FLUIDODINAMICA - AA 2009/2010

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

28 Gennaio 2010

1

Si consideri il flusso di un fluido molto viscoso tra due dischi piani, paralleli e controrotanti. Si assuma che il disco superiore ruoti con velocità angolare Ω, mentre il disco inferiore ruoti con velocità angolare $-\Omega$, con Ω $[s^{-1}]$ costante. Sapendo che i dischi hanno raggio R e si trovano a distanza $H << R$, si chiede di:

1. determinare l'espressione del profilo di velocità del fluido; [Suggerimento: che tipo di moto si instaura tra i due dischi?] [15%]
2. determinare la forza d'attrito F esercitata dal fluido su ciascun disco; [10%]
3. determinare il momento torcente G esercitato dal fluido su ciascun disco. [10%]

2

Sia dato il campo di moto stazionario piano $\mathbf{u}(x,y) = Ax\mathbf{i} - Ay\mathbf{j}$, dove A è una costante avente dimensione s^{-1}, mentre x e y variano nell'intervallo $[0 : L]$. Nell'ipotesi che tale campo di moto descriva il flusso potenziale di un fluido ideale inviscido, si chiede di:

1. determinare l'espressione della funzione di flusso, $\Psi(x,y)$; [N.B.: $u_x = -\partial\Psi/\partial y$; $u_y = \partial\Psi/\partial x$] [10%]
2. determinare l'espressione della funzione potenziale, $\Phi(x,y)$; [N.B.: $u_x = -\partial\Phi/\partial x$; $u_y = -\partial\Phi/\partial y$] [10%]
3. disegnare le linee di flusso (linee a Ψ costante) e le linee iso-potenziale (linee a Φ costante) nel piano (x,y), indicando eventuali punti di stagnazione; [5%]
4. determinare la differenza di pressione esistente tra due punti M, di coordinate $(x = 0, y = 0.25L)$, ed N, di coordinate $(x = 0, y = 0.75L)$, supponendo nota la densità ρ del fluido. [10%]

3

Un fluido Newtoniano incomprimibile si muove in flusso laminare entro una tubazione di diametro D. Il fluido sbocca dal tubo in un ambiente a pressione atmosferica formando un getto orizzontale, come mostrato in figura. Dopo un breve tratto (compreso tra le sezioni 1 e 2 in figura), la velocità del getto si ridistribuisce passando da un profilo parabolico (alla sezione 1) ad un profilo uniforme (alla sezione 2).

1. Determinare il diametro del getto a valle, D_j, in funzione del diametro D della tubazione, sapendo che $\alpha_1 = \frac{<v_1^3>}{<v_1>^3} = 2$ e $\alpha_2 = \frac{<v_2^3>}{<v_2>^3} = 1$. [10%]
2. Utilizzando il valore di D_j ricavato al punto precedente, determinare un'espressione per la velocità $< v_2 >$ del fluido in funzione della sua densità ρ, sapendo che $\beta_1 = \frac{<v_1^2>}{<v_1>^2} = \frac{4}{3}$ e $\beta_2 = \frac{<v_2^2>}{<v_2>^2} = 1$. [20%]

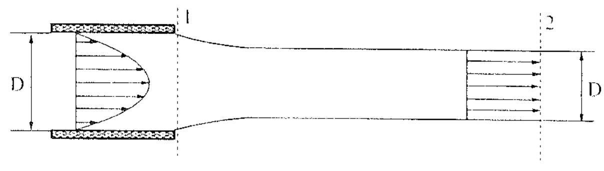


Figura 1: Schema di un getto libero con volume di controllo per l'applicazione di bilanci macroscopici.

Eq. Continuità : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right] = 0$, *Sforzo di taglio:* $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \mu\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}\right]$

Eq. Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]$$

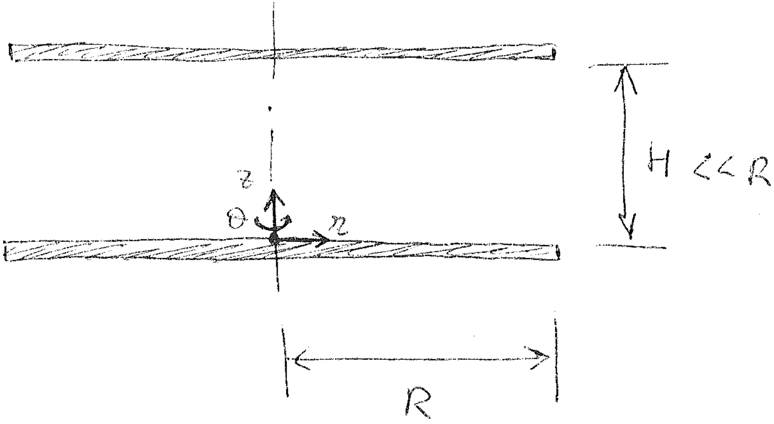
$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

