

1

Per lo stoccaggio di liquidi industriali si possono utilizzare cisterne in acciaio come quelle rappresentate in Figura 1. Le cisterne sono separate da una parete intermedia e sono riempite con fluidi di densità diversa ( $\rho_1$  e  $\rho_2$  rispettivamente) e battente diverso ( $h_1$  ed  $h_2$  rispettivamente). Tra le due cisterne è presente una paratia quadrata, incernierata in A ed avente altezza  $h$ . Sapendo che  $\rho_1 = 2\rho$ ,  $\rho_2 = 3\rho$ ,  $h_1 = 4h$  e  $h_2 = 3h$ , si chiede di:

1. disegnare l'andamento della pressione all'interno di ciascuno dei due fluidi; [5%]
2. derivare un'espressione per la forza netta agente in direzione orizzontale sulla paratia (in funzione di  $\rho$  ed  $h$ ), indicando il verso di azione della forza (verso destra o verso sinistra?); [10%]
3. determinare un'espressione per il momento netto esercitato sulla paratia (in funzione di  $\rho$  ed  $h$ ), indicando il verso di rotazione di quest'ultima (orario o antiorario?). [15%]

2

Il nastro trasportatore in Figura 2 viene utilizzato per sollevare una portata specifica  $\Gamma$  (espressa in  $[kg/ms]$ ) di un olio viscoso. Si chiede di:

1. semplificare le equazioni di conservazione, indicando chiaramente tutte le ipotesi semplificative; [5%]
2. ricavare l'espressione del gradiente di pressione che agisce in direzione  $x$  (ovvero parallelamente al nastro); [5%]
3. ricavare l'espressione del profilo di velocità nel film; [10%]
4. disegnare il profilo di velocità nel film, rappresentando anche i singoli contributi al profilo complessivo; [5%]
5. ricavare l'espressione dello spessore per cui risulta massima la portata specifica trasferita verso l'alto. [10%]

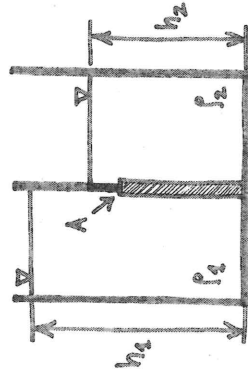


Figura 1: Cisterne per stoccaggio industriale.

3

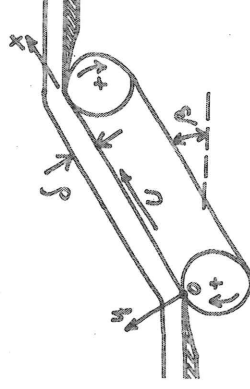


Figura 2: Nastro trasportatore.

Uno dei sistemi antincendio ad acqua più comuni è il sistema a sprinkler, composto da una rete di tubazioni piene d'acqua in pressione e sulle quali sono installati degli ugelli erogatori. Gli ugelli erogatori montano un bulbo termosensibile: quando, a causa di un incendio, la temperatura nell'ambiente protetto supera il valore della temperatura nominale del bulbo, quest'ultimo si rompe, lasciando fuoriuscire un getto di gocce d'acqua nel punto interessato dall'incendio. Sia  $v_i$  la velocità iniziale delle gocce (sferiche) generate dagli erogatori e sia  $D_p$  il loro diametro. Si supponga inoltre che il moto delle gocce avvenga nella sola direzione orizzontale (ovvero che sia trascurabile l'effetto della gravità) ed in regime di Stokes ( $C_D = 24/Re_p$ ).

1. **Calcolare come varia nel tempo la velocità  $v_{p,x}(t)$  delle gocce, nell'ipotesi che queste abbiano massa  $m_p$  costante ed il gas sia fermo.** [5%]
2. Calcolare come varia nel tempo la posizione  $x_p(t)$  delle gocce, nell'ipotesi di massa  $m_p$  costante e gas fermo. [5%]
3. Calcolare la velocità delle gocce quando la distanza percorsa è pari al 50% della distanza di arresto. [5%]

4. In caso di incendio, l'ipotesi di massa costante risulta poco realistica in quanto una frazione significativa delle gocce d'acqua viene trasportata dal flusso d'aria calda prodotta dal fuoco ed evapora, andando così a raffreddare tale flusso a scapito di una perdita di massa. Detto  $D_i$  il diametro iniziale delle gocce, determinare una espressione per la loro velocità orizzontale  $v_{p,x}(t)$  nelle ipotesi che il tasso di evaporazione sia  $c = k\pi D_p^2$  [ $kg/s$ ] con  $k$  costante, e che l'aria calda si muova solo in direzione verticale.

