FLUIDODINAMICA, AA 2017/2018

II Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

19 Gennaio 2018

1

Una miscela di idrocarburi (avente densità ρ $[kg/m^3]$) viene accidentalmente versata lungo un pendio, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale ed avente lunghezza $x = L$. Il film di idrocarburi scorre lungo il pendio venendo assorbito dal terreno con tasso $q = k \cdot \delta(x)$ $[m^3/m^2s]$, come schematizzato in Fig. 1. Detto $\delta(x)$ lo spessore del film, si richiede di:

1. derivare l'espressione del profilo di velocità del film e disegnarne graficamente l'andamento; [10%]
2. derivare l'espressione per lo spessore del film di idrocarburi, $\delta(x)$, in funzione della coordinata x; [10%]
3. derivare l'espressione per la lunghezza L del piano nell'ipotesi che risulti $\delta(x = L) = 0$; [5%]
4. derivare l'espressione per il tempo T impiegato dal film a percorrere tutto il piano; [15%]
5. derivare l'espressione per la forza di attrito F_τ prodotta dal liquido sul piano. [10%]

2

Per trasferire acqua tra due serbatoi A e B ($h_A = 5\ m$, $h_B = 0\ m$) si utilizza un circuito come in Fig. 2, realizzato con tubazioni lisce ($f = 0.079 Re^{-0.25}$) aventi il medesimo diametro D in tutti i rami. il circuito è dotato di due linee alimentate in parallelo ($h_1 = 0\ m$, $h_2 = 0\ m$), ciascuna avente lunghezza pari a 1500 m. Considerando che i tratti di tubazione $A - 1$ e $2 - B$ hanno entrambi lunghezza di 500 m, che i costi sono: $K_T = 1000\ EUR/m^2$ (costo specifico della tubazione), $K_P = 2000\ EUR/kW$ (costo specifico della pompa), $K_E = 0,23\ EUR/kWh$ (costo specifico di esercizio), e che l'impianto deve funzionare per 5000 ore all'anno per 20 anni, si chiede di:

1. determinare il diametro ottimo sapendo che la portata massica da trasferire a B è di $\dot{m} = 6\ kg/s$ e che la portata massica elaborata dalla pompa è di $\dot{m} = 8\ kg/s$; [20%]
2. per il diametro calcolato al punto precedente, determinare la potenza della pompa; [5%]
3. per il diametro calcolato al punto precedente, determinare le pressioni ai nodi 1 e 2. [10%]
4. Determinare infine la nuova portata massica trasferita al serbatoio B nel caso venga spenta la pompa. [15%]

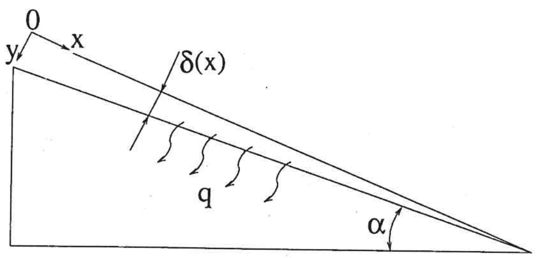


Fig. 1: Paratia

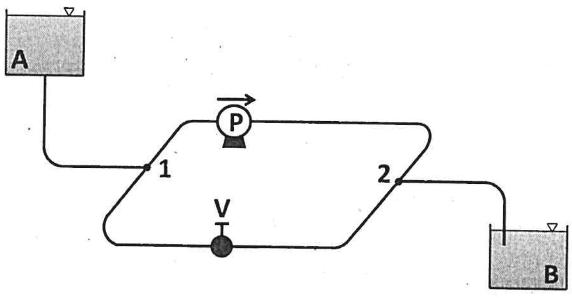
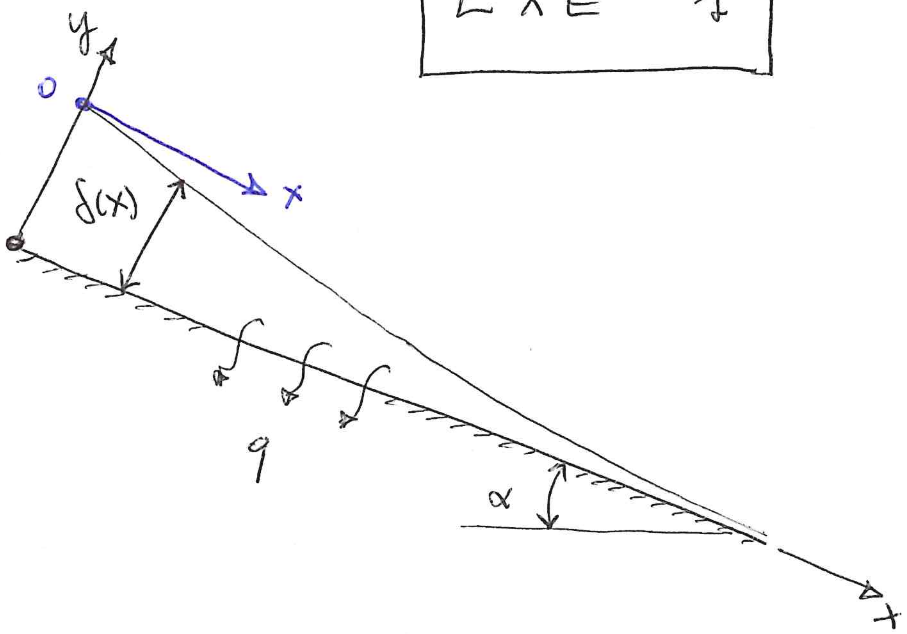


