FLUIDODINAMICA, AA 2011/2012

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

01 Febbraio 2012

1

Un getto d'acqua (densità ρ $[kg/m^3]$) avente diametro d $[m]$ e velocità v $[m/s]$ cade su una lastra piana orizzontale posta ad una distanza h $[m]$. Ipotizzando che il getto sia stazionario ed abbia sezione costante ed assumendo che le perdite per attrito siano trascurabili, si chiede di:

1. determinare la forza F esercitata dal getto sulla piastra quando questa è ferma; [5%]
2. determinare la potenza trasmessa dal getto alla piastra, P_{tr}, nell'ipotesi che la piastra possa traslare verso il basso con velocità u $[m/s]$; [10%]
3. determinare l'efficienza η definita come rapporto tra potenza trasmessa dal getto alla piastra e potenza resa disponibile (ovvero fornita) dal getto nell'ipotesi che la velocità di traslazione verso il basso della piastra sia $u = 0.5v$. [10%]

2

L'impianto di raffreddamento di uno stabilimento industriale, rappresentato in Fig. 1, è costituito da un serbatoio A in pressione dal quale l'acqua viene inviata alle diverse utenze (B e C) dello stabilimento.

1. Determinare, nell'ipotesi di valvola V chiusa, la portata massica $\dot{m}_B$ [kg/s] che è possibile alimentare al serbatoio B se la pressione del gas nel serbatoio è pari a $p_0 = 1.3 \cdot 10^5$ Pa. [15%]
2. Determinare, nell'ipotesi di valvola V aperta, quale deve essere la pressione del gas nel serbatoio per alimentare la portata $\dot{m}_B$ calcolata al punto precedente se in C deve arrivare una portata $\dot{m}_C = 8$ kg/s. [25%]

Si considerino tubi lisci ($f = 0.079 \cdot Re^{-0.25}$) aventi diametro $D = 0.1$ m, dislivelli $h_A = 1$ m e $h_C = 2$ m, lunghezza dei tratti di tubazione $L_1 = 40$ m e $L_2 = 160$ m. Si assuma infine $p_{atm} = 10^5$ Pa e $g = 10$ m/s^2.

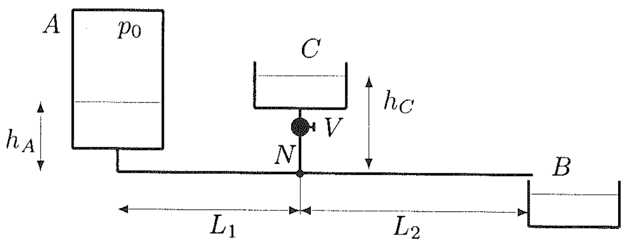


Fig. 1 Impianto di raffreddamento (es 2).

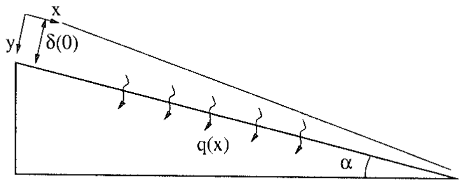


Fig. 2 Pendio inquinato da idrocarburi (es. 3).

3

Durante l'occupazione russa in Ungheria, i siti degli accampamenti dell'Armata Rossa presentavano altissimo inquinamento da idrocarburi. In un sito particolare, collocato in cima ad una collina, i militari russi erano soliti smaltire una miscela di idrocarburi rovesciandola lungo il pendio della collina. In tal modo, si veniva a formare un film di spessore sottile, che scorrendo lungo il pendio veniva assorbito dal terreno (vedi Figura 2). Detti Q_0 la portata volumetrica di film all'inizio del pendio ($x = 0$), α l'angolo di inclinazione del pendio rispetto all'orizzontale, $\delta(x)$ lo spessore del film e $q(x) = k/\delta(x)$ $[m^3/m^2\ s]$ il flusso di miscela assorbito dal terreno (con k tasso di assorbimento costante, espresso in $[m^3/m\ s]$), si chiede di:

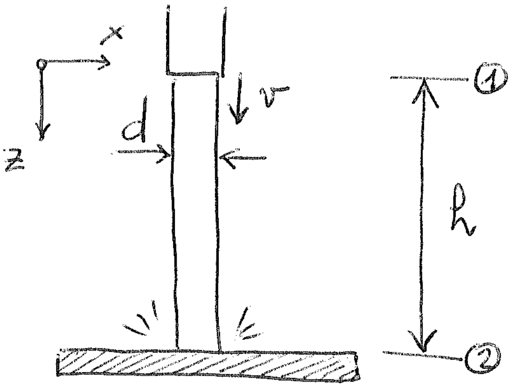
1. semplificare le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame, enunciando chiaramente tutte le ipotesi semplificative; [5%]
2. calcolare il profilo di velocità del film e lo sforzo di taglio alla parete; [10%]
3. calcolare lo spessore del film alla fine del pendio ($x = L$). [20%]

Continuità: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$; *NS:* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$; *Taglio:* $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Equazione di Bernoulli (forma integrale) $B_{1\to 2} : \dfrac{v_1^2}{2} + gh_1 + \dfrac{p_1}{\rho} + w_s - l_v = \dfrac{v_2^2}{2} + gh_2 + \dfrac{p_2}{\rho}$

Conservazione della quantità di moto $\quad 0 = w(\beta_1 \mathbf{v}_1 - \beta_2 \mathbf{v}_2) + p_1 \mathbf{A}_1 - p_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{F} + \left(\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \rho A dz\right) \mathbf{g}$

EXE 1



$$0 = \dot{m}\left[\beta_1 v_{1,z} - \beta_2 v_{2,z}\right] + P_1 A_{1,z} - P_2 A_{2,z} - F_z + \int_{z_1}^{z_2} \rho A g_z \, dz$$

$\beta_1 = \beta_2 = 1$ $\qquad P_1 = P_2 = P_{atm}$

$v_{1,z} = v$ $\qquad A_{1,z} = A_{2,z} = \frac{\pi d^2}{4} = A$

$v_{2,z} = 0$ $\qquad g_z = g$

$$\Rightarrow 0 = \dot{m} v - F_z + \rho A g h \Rightarrow \boxed{F_z = \dot{m} v + \rho \frac{\pi d^2 g h}{4}}$$

$$\dot{m} = \rho v \frac{\pi d^2}{4}$$

Se la piastra si muove : $\boxed{F_z = \dot{m}(v - u) + \rho \frac{\pi d^2 g h(t)}{4}}$

con $h(t) = h + u \cdot t$ e $\dot{m} = \rho (v - u) \frac{\pi d^2}{4}$

$$\boxed{P_{tr} = F_z \cdot u}$$

1.1 $\quad F_z = \rho \frac{\pi d^2}{4} \left(v^2 + g h \right)$

1.2 $\quad P_{tr} = \rho \frac{\pi d^2}{4} \left[(v - u)^2 + g h(t) \right] u$

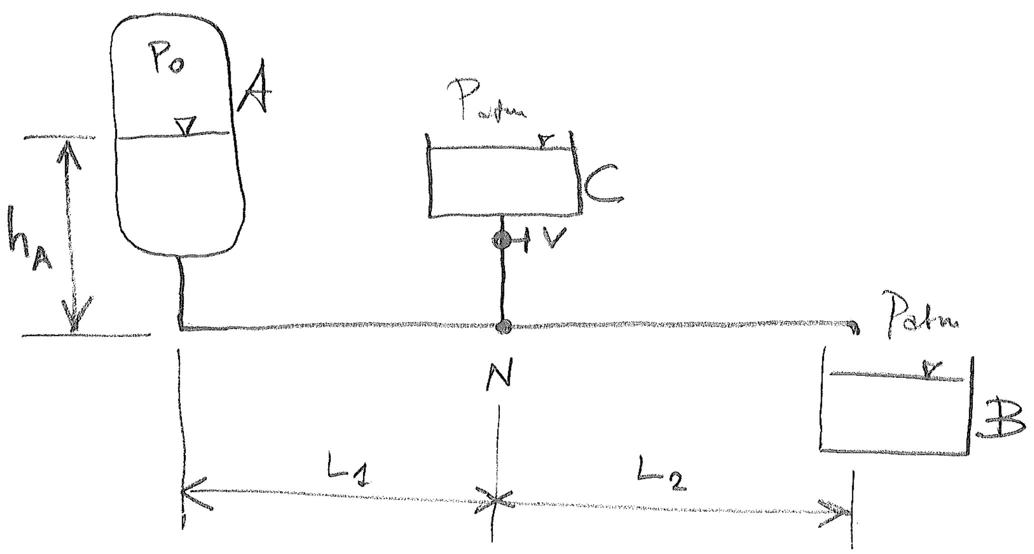
$$\eta = \frac{P_{tr}}{P_{fornib}} \quad \text{con} \quad P_{fornib} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{dm}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} v^3 = \frac{1}{8} \rho \pi d^2 v^3$$

