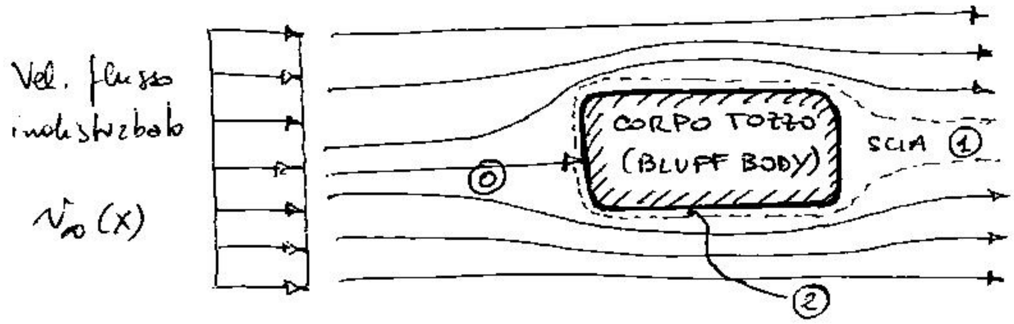
STRATO LIMITE



Consideriamo il flusso attorno ad un corpo tozzo. Possiamo distinguere 3 zone principali:

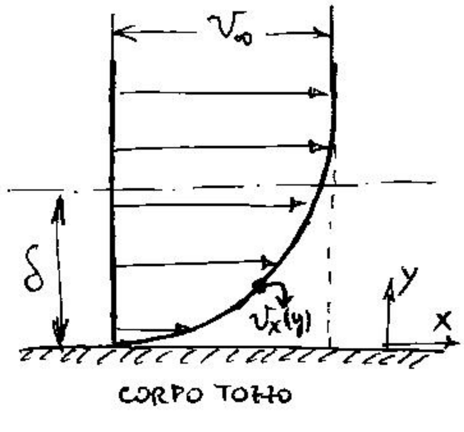
ZONA 0 : FLUSSO ESTERNO. E' un flusso potenziale caratterizzato da effetti viscosi non importanti e vorticità nulla

ZONA 1 : SCIA. Effetti viscosi non importanti ma vorticità non nulla.

ZONA 2 : FLUSSO INTERNO. Effetti viscosi importanti e vorticità non nulla ⇝ Teoria dello Strato Limite

La zona di interesse è la 2 (STRATO LIMITE), avente spessore molto piccolo rispetto allo sviluppo spaziale del flusso lungo la direzione principale del medesimo.

DEF. SPESSORE DELLO STRATO LIMITE (δ):



1. δ tale che $v_x(y) = 0{,}99\, V_\infty$

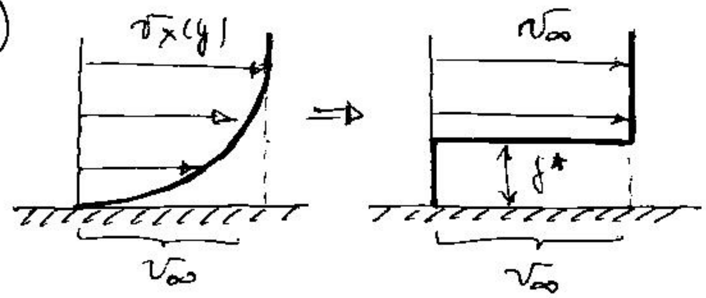
2. Portata volumetrica iniziale:

$$\frac{Q_{in}}{W} = \int_0^\infty V_\infty \, dy = \text{cost.}$$

Portata volumetrica in corrispondenza del corpo tozzo:

$$\frac{Q_P}{W} = \int_0^\infty v_x(y)\,dy \le \frac{Q_{in}}{W} \qquad (v_x(y) \le v_\infty \;!!)$$

$v_x(y)$ passa da un valore pari a v_∞ (ad una distanza "sufficiente" dal corpo tozzo) ad un valore pari a zero (in corrispondenza del corpo tozzo). La riduzione in $v_x(y)$ implica una riduzione della portata. Tale riduzione può essere determinata ipotizzando che esista un profilo di velocità a gradino (fittizio) in cui $v_x(y \le \delta^*) = 0$ e $v_x(y > \delta^*) = v_\infty$. Integrando un tale profilo, si calcolano le portate volumetriche:



$$\frac{Q_{in}}{W} - \frac{Q_P}{W} = \underbrace{\delta^* v_\infty}_{} \;\Rightarrow\; \int_0^\infty v_\infty\,dy - \int_0^\infty v_x(y)\,dy = \delta^* v_\infty$$

Riduzione di portata associata alla presenza dello strato limite

$$\boxed{\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{v_x(y)}{v_\infty}\right] dy}$$

LUNGHEZZA DI SPOSTAMENTO

Significato fisico: δ^* misura di quanto "spostare" il profilo di velocità indisturbata per ridurre la portata volumetrica da Q_{in}/W a Q_P/W.

EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

Consideriamo un campo di moto 2D stazionario. Le eq. di continuità e NS diventano:

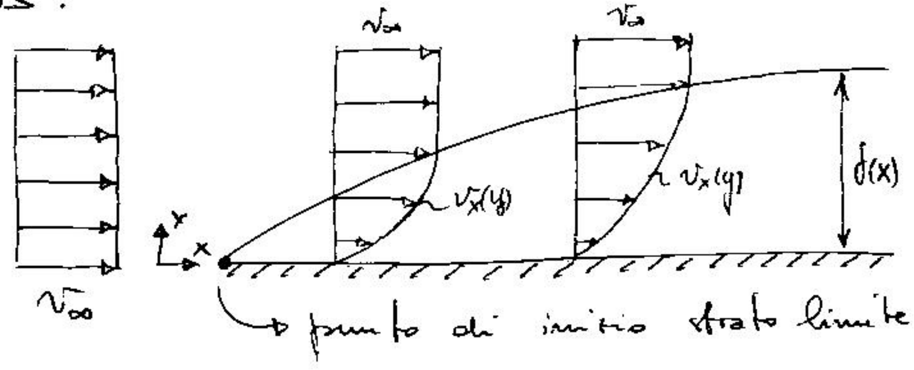
CONTINUITÀ : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x : $\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$

NS_y : $\rho\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$

Approssimazioni sulle NS:

① v_x varia lungo y in maniera molto più significativa che lungo x :



$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \longrightarrow$$ Trascuriamo $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$

② $v_x \gg v_y$ ma $\frac{\partial v_x}{\partial x} \ll \frac{\partial v_y}{\partial y} \rightarrow v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$

③ Adimensionalizzando le NS_y, possiamo trascurare sia i termini inerziali che quelli viscosi : $0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow P = P(x)$
Se $P = P(x)$ e non $P = P(y)$ allora la pressione equivalente all'interno dello strato limite è uguale al valore all'esterno (fissata la x). Nella zona di flusso esterno si assumono condizioni di moto potenziale. Si può quindi applicare l'eq. di Bernoulli per trovare un'espressione per $\partial P/\partial x = dP/dx$:

$$P + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 + \cancel{\rho g h}^{\,0} = \text{cost} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{2}\rho\frac{d v_\infty^2}{dx} = -\rho v_\infty \frac{d v_\infty}{dx}$$

$\longrightarrow$

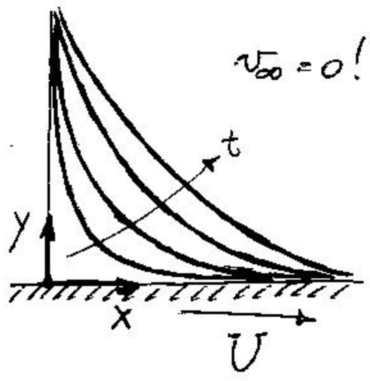
In sintesi:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad \oplus \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \oplus \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho v_\infty \frac{d v_\infty}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$NS_x: \quad \boxed{\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \rho v_\infty \frac{d v_\infty}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

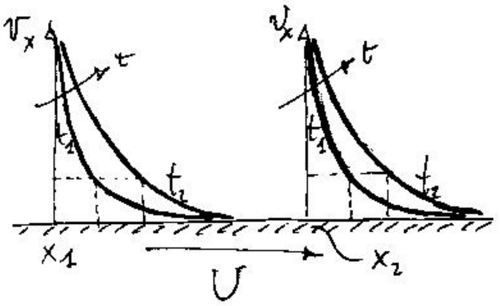
<u>APPLICAZIONE</u>: Lastra piana istantaneamente messa in moto con velocità U costante.



Il problema è per sua natura <u>NON</u> stazionario, visto che lo stato finale cui si arriva dopo un tempo infinito è quello di distribuzione di velocità uniforme e pari ad U. Quindi, le equazioni per $t < \infty$ sono quelle dello strato limite più un termine dipendente dal tempo.