Fig. 2: Bonifica di inquinante lungo un pendio

Continuità: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$; *NS:* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$; *Taglio:* $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Equazione di Bernoulli (forma integrale) $B_{1\to 2} : \dfrac{v_1^2}{2} + gh_1 + \dfrac{p_1}{\rho} + w_s - l_v = \dfrac{v_2^2}{2} + gh_2 + \dfrac{p_2}{\rho}$

EXE 1



$$q = K \cdot \delta(x) \quad \left[\frac{m^3}{m \cdot s}\right]$$

$$[K] = \left[\frac{m^3}{m^2 \cdot s}\right]$$

[δ(x)] se l'origine è sull'interfaccia

C.C. $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

[0] se l'origine è sull'interfaccia

C.C. $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mu}$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\mu}\left(2\delta \cdot y - y^2\right)} \quad [10\%]$$

N.B. $v_x(x,y) = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\mu}(\delta^2 - y^2)$ con origine sull'interfacc.

$$Q = \int_0^w \int_0^\delta v_x(x,y)\,dy\,dz = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{3\mu} \cdot \delta^3 \cdot W \quad [\delta = \delta(x)]$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mu} \delta^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot W \quad [1]$$

Bil. massa : $Q(x + dx) = Q(x) - q \cdot dx$

$$\frac{dQ}{dx} = -q = -K \cdot \delta(x) \quad [2]$$

Uguagliando [1] e [2]:

$$\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\mu}}\,\delta^{\cancel{2}}\frac{d\delta}{dx}\cdot W = -K\cdot\cancel{\delta}$$

$$\int_{\delta_0}^{\delta(x)}\delta\, d\delta = -\frac{\mu\cdot K}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}\int_0^x dx$$

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\delta_0^{\,2} - 2\frac{\mu\cdot K}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}\cdot x}} \qquad [10\%]$$

Lunghezza del piano tale per cui risulta $\delta(x=L)=0$:

$$\delta(x=L)=0 \quad \text{se} \quad \boxed{L = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu\cdot K}\cdot\delta_0^{\,2}} \qquad [5\%]$$

Tempo di percorrenza del piano:

$$\overline{v}_x = \frac{1}{\delta(x)}\int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{3\mu}\cdot\delta^2$$

E' lo stesso indipendentemente da dove si posiziona l'origine

$$dx = \overline{v}_x\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^L \frac{dx}{\overline{v}_x} = \int_0^T dt$$

$$\int_0^L \frac{3\mu}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot \frac{dx}{\delta_{(x)}^2} = T$$

Poniamo $\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot x = z$

$$dx = - \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\mu k} dz$$

$$\int_0^L \frac{dx}{\delta_{(x)}^2} = \int_{z_1}^{z_2} - \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\mu k} \cdot \frac{dz}{z} = - \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\mu k} \cdot \ln z \Big|_{z_1}^{z_2}$$

Otteniamo:

$$\frac{3\cancel{\mu}}{\cancel{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}} \cdot \left(- \frac{\cancel{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}}{2\cancel{\mu} k} \right) \cdot \ln \left(\frac{\delta_0^2 - \frac{2\mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot L}{\delta_0^2} \right) = T$$

$$\boxed{T = -3 \ln \left(\frac{\delta_L^2}{\delta_0^2} \right)} \quad [15\%]$$

Forza di attrito sulla parete:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha \,(y - \delta)$$

$$\tau_w = \tau_{xy} \Big|_{y=0} = \rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \delta_{(x)}$$