$$\eta = \frac{\cancel{\rho\pi d^2}\frac{\cancel{\rho\pi d^2}}{4}\left[(v-u)^2 + g\,h(t)\right]u}{\frac{1}{8}\cancel{\rho\pi d^2}\, v^3} = \frac{2\left[(v-u)^2 + g\,h(t)\right]u}{v^3}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left[\left(v-\frac{1}{2}v\right)^2 + g\,h(t)\right]\cancel{\tfrac{1}{2}}v}{v^3} = \frac{\frac{1}{4}v^2 + g\,h(t)}{v^2}$$

$$= \frac{v^2 + 4g\,h(t)}{4v^2} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{2\left[(v-u)^2 + g\,h(t)\right]u}{v^3} = \frac{v^2 + 4g\,h(t)}{4v^2}}$$



2.1) Valvola V chiusa:

$$B_{AB} : \frac{P_A}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_A^2} + g h_A + \cancel{w_s} = \frac{P_B}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_B^2} + \cancel{g h_B} + lv_{A\to B}$$

$P_A = P_0$ $\qquad$ $P_B = P_{atm}$

$v_A \simeq 0$ $\qquad$ $v_B \simeq 0$

$w_s = 0$ $\qquad$ $h_B = 0$

$$lv_{A\to B} = \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho} + g h_A$$

$$= \frac{1.3\cdot 10^5 - 10^5}{10^3} + 10 \cdot 1 = 40 \ \frac{m^2}{s^2}$$

$$lv_{A\to B} = 2 f_{AB} v_{AB}^2 \frac{L_{AB}}{D} = 2 \cdot 0{,}079 \, Re_{AB}^{-0.25} v_{AB}^2 \frac{L_{AB}}{D}$$

$$= 0.158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.25} v_{AB}^{1.75} \frac{L_1 + L_2}{D}$$

$$= 0.158 \left(10^6\right)^{-0.25} \cdot \frac{200}{(0.1)^{1.25}} v_{AB}^{1.75}$$

$$l v_{A\to B} \cong 10\, v_{AB}^{1.75} \implies \underline{v_{AB}} = \left(\frac{40}{10}\right)^{1/1.75} =$$

Pertanto : $\dot{m}_{AB} = \rho\, v_{AB} \frac{\pi D^2}{4} = 10^3 \cdot 1{,}58 \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{4} = 12{,}47 \frac{kg}{s}$

$$\left[\, Q_{AB} \cong 1.73 \cdot 10^{-2}\ m^3/s \,\right]$$

2.2) Valvola V aperta :

$\dot{m}_{NB} = 12{,}47\ kg/s \implies v_{NB} = 1{,}58\ m/s$

$\dot{m}_{NC} = 8\ kg/s \implies v_{NC} = \frac{4\dot{m}_{NC}}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \cdot 8}{10^3 \pi 10^{-2}} \cong 1.02\ m/s$

$$v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} = 2{,}6\ m/s$$

$$B_{NC}: \quad \frac{P_N}{\rho} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2} v_{NC}^2}}_{O(1)} + \cancel{g h_N} + \cancel{w_s} = \underbrace{\frac{P_C}{\rho}}_{O(10^2)} + \cancel{\tfrac{1}{2} v_C^2} + \underbrace{g h_C}_{O(10^1)} + l v_{N\to C}$$

trasc.