Hp: $\quad v_x = v_x(y,t) \neq 0 \quad ; \quad v_y \sim 0$

Continuità: $\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}}_{\text{trasc.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0}$ Profilo compl. sviluppato



$$NS_x: \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left(\underbrace{\cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}}_{0\ (\text{x continuità})} + \underbrace{\cancel{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}}_{0\ (v_y \sim 0)}\right) =$$

$$= \overbrace{\cancel{\rho v_\infty \frac{d v_\infty}{dx}}}^{0\ (v_\infty = 0)} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$\Longrightarrow$

Si ottiene:
$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$
EQUAZ. DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE PARZIALI

Condizioni al contorno e condizioni iniziali:

- $v_x(y=0) = U \quad \forall t$ (vel. fluido = vel. piastra)
- $v_x(y \to \infty) = v_\infty = 0 \quad \forall t$ (vel. fluido indisturbato)
- $v_x(t \leq 0) = 0 \quad \forall t$ (piastra inizialmente ferma)

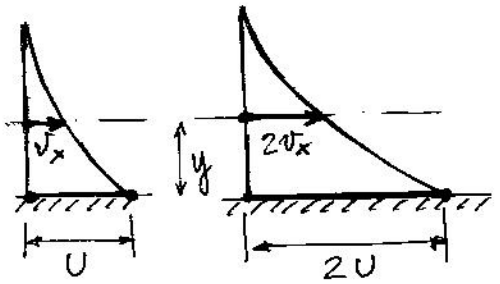
Oltre a tali condizioni, per risolvere l'eq. differenziale si deve usare la TEORIA DELLA SIMILITUDINE, basata sull'ipotesi (da verificare) che i profili di velocità secondo y ad ogni data coord. x siano simili ovvero:

$$\boxed{\frac{v_x(y,t)}{U} = \phi\left[\frac{y}{\delta(t)}\right]} \quad (1)$$

$\delta(t)$: spessore dello strato limite (variabile nel tempo)
ϕ : funzione della qtà $y/\delta(t)$.

Significato dell'ipotesi (1): in generale vale $v_x = \phi(U, y, t)$

(i) intuitivamente, se U raddoppia/si dimezza allora anche v_x raddoppia/si dimezza fissati y e t.
Allora si può scrivere:
$$v_x = U\,\phi(y,t) \rightsquigarrow \frac{v_x}{U} = \phi(y,t)$$



(ii) essendo una funzione di y e t, ϕ deve risultare adimensionale. Quindi, y e t vanno combinati per ottenere una q.tà adimensionale. Poiché $[y] = [m]$ e $[t] = [s]$ non è possibile ottenere una q.tà adimensionale usando direttamente y e t. Si può invece usare y e $\delta(t)$ sfruttando la dipendenza dello spessore δ dal tempo t. Quindi:

$$\frac{v_x(y,t)}{U} = \phi\left[\frac{y}{\delta(t)}\right]$$

Indichiamo: $\eta \triangleq y/\delta(t) = f(y,t) \rightsquigarrow \frac{v_x(y,t)}{U} = \phi(\eta)$

Cerchiamo una espressione per $\eta(y,t)$ in modo che:

$v_x(\eta_1) = v_x(\eta_2)$ con $\eta_1 = \left[y/\delta(t)\right]_1, \eta_2 = \left[y/\delta(t)\right]_2$ x teoria similitudine

Abbiamo:

$$\begin{cases} v_x(y,t) = U\cdot\phi(\eta) & (1) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[U\cdot\phi(\eta)\right] = U\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial t} = U\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t} = U\phi'\frac{\partial}{\partial t}\left[y/\delta(t)\right] =$$

$$= U\phi' y\frac{\partial}{\partial t}\left[1/\delta(t)\right] = -\frac{U\phi' y}{\delta^2(t)}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[U\cdot\phi(\eta)\right] = U\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial y} = U\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = U\phi'\frac{\partial}{\partial y}\left[y/\delta(t)\right] = \frac{U\phi'}{\delta(t)}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U\phi'}{\delta(t)}\right] = \frac{U}{\delta(t)}\frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{U}{\delta(t)}\cdot\frac{\partial \phi'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= \frac{U}{\delta(t)}\phi''\cdot\frac{1}{\delta(t)} = \frac{U\phi''}{\delta^2(t)}.$$