N.B. $\tau_w = -\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \delta($
con origine

$$F_z = \int_0^W \int_0^L \tau_w \, dx\, dz = \rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot W \int_0^L \delta(x)\, dx$$

$$\int_0^L \delta(x)\, dx = \int_{z_1}^{z_2} z^{1/2} \cdot \left(- \frac{2 \mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \right) dz$$

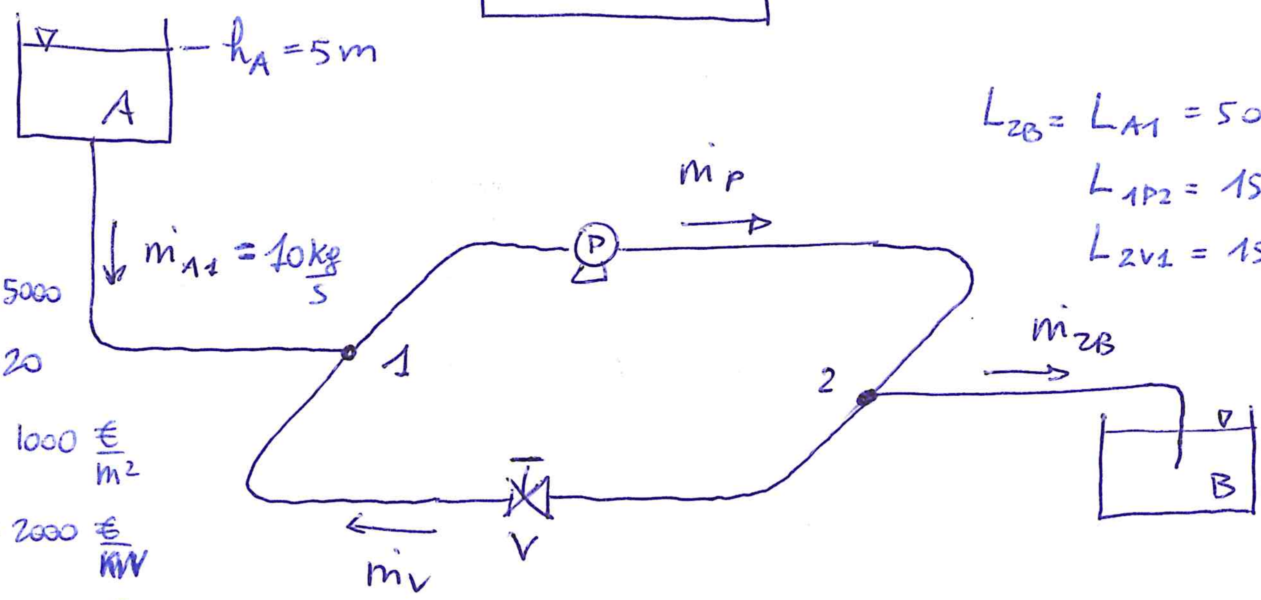
$$= - \frac{2 \mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$= - \frac{4}{3} \frac{\mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \left[\underbrace{\left(\delta_0^2 - \frac{2 \mu k}{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot L \right)^{3/2} - \delta_0^3}_{\underbrace{\cancel{\delta_L^3}}_{=0} - \delta_0^3} \right]$$

$$\frac{F_z}{W} = \cancel{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha} \cdot \frac{4}{3} \frac{\mu k}{\cancel{\rho g \,\mathrm{sen}\,\alpha}} \delta_0^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3} \mu k \delta_0^3}}$$

$$\frac{kg}{ms} \cdot \frac{m^3}{\cancel{m^3} \cdot s} \cdot \cancel{m^3} = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

EXE 2



$N_h = 5000$

$N_y = 20$

$K_T = 1000 \frac{€}{m^2}$

$K_P = 2000 \frac{€}{kW}$

$K_E = 0{,}23 \frac{€}{kWh}$

$L_{2B} = L_{A1} = 500\ m$

$L_{1P2} = 1500\ m$

$L_{2V1} = 1500\ m$

$$\dot m_P = 4\,\dot m_V \quad (v_P = 4\,v_V) \Rightarrow \dot m_{A1} = \dot m_{2B} = 3\,\dot m_V$$

$$C_{TOT} = K_T \cdot L \cdot D + \frac{K_P + K_E N_h N_y}{10^3} \cdot Pot$$

$$B_{1P2}: \quad \frac{P_1}{\rho} + dW_s - dl_v^{1P2} = \frac{P_2}{\rho}$$

$$dW_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + dl_v^{1P2} \qquad [1]$$

$$B_{2V1}: \quad \frac{P_2}{\rho} - dl_v^{2V1} = \frac{P_1}{\rho} \rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho} = dl_v^{2V1} \qquad [2]$$