$$\boxed{P_N = P_{atm} + \rho g h_C + \rho\, l v_{N\to C}}$$

B_{NB} : $\boxed{P_N = P_{atm} + \rho\, l v_{N \to B}}$

Da B_{NC} : $P_N = \underbrace{10^5 + \underbrace{10^3 \cdot 10 \cdot 2}_{2 \cdot 10^4\, Pa} + \underbrace{10^3 \cdot 0.158 (10^6)^{-0.25} (1{,}02)^{1.75} \frac{4}{(0.1)^{1.25}}}_{\sim 368\, Pa}}_{= 1.2 \cdot 10^5\, Pa}$

(TERMINE TRASCURABILE POICHE' $L_{NC} = h_C$ PICCOLO)

Da B_{NB} : $P_N = \underbrace{10^5 + \underbrace{10^3 \cdot 0{,}158 (10^6)^{-0.25} (1{,}58)^{1.75} \frac{160}{(0.1)^{1.25}}}_{\sim 3.2 \cdot 10^4\, Pa}}_{= 1.32 \cdot 10^5\, Pa}$ (NON TRASCURABILE)

Serve una pressione $P_N = 1.32 \cdot 10^5\, Pa$ per garantire la portata $\dot{m}_B$ al serbatoio B.

Quindi :

$$B_{AN} : \frac{P_A}{\rho} + g h_A + \cancel{\frac{1}{2} v_A^2}^{\,0} + \cancel{W_S}^{\,0} = \frac{P_N}{\rho} + \cancel{g h_N}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{2} v_{AN}^2}^{\,\text{trasc.}} + l v_{A \to N}$$

$P_A = P_0$ INCOGNITA ! $\qquad P_N = 1.32 \cdot 10^5\, Pa$

$$\boxed{P_0 = P_N - \rho g h_A + \rho\, l v_{A \to N}}$$

$L_{AN} \simeq L_1$

$$l v_{A \to N} = 2 f_{AN} v_{AN}^2 \frac{L_{AN}}{D} = 0.158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0.25} v_{AN}^{1.75} \frac{L_{AN}}{D^{1.25}} =$$

$\longrightarrow$

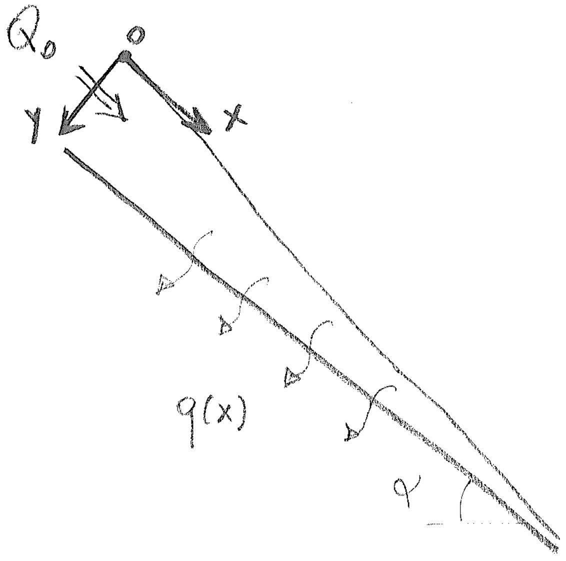
$$\ell_{v_{A\to N}} = 0.158\,(10^6)^{-0.25}\,(3.228)^{1.75}\,\frac{40}{(0.1)^{1.25}} \cong 19{,}04\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P_0 = \overset{1.32}{\cancel{1.57}}\cdot 10^5 - 10^3\cdot 10\cdot 1 + 10^3\cdot 27{,}63$$

$$\cong 1{,}51\cdot 10^5\,Pa \Rightarrow \boxed{P_0 \cong 1{,}51\cdot 10^5\,Pa}$$