Sostituendo i vari termini nell'equazione ① si ha:

$$-\frac{\cancel{U}\phi' y}{\delta^2(t)}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt} = \nu\frac{\cancel{U}\phi''}{\delta^2(t)} \Rightarrow \phi'' + \frac{\delta^2(t)}{\nu}\left[\frac{\phi' y}{\delta^2(t)}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt}\right] = 0$$

$$\phi'' + \frac{\delta(t)}{\nu}\cdot\phi'\frac{y}{\delta(t)}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \phi'' + \frac{\delta(t)}{\nu}\phi'\eta\frac{d\delta(t)}{dt} = 0$$

Poiché ϕ è funzione solamente di η, allora deve valere:

$$\frac{\delta(t)}{\nu}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt} = \text{cost.} \xrightarrow{\int} \int_{\delta(0)=0}^{\delta(t)} \delta(t)\,d\delta(t) = \text{cost.}\cdot\nu\int_0^t dt \Rightarrow \frac{\delta^2(t)}{2} = \text{cost.}\cdot\nu t$$

Si trova:

$$\delta(t) = \sqrt{2\cdot\text{cost.}\cdot\nu t}$$

La soluzione del problema non dipende dal particolare valore della costante. Arbitrariamente assumo (salvo poi verificarlo):

$\text{cost.} = 2 \Rightarrow \delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$ (SPESSORE STRATO LIMITE) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \eta = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ (VARIABILE ADIMENSIONALE) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\phi'' + 2\eta\phi' = 0}$ Eq. NS_x riscritta dopo il cambio di variabile $\eta = \dfrac{y}{\delta(t)}$

②

NB: η così definita è tale da verificare la condizione di similitudine $v_x(\eta_1) = v_x(\eta_2)$ ipotizzata all'inizio.

Ricapitolando, per risolvere il problema della lastra piana istantaneamente messa in movimento (= istantaneamente accelerata), bisogna risolvere l'eq. ② con le seguenti condizioni al contorno:

- $y = 0$, $v_x = U \implies \eta = 0$, $\phi = 1$
- $y \to \infty$, $v_x = v_\infty = 0 \implies \eta \to \infty$, $\phi = 0$
- $t \leq 0$ $(t \to 0^-)$, $v_x = 0 \implies \eta \to \infty$, $\phi = 0$

$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\}$ collassano in un'unica condiz. contorno

$$\phi'' + 2\eta\phi' = 0 \quad \to \quad \frac{d\phi'}{d\eta} + 2\eta\phi' = 0$$ Eq. diff. a var. separabili

$$\frac{d\phi'}{d\eta} = -2\eta\phi' \quad \to \quad \frac{d\phi'}{\phi'} = -2\eta\, d\eta \quad \xrightarrow{\int^{*1}}$$

$$\ln\phi' = -\eta^2 + c_1 \quad \longrightarrow \quad \phi' = c_1 e^{-\eta^2} \quad \xrightarrow{\int^{*2}}$$

$$\phi = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

Le costanti di integrazione si trovano tramite le c.c.

$$\eta = 0,\ \phi = 1 \implies 1 = \cancel{c_1 \int_0^0 e^{-\eta^2} d\eta}^{\to 0} + c_2 \implies c_2 = 1$$

$$\eta \to \infty,\ \phi = 0 \implies 0 = c_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

L'integrale $\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta$ è chiamato FUNZIONE DEGLI ERRORI o $ERF(\eta)$ ed è tabulato in funzione di η. In questo caso:

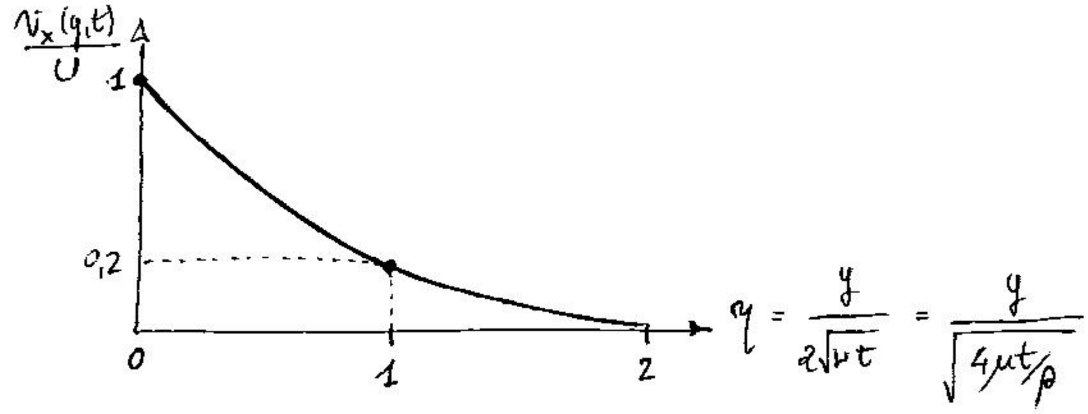
$$\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