Sostituendo [2] in [1]:

$$L_{2V1} = L_{1P2} = L$$

$$dW_s = dl_v^{2V1} + dl_v^{1P2}$$

$$= 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \cdot \left(v_V^{1,75} \cdot L_{2V1} + v_P^{1,75} L_{1P2}\right) D^{-1{,}2}$$

$$dW_s = 0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \cdot v_v^{1.75} \cdot (4^{1{,}75} + 1) L \cdot D^{-1{,}25}$$

$$= 0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \cdot (4^{1{,}75} + 1) \cdot L \cdot \left(\frac{4\dot{m}_v}{\rho \pi D^2}\right)^{1.75} D^{-1{,}25}$$

$$= \underbrace{0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \cdot (4^{1{,}75} + 1) \cdot L \left(\frac{4\dot{m}_v}{\rho \pi}\right)^{1{,}75}}_{K_1} \cdot D^{-4{,}75}$$

$$= K_1 \cdot D^{-4{,}75}$$ essendo $\dot{m}_v$ nota

$$C_{TOT} = K_2 \cdot D + K_3 \cdot D^{-4{,}75}$$

con $K_2 = K_T \cdot L_{TOT}$

$$K_3 = \frac{K_P + K_E N_A N_y}{10^3} \cdot (\dot{m}_P \cdot K_1)$$

$$\frac{dC_{TOT}}{dD} = K_2 - 4{,}75 K_3 D^{-5{,}75} = 0$$

$$D_{ottimo} = \left(\frac{K_2}{4{,}75 K_3}\right)^{-\frac{1}{5{,}75}} \cong 0{,}08355\,m \quad (8{,}36\ cm)$$

$D = 0{,}08355\ m \quad \Rightarrow \quad dW_s = 351{,}79\ m^2/s^2$

$\downarrow$

$Pot = \dot{m}_p\, dW_s \cong \underline{\underline{2814{,}3\ W}}$

P_1 si può calcolare da B_{A1}:

$$\frac{P_{atm}}{\rho} + g h_A - dl_v^{A1} = \frac{P_1}{\rho} + g h_1 + \cancel{\frac{1}{2} v_{A1}^2} \rightarrow \text{trasc.}$$

$$P_1 = P_{atm} + \rho \left[g (h_A - h_1) - dl_v^{A1} \right]$$

$$= P_{atm} + \rho \left[g (h_A - h_1) - 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{-0{,}25} v_{A1}^{1{,}75} \cdot \frac{L_{A1}}{D^{1{,}25}} \right]$$

Con $v_{A1} = \dfrac{4 \cdot \dot{m}_{A1}}{\rho \pi D^2} \cong 1{,}094\ m/s \rightarrow Re_A \cong 9{,}14 \cdot 10^4$

(FLUSSO TURBOLENTO)

$$\boxed{P_1 \cong 85251\ Pa}$$

P_2 si può calcolare da B_{2B}:

$$\frac{P_2}{\rho} + \cancel{g h_2} - dl_v^{2B} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \cancel{g h_B} \Rightarrow P_2 = P_{atm} + \rho\, dl_v^{2B}$$

Con $v_{2B} = \dfrac{4\ \dot{m}_{2B}}{\rho \pi D^2} = v_{A1} \cong 1{,}094\ m/s$

$$\boxed{P_2 = p_{atm} + \rho\left[0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} v_{2B}^{1.75} \cdot \frac{L_{2B}}{D^{1{,}25}}\right]}$$

$$= \boxed{166448{,}76 \ Pa}$$

Se viene spenta la pompa, c'è flusso solo nel ramo della valvola, con direzione $1 \to 2$:

$$B_{AB}: \quad \frac{p_{atm}}{\rho} + g h_A + dl_v^{AB} = \frac{p_{atm}}{\rho} + g h_B$$

$$dl_v^{AB} = g(h_A - h_B)$$

Ma $\quad dl_v^{AB} = 0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} v_{AB}^{1{,}75}\,\frac{L_{AB}}{D^{1.25}}$ per cui:

$$v_{AB} = \left[\frac{g(h_A - h_B)\cdot D^{1{,}25}}{0{,}158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} L_{AB}}\right]^{\frac{1}{1{,}75}}$$

$$\simeq 0{,}37 \ m/s \implies \dot m_{AB} = \rho\, v_{AB}\,\frac{\pi D^2}{4}$$

$$\simeq 2{,}034 \ kg/s$$