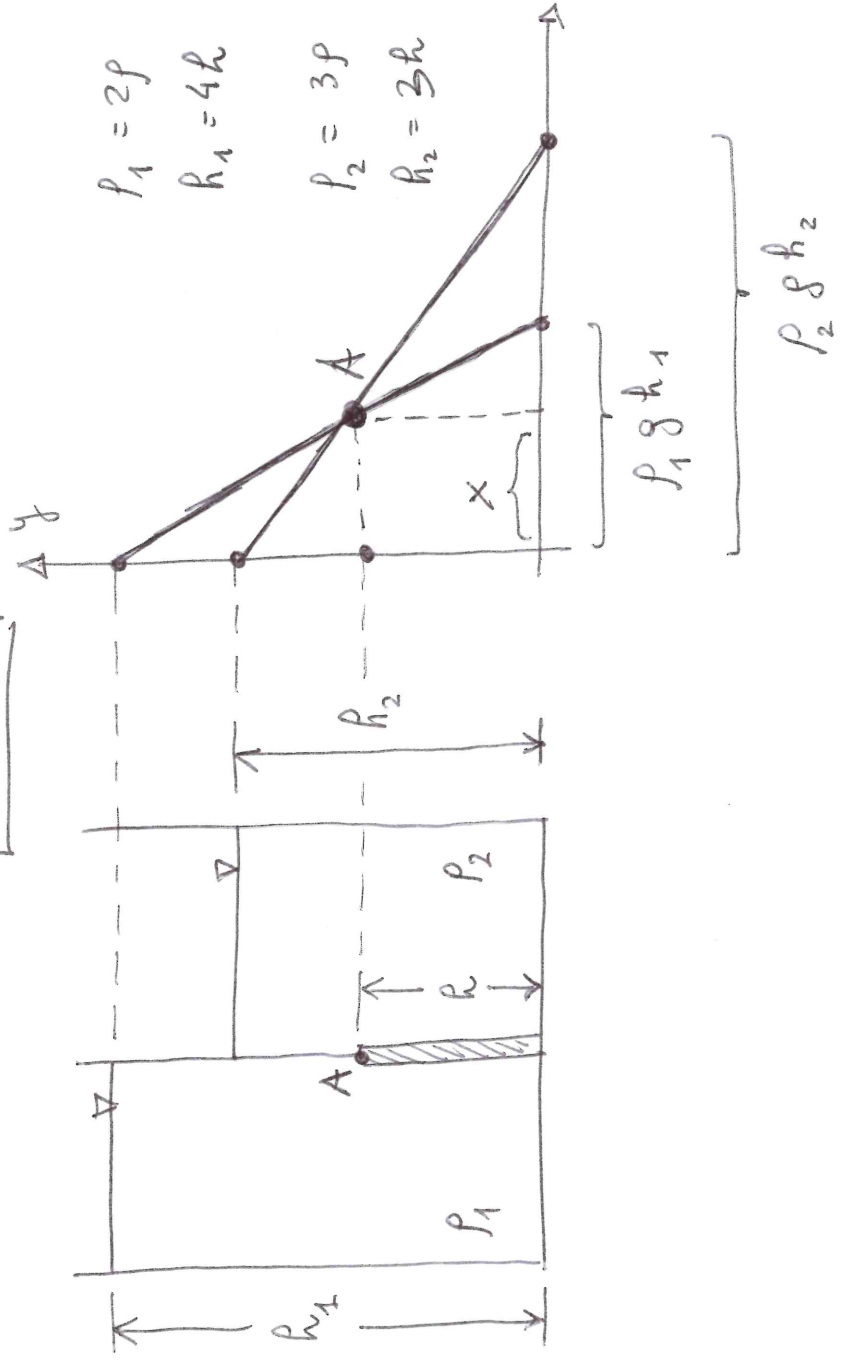
[20%]

$$\text{Eq. della statica: } dp = -\rho g dy$$

$$\text{Continuità: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{Navier-Stokes: } \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

$$\text{Forza di Drag: } F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_f A_p (u_f - v_p) |u_f - v_p| \quad \text{Num. Reynolds particella: } Re_p = \frac{\rho_f |u_f - v_p| D_p}{\mu_f}$$

EXE 1



$$P_1 \rho g h_1 = 2\rho \cdot g \cdot 4h = 8\rho g h$$

$$P_2 \rho g h_2 = 3\rho \cdot g \cdot 3h = 9\rho g h$$

$$x = \rho_1 g (h_1 - h) = 2\rho \cdot g \cdot 3h = 6\rho g h$$

$$x = \rho_2 g (h_2 - h) = 3\rho \cdot g \cdot 2h = 6\rho g h$$

Nel punto A le due curve si incontrano

$$F_{or}^{sx} = \frac{\rho_1 g (h_1 - h) + \rho_1 g h_1 \cdot h \cdot h}{2}$$

$$= \frac{(\rho_1 g h_1 - \rho_1 g \frac{h}{2}) h^2 = \rho_1 g (h_1 - \frac{h}{2}) h^2 = 2\rho g \cdot \frac{7}{2} h^3}{2} = \rho_1 g h^3$$