EXE 3



$$q(x) = \frac{K}{\delta(x)} \left[\frac{m^3}{m^2 \cdot s} \right]$$

$$\boxed{Re \frac{\delta(x)}{L} \ll 1} \quad \text{HP.}$$

- TH. LUBRIFICAZIONE
- EQ. DI CONSERVAZIONE:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha$$

$$v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1 : $v_x(x, y = \delta(x)) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^2(x) + C_1 \delta(x) + C_2 = 0 \quad (*)$$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(x, y=0) = 0$

$$\Rightarrow \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y \Big|_{y=0} + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^2(x)$$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left[y^2 - \delta^2(x)\right]}$$ PROFILO DI VELOCITA'

$$\Downarrow$$

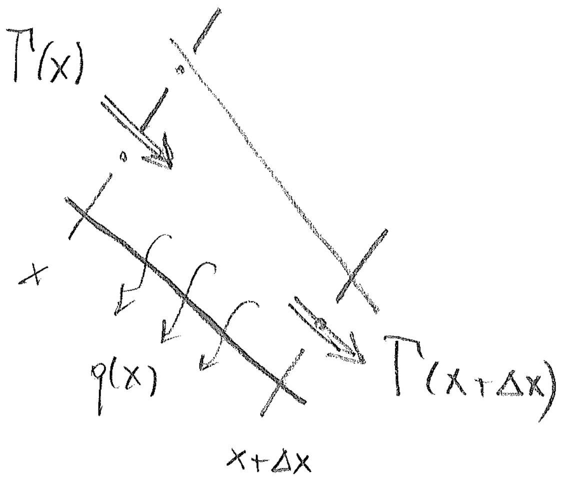
$$\tau_{xy}(x,y) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_w = \tau_{x,y}(x, y = \delta(x)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta(x)$$

$$\boxed{\tau_w = -\rho g \sin\alpha \cdot \delta(x)}$$ SFORZO DI TAGLIO ALLA PARETE

BILANCIO DI MASSA :



$$\Gamma(x) = \Gamma(x+\Delta x) + \rho q(x)\Delta x$$

$$\frac{\Gamma(x+\Delta x) - \Gamma(x)}{\Delta x} = -\rho q(x)$$

Nel lim $\Delta x \to 0$:

NON INTEGRABILE!

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = -\rho q(x) \Rightarrow d\Gamma(x) = -\rho q(x)\, dx$$

Poiché $\Gamma = \rho \frac{Q}{W}$: $\quad \frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{\rho}{W}\frac{dQ(x)}{dx} = -\rho q(x) \Rightarrow \boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)W}$

$\left[\frac{m^3}{m\,s}\right] \left[\frac{m^3}{m\,s}\right]$

$$Q(x) = \int_0^W \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\, dy\, dz = \frac{W}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\int_0^{\delta(x)} \left[y^2 - \delta^2(x)\right] dy$$

$$Q(x) = \frac{W}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left[\frac{\delta^3(x)}{3} - \delta^3(x)\right] = \frac{W}{\cancel{2}\mu}\left(-\rho g \sin\alpha\right)\left(-\frac{\cancel{2}}{3}\delta^3(x)\right)$$

$$= \frac{\rho g W \delta^3(x) \sin\alpha}{3\mu} \quad \left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^3}}\,\frac{m}{s^2}\,m^{\cancel{3}\,4}\,\frac{\cancel{m}\cdot s}{\cancel{kg}}\right] \checkmark$$

Sostituendo nel bilancio di massa:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{\rho g W \sin\alpha}{3\mu}\underbrace{\frac{d\delta^3(x)}{dx}}_{3\delta^2(x)\frac{d\delta(x)}{dx}} = -\underbrace{q(x)W}_{\frac{K}{\delta(x)}\cdot \cancel{W}}$$

$$\frac{\rho g \cancel{W} \sin\alpha}{\mu}\delta^2(x)\frac{d\delta(x)}{dx}$$

$$\rho g \sin\alpha \cdot \delta^2(x)\frac{d\delta(x)}{dx} = -\frac{K}{\delta(x)} \Rightarrow \delta^3(x)\, d\delta(x) = -C\cdot dx$$

con $C = \dfrac{\mu K}{\rho g \sin\alpha}$

$$\left.\frac{\delta^4(x)}{4}\right|_{\delta_0}^{\delta(x)} = -\left. C\cdot x\right|_0^x \Rightarrow \frac{\delta^4(x)}{4} - \frac{\delta_0^4}{4} = -C\cdot x$$

Alla fine del tratto da bonificare:

$$x = L \Rightarrow \boxed{\delta_L = \delta(x=L) = \sqrt[4]{\delta_0^4 - 4\frac{\mu K\cdot L}{\rho g \sin\alpha}}}$$