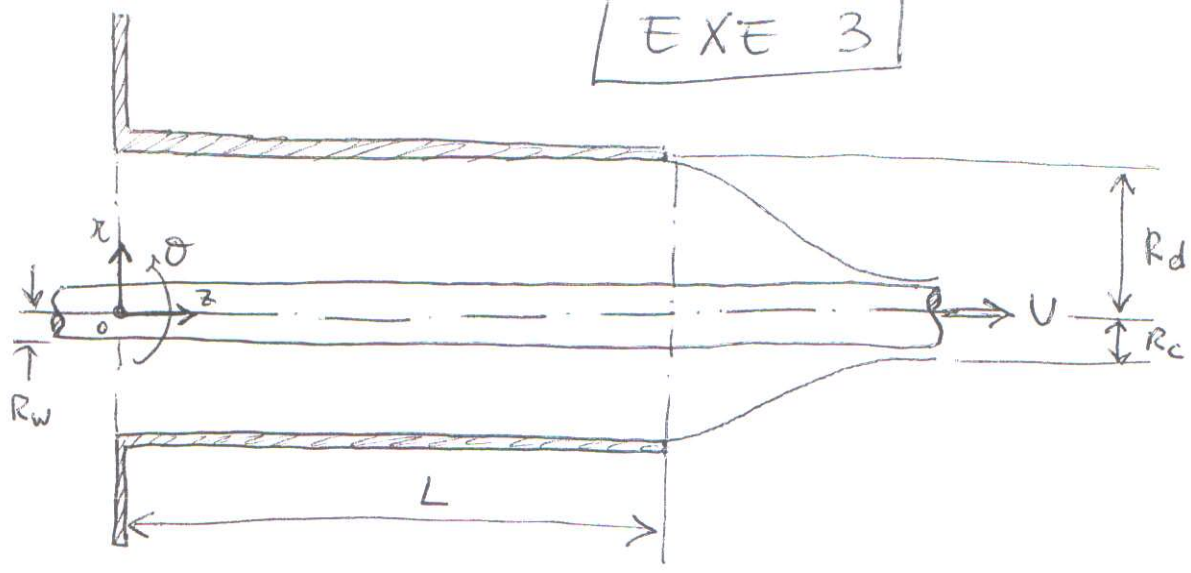
Nell'ipotesi che $t^* \gg \tau_p$ si ha: $e^{-t^*/\tau_p} \rightarrow 0$
 $t^* - \tau_p (1 - e^{-t^*/\tau_p}) \simeq t^*$

ovvero la (1) diventa: $0 = \frac{H}{2} + \hat{\rho} g \tau_p \cdot t^* \Rightarrow t^* = -\frac{H}{2\hat{\rho} g \tau_p}$

$$t^* = \frac{H \cdot \rho_p}{2(\rho_p - \rho) g \tau_p}$$

ovvero: $t^* = \frac{H \cdot \rho_p}{2(\rho_p - \rho) \cdot g \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}} \Rightarrow t^* = \frac{9\mu H}{2(\rho_p - \rho) g D_p^2}$

EXE 3



$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (flusso stazionario)

$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ (x simmetria)

$v_z(r) \neq 0$
(flusso unidirezionale)

$v_r = v_\theta = 0$

CONTINUITA': $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \rho \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \rho \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (*)

NS_z: $\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$
 $= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$

$0 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$

NS_r: (già semplificata)

$0 = - \frac{\partial p}{\partial r}$

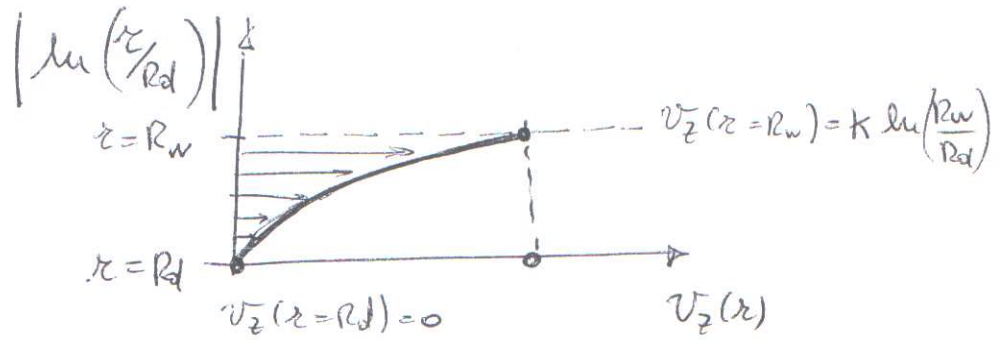
NS_θ: $0 = 0$

Il profilo di velocità ha dunque la forma :

3.3

$$v_z(r) = K \cdot \ln\left(\frac{r}{R_d}\right)$$

con $k = \frac{U}{\ln(R_w/R_d)}$



Calcolo dello sforzo di taglio :