$$F_{or}^{dx} = \frac{\rho_2 g (h_2 - h) + \rho_2 g h_2 \cdot h \cdot h}{2}$$

$$= \frac{(\rho_2 g h_2 - \rho_2 g \frac{h}{2}) h^2 = \rho_2 g (h_2 - \frac{h}{2}) h^2 = 3\rho g \cdot \frac{5}{2} h^3}{2} = \frac{15}{4} \rho g h^3$$

$$\Delta F_{or} = F_{or}^{dx} - F_{or}^{dx} = \frac{15}{2} \rho g h^3 - 7 \rho g h^3 = \frac{1}{2} \rho g h^3 \quad \underline{2}$$

La forza spinge da destra verso sinistra

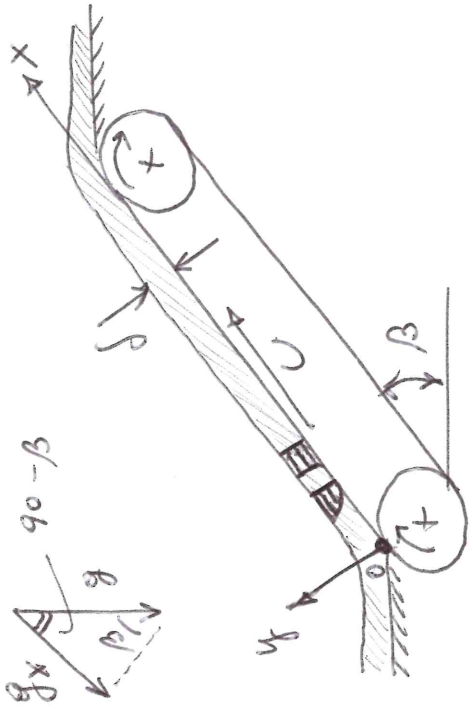
$$\begin{aligned} M_{or}^{dx} &= \rho_1 g (h_1 - h) \cdot h^2 \cdot \frac{h}{2} + \rho_1 g h \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &= \rho_1 g (h_1 - h) \cdot \frac{h^3}{2} + \rho_1 g \frac{h^4}{3} = 2 \rho g \left( 3h \cdot \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} \right) \\ &= \frac{11}{3} \rho g h^4 \quad \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) h^4 = \frac{11}{6} h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{or}^{dx} &= \rho_2 g (h_2 - h) \cdot h^2 \cdot \frac{h}{2} + \rho_2 g h \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &= \rho_2 g (h_2 - h) \cdot \frac{h^3}{2} + \rho_2 g \frac{h^4}{3} = 3 \rho g \left( 2h \cdot \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} \right) \\ &= 4 \rho g h^4 \quad \frac{4}{3} h^4 \end{aligned}$$

$$\Delta M_{or} = M_{or}^{dx} - M_{or}^{dx} = 4 \rho g h^4 - \frac{11}{3} \rho g h^4 = \frac{1}{3} \rho g h^4$$

Il momento netto spinge in senso orario

EXE 2



IPOTESI:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$v_x(y) \neq 0 ; v_y = v_z = 0$$

EQUAZIONI: Continuità

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

NS<sub>x</sub>

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

NS<sub>y</sub>

con  $\frac{\partial p}{\partial x} = +\rho g \sin \beta$  [  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g_x$  e  $g_x = -g \sin \beta$  ]

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2$$

C.C. #1 :  $v_x(y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

C.C. #2 :  $\tau_{yx}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \delta + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta$$

$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \beta) (y^2 - 2\delta y) + 0$  Profilo di velocità