L'equazione (2) ha soluzione analitica nella forma:

$$\boxed{\phi(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}$$

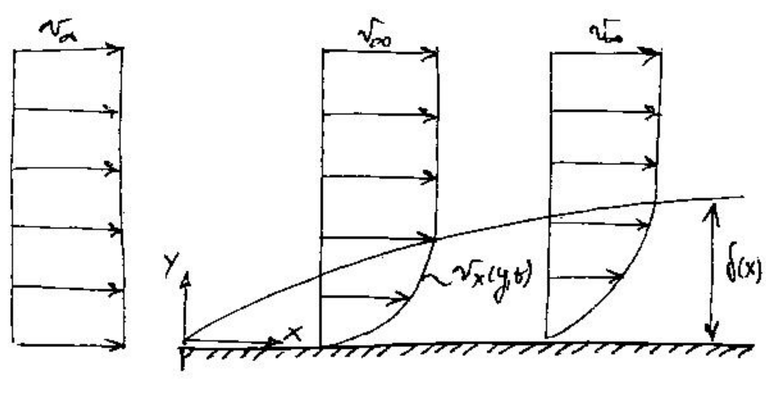
$$\downarrow$$

$$v_x(y,t) = U \cdot \phi(\eta) = U\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right] \; ; \; \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$



Profilo di velocità generato in un fluido da una piastra piana messa istantaneamente in moto in funzione della variabile adimensionale η.

APPLICAZIONE: Strato limite che evolve nello spazio, su lastra piana



Equazioni di partenza:

Continuità: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

$$NS_x: \quad \rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \rho v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

In questo caso, v_∞ non dipende da x bensì è costante. Per questo $\frac{dv_\infty}{dx} = 0 \Rightarrow \rho v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} = 0$.

Rispetto al caso di lastra istantaneamente messa in movimento, non solo $v_x(x,y)$ ma anche $v_y(x,y)$ risulta non nulla. Non è quindi sufficiente definire un cambiamento di variabile η. Bisogna richiamare la definizione data per la funzione di flusso $\psi(x,y)$:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{CONTINUITÀ}: \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0, \; -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Quindi, ψ è definita in modo da garantire che l'eq. di continuità sia automaticamente soddisfatta.

$$NS_x: \quad -\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Finora abbiamo usato solo ψ. Ora introduciamo di nuovo la variabile adimensionale η, definita a partire dall'ipotesi di similitudine dei profili di velocità, che nel caso in esame diventa:

$$\frac{v_x(x,y)}{v_\infty} = \phi\left[\frac{y}{\delta(x)}\right] = \phi(\eta)$$

Facendo gli stessi passaggi del caso precedente, si arriva (senza dimostrazione) alla seguente espressione:

$$\eta = y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \implies \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$$

Come prima, l'introduzione della variabile adimensionale η ci consente di definire ed introdurre una funzione di η tale da esprimere sia v_x che v_y in funzione proprio della sola η: $v_x(\eta)$, $v_y(\eta)$. Una possibile scelta è:

$$\psi = f(\eta) \Rightarrow v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial f(\eta)}{\partial y} = -\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}} = -\frac{d f(\eta)}{d\eta}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}}$$

$$v_x = -f'(\eta)\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$$

Usando la definizione $\psi = f(\eta)$ si trova una espressione per v_x che dipende non solo da η ma anche da x. Poiché vogliamo eliminare la dipendenza di v_x da x, è necessario modificare la definizione data per ψ:

$$\psi = -\sqrt{v_\infty \nu x}\cdot f(\eta) \longrightarrow v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\sqrt{v_\infty \nu x}\cdot\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= -\sqrt{v_\infty \cancel{\nu x}}\cdot\sqrt{\frac{v_\infty}{\cancel{\nu x}}}\,f'(\eta)$$

$$= -v_\infty f'(\eta)$$

In effetti, ora v_x dipende solo da η!