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) =$$

$$\downarrow \frac{\mu U}{\ln(R_w/R_d)} \cdot \frac{2}{\partial r} \left[\ln\left(\frac{r}{R_d}\right) \right]$$

$$\frac{2}{\partial r} \ln r - \frac{2}{\partial r} \ln R_d$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{\mu U}{\ln(R_w/R_d)} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \tau_{rz} = K \cdot \frac{1}{r}$$

Calcolo della portata :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_w}^{R_d} v_z(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{R_w}^{R_d} K \ln\left(\frac{r}{R_d}\right) r dr$$

$$= 2\pi K \int_{R_w}^{R_d} \ln\left(\frac{r}{R_d}\right) r dr$$

Risolviamo l'integrale per sostituzione:

3.4

$$\frac{r}{R_d} = z \rightarrow dr = R_d dz \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \ln z \cdot (R_d \cdot z) \cdot (R_d dz) =$$

$$= R_d^2 \int_{z_1}^{z_2} (\ln z \cdot z) dz = R_d^2 \left(\ln z \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{z} dz \right)$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = \ln z \rightarrow du = \frac{1}{z} dz$$

$$dv = z dz \rightarrow v = \frac{z^2}{2}$$

$$= R_d^2 \left[\ln\left(\frac{r}{R_d}\right) \cdot \left(\frac{r}{R_d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \Big|_{R_w}^{R_d} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \Big|_{R_w}^{R_d} \right]$$

$$= R_d^2 \left[\underbrace{\ln\left(\frac{R_d}{R_d}\right) \cdot \left(\frac{R_d}{R_d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}_{=0} - \ln\left(\frac{R_w}{R_d}\right) \cdot \left(\frac{R_w}{R_d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{R_d}{R_d}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_w}{R_d}\right)^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} R_w^2 \ln\left(\frac{R_w}{R_d}\right) - \frac{1}{4} R_d^2 + \frac{1}{4} R_w^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi U}{\ln\left(\frac{R_w}{R_d}\right)} \left[-\frac{1}{2} R_w^2 \ln\left(\frac{R_w}{R_d}\right) + \frac{1}{4} (R_w^2 - R_d^2) \right]$$

$$= \frac{2\pi U}{4} \left[\frac{(R_w^2 - R_d^2)}{\ln(R_w/R_d)} - 2R_w^2 \right]$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \left[\frac{R_w^2 - R_d^2}{\ln(R_w/R_d)} - 2R_w^2 \right] U$$

Per calcolare il raggio R_c che caratterizza lo spessore 3.5 del rivestimento alla fine del processo basta esprimere in maniera alternativa la portata volumetrica Q :

$$Q = U \cdot \pi (R_c^2 - R_w^2)$$

Uguagliando le due espressioni per Q si trova:

$$U \pi (R_c^2 - R_w^2) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{R_w^2 - R_d^2}{\ln(R_w/R_d)} - 2R_w^2 \right] U$$

$$\left| \frac{\pi}{2} \frac{R_w^2 - R_d^2}{\ln(R_w/R_d)} \right| - \cancel{U \pi R_w^2}$$

$$\Rightarrow R_c = \sqrt{\frac{R_w^2 - R_d^2}{2 \ln(R_w/R_d)}} \equiv R_c = \sqrt{\frac{R_d^2 - R_w^2}{2 \ln(R_w/R_d)}}$$

NOTA SUL PROFILO DI VELOCITÀ: all'interno del canale di estrazione il profilo di velocità $v_z(r)$ è quello ricavato a pag. 3.3. Una volta che il filo viene estratto dal canale però, tale profilo cambia in quanto l'interfaccia del rivestimento non coincide più con la parete solida del canale bensì viene a trovarsi a contatto con l'aria. Le velocità $v_z(r)$ all'interfaccia non è più uguale a zero a causa della condizione di non scorrimento, bensì tende al valore U (ed il profilo tende a diventare piatto). Questo succede perché

l'aria con cui l'interfaccia (localizzata ad $x = R_c$) viene a contatto non è in grado di esercitare un'azione "frenante" significativa, ovvero non è in grado di produrre uno sforzo di taglio τ ; in grado di contrastare l'aumento di velocità nel fluido.

Alla fine del processo di WIRE COATING, quindi, quello che si osserva è un aumento della velocità media $\langle v_z \rangle$, che passa da $\langle v_z \rangle = \frac{U}{2} \left[\frac{2R_w^2}{R_w^2 - R_d^2} - \frac{1}{\ln(R_w/R_d)} \right]$ a $\langle v_z \rangle = U$, a parità di portata volumetrica Q .

Se la vel. media aumenta e la portata resta costante allora deve necessariamente ridursi l'area della sezione attraverso la quale fluisce il liquido.

Tale area passa infatti da $A = \pi(R_{oi}^2 - R_w^2)$ ad

$$A = \pi(R_c^2 - R_w^2)!$$