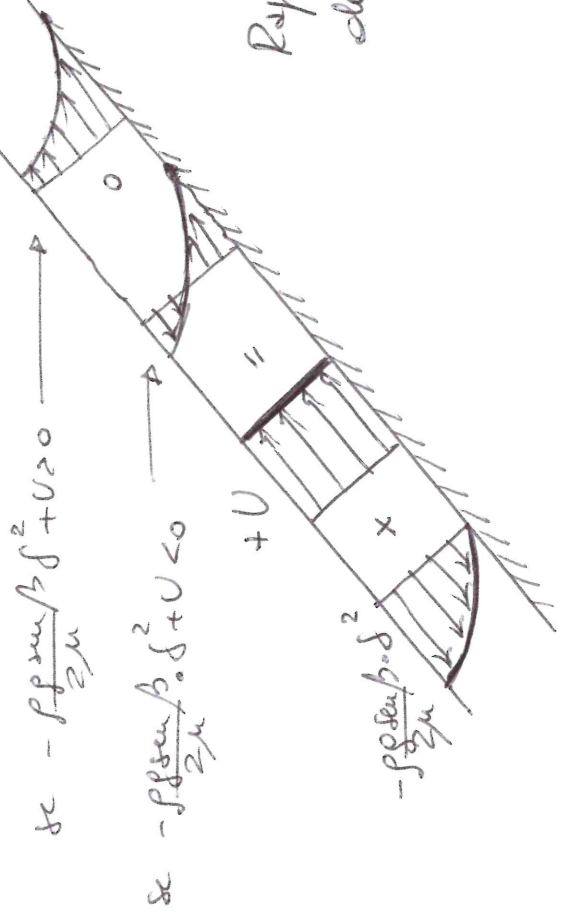
$$Q = \int_0^\delta \int_0^\delta v_x(y) dy dz = W \cdot \left[ \frac{1}{2\mu} (\rho g \sin \beta) \left( \frac{y^3}{3} - 2\delta \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^\delta + U \cdot \delta \right]$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{W} = \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} \left( \frac{\delta^3}{3} - \delta^3 \right) + U \cdot \delta$$

$$= - \frac{\rho g \sin \beta}{3\mu} \delta^3 + U \cdot \delta$$

Poiseuille (<0) Couette (>0)

$$\frac{dQ}{W} = 0 \Rightarrow - \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} \delta^2 + U = 0 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\mu U}{\rho g \sin \beta}}$$



Rappresentazione grafica del profilo di velocità

EXE 3

1

Uoto orizzontale in regime di Stokes :

• massa mp costante →  $\frac{dv_p}{dt} = - \frac{v_p}{\tau_p}$  ( $v_p \equiv v_{p,x}$ )

$$v_p(t) = v_i e^{-t/\tau_p}$$

$$x_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$

$dx_p = v_p(t) \cdot dt$

Distanze di arresto :  $v_p(t) \rightarrow 0$  se  $e^{-t/\tau_p} \rightarrow 0$

Per  $e^{-t/\tau_p} \rightarrow 0$  :  $x_p(t) = v_i \tau_p \equiv x_p^{max}$   
DISTANZA DI ARRESTO

Se  $x_p = \frac{v_i \tau_p}{2}$  allora :  $\frac{v_i \tau_p}{2} = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$

$\frac{1}{2} = 1 - e^{-t/\tau_p}$

$e^{-t/\tau_p} = \frac{1}{2}$

Per  $e^{-t/\tau_p} = \frac{1}{2}$  :  $v_p(t) = \frac{v_i}{2}$

• massa mp variabile →  $\frac{dv_p(t)}{dt} = - \frac{v_p(t)}{\tau_p(t)} - \frac{1}{m_p} \frac{dm_p v_p(t)}{dt}$

$\frac{dm_p}{dt} = - k \bar{u} D_p^2$  →  $\frac{dv_p}{dt} = - \frac{v_p}{\tau_p} - \frac{1}{m_p} \frac{dm_p v_p}{dt}$

$\frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{2} D_p^2 \frac{dD_p}{dt}$

$\frac{dD_p}{dt} = - \frac{2k}{\rho_p}$  →  $\frac{dv_p}{dt} = - \frac{v_p}{\tau_p} - \frac{1}{m_p} \frac{dm_p v_p}{dt}$

$D_p(t) = D_i - \frac{2k \cdot t}{\rho_p}$

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = - \frac{V_p(t)}{\frac{\rho_p D_p^2(t)}{18\mu}} - \frac{1}{\frac{\rho_p \pi D_p^3(t)}{6}} \cdot (-k \pi D_p^2(t))$$

$$= \left[ \frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2(t)} + \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p(t)} \right] V_p(t)$$

$$\int_{V_i}^{V_p(t)} \frac{dV_p}{V_p} = - \frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \left(-\frac{L}{2k}\right) \frac{dD_p}{D_p^2} + \frac{6k}{\rho_p} \left(-\frac{L}{2k}\right) \cdot \frac{dD_p}{D_p}$$

$$\ln\left(\frac{V_p(t)}{V_i}\right) = \frac{9\mu}{k} \cdot \int_{D_i}^{D_p(t)} \frac{dD_p}{D_p^2} - 3 \int_{D_i}^{D_p(t)} \frac{dD_p}{D_p}$$

$$= \frac{9\mu}{k} \left(-\frac{1}{D_p(t)} + \frac{1}{D_i}\right) - 3 \ln\left(\frac{D_p(t)}{D_i}\right)$$

$$V_p(t) = V_i \left(\frac{D_i}{D_p(t)}\right)^3 \cdot \exp\left[\frac{9\mu}{k} \left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_p(t)}\right)\right]$$

Con  $D_p(t) = D_i - \frac{2k}{\rho_p} t$