 Pertanto, il problema si risolve riscrivendo lo NS_x:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\nu\,\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

usando $\psi=-\sqrt{v_\infty \nu x}\cdot f(\eta)$ e $\eta=y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$. Una volta calcolate le singole derivate, si arriva alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\boxed{f'''+\frac{1}{2}ff''=0}$$

con le seguenti c.c.:

- $v_x(y=0)=0 \longrightarrow v_x=v_\infty f'(\eta)=0 \rightsquigarrow f'(\eta=0)=0$
- $v_y(y=0)=0 \longrightarrow f(\eta=0)=0$ *
- $v_x(y\to\infty)=v_\infty \Longrightarrow f'(\eta\to\infty)=1$

$$* \; v_y=\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\sqrt{v_\infty \nu x}\cdot f(\eta)\right]=-\sqrt{v_\infty \nu x}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial x}+f(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{v_\infty \nu x}\right)$$

$$=-\sqrt{v_\infty \nu x}\,\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}-f(\eta)\sqrt{v_\infty \nu}\,\frac{\partial x^{1/2}}{\partial x}=-\sqrt{v_\infty \nu x}\,f'\cdot y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu}}\left(-\frac{x^{-3/2}}{2}\right)$$

$$-f(\eta)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{v_\infty \nu x}\,f'\cdot y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x^3}}-\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}v_\infty f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}} \longrightarrow v_x(y=0)\rightsquigarrow f(\eta=0)=0!$$

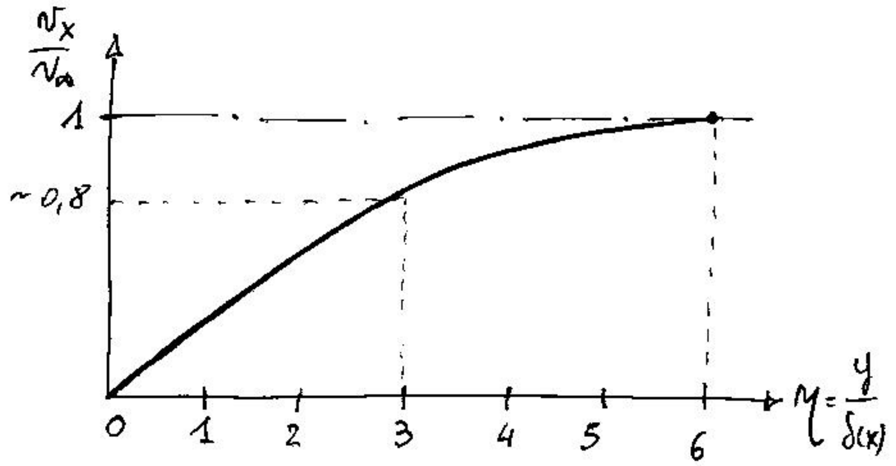
Ci sarebbe anche la condizione al contorno:

- $v_x(x\leq 0)=v_\infty \Longrightarrow \eta|_{x\to 0}\to\infty \Rightarrow f'(\eta\to\infty)=1$

Quindi, questa c.c. risulta equivalente ad una già considerata.

In sintesi, il problema si risolve integrando la seguente equaz. differenziale con relative c.c.:

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ f'(\eta = 0) = 0 \\ f(\eta = 0) = 0 \\ f'(\eta \to \infty) = 1 \end{cases}$$



Andamento della velocità (profilo) nello strato limite in funzione della variabile (= coordinata) adimensionale η.

L'integrazione può essere fatta solo per via numerica, non analitica.

Noto il profilo di velocità, è possibile ricavare (sempre numericamente) lo sforzo di taglio agente sulla piastra):

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = -\mu \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[-\sqrt{v_\infty \nu x} \cdot f(\eta)\right] =$$

$$= \mu \sqrt{v_\infty \nu x} \; \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial y^2}$$

NB: $\psi = -\sqrt{v_\infty \nu x} \cdot f(\eta)$; $\eta = y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$

- $\frac{\partial f(\eta)}{\partial} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = f' \cdot \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f' \cdot \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}\right) =$

$$= \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \cdot \left(f'' \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}\right)$$

Si trova:

$$\tau_w = \mu \sqrt{v_\infty \nu x} \cdot \left(\frac{v_\infty}{\nu x} f''\right) = \mu v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} f'' = \frac{\mu v_\infty}{\delta(x)} f''$$

$$\boxed{\tau_w = \frac{\mu v_\infty}{\delta(x)} f''}$$

All'aumentare della coordinata x lungo la lastra piana, $\delta(x)$ aumenta ovvero τ_w diminuisce. Questo perché τ_w è proporzionale all'inclinazione del profilo di velocità, la quale si riduce proprio all'aumentare di x.