Equazione di Bernoulli (forma differenziale): $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(v^2) + g\mathrm{d}h + \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} = \delta w_s - \mathrm{d}l_v$

Conservazione della quantità di moto: $0 = w(\beta_1\mathbf{v}_1 - \beta_2\mathbf{v}_2) + p_1\mathbf{A}_1 - p_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{F} + \left(\int_{z_1}^{z_2}\rho A\mathrm{d}z\right)\mathbf{g}$

EXE 1



Ipotizzo $Re = \frac{\rho V H}{\mu} \to 0$ (fluido molto viscoso) e quindi flusso di puro scorrimento. Posso quindi trascurare i termini inerziali nelle N-S. Faccio inoltre le seguenti ip:

1. Flusso stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
2. Simmetria: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
3. Flusso 2D: $v_z = 0$, $v_r = 0$

NS_r $\quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}$

NS_θ $\quad \boxed{0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right]} \Rightarrow$ Equaz. da integrare con le C.C. ⊛

NS_z $\quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$

CONT. $\quad 0 = 0$

⊛
C.C. #1 : $v_\theta(z = 0) = -\Omega r$

C.C. #2 : $v_\theta(z = H) = \Omega r$

Dalle C.C. posso ipotizzare quale sarà l'espressione del profilo di velocità per $v_\theta(r, z)$. Dovrà infatti essere del tipo : $\boxed{v_\theta(r,z) = r\cdot f(z)}$ (1)

A tale espressione si arriva anche dall'eq. di continuità senza imporre la condizione di simmetria:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)=0 \Rightarrow \frac{u_\theta}{\cancel{r}} = \underbrace{\text{COST}}_{\text{rispetto a } \theta} = r\cdot \text{COST}$$

$$\downarrow$$

$$u_\theta = r\cdot f(z)$$

Dalla (1) ricaviamo:

$$0 = \mu\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{1}{r}\underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot r f(z))}_{f(z)\cdot 2r}}_{2f(z)}\right)}}_{\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(2f(z))=0}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r f(z))}_{r\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = r\frac{d^2 f(z)}{dz^2}}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \mu r\frac{d^2 f(z)}{dz^2} \Longrightarrow f(z) = C_1 z + C_2$$

C.C. #1 : $-\Omega r = C_2 \cancel{r}^{-1} \Longrightarrow C_2 = -\Omega$

C.C. #2 : $\Omega r = \frac{C_1 H + C_2}{r^{-1}} \longrightarrow C_1 = \frac{2\Omega r}{H}\frac{1}{r} = \frac{2\Omega}{H}$

Pertanto:

$$\boxed{v_\theta(r,z) = \frac{2\Omega r}{H}\left(z - \frac{H}{2}\right)}$$ PROFILO DI VELOCITA' [15%]

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \mu\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}}^{\,0}\right] =$$

$$= \mu\, \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{2\Omega r}{H}\left(z - \frac{H}{2}\right)\right] = \frac{2\mu\Omega}{H}\cdot r$$

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tau_{z\theta}\cdot r\,d\theta\,dr = \frac{4\pi\mu\Omega}{H}\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{R^3/3} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\mu\Omega}{H}R^3$$

$$\left[\frac{kg}{ms}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{m^3}{m}\right] = \left[kg\,\frac{m}{s^2}\right] = [N] \text{ ok!}$$

$$\boxed{F = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\mu\Omega}{H}R^3}$$ [10 %]

$$G = \int dF\cdot r = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tau_{z\theta}\cdot r^2\,d\theta\,dr = \frac{2\mu\Omega}{H}\cdot 2\pi\underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{R^4/4}$$

$$= \frac{\pi\mu\Omega}{H}\cdot R^4$$

$$\left[\frac{kg}{ms}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{m^4}{m}\right] = [N\cdot m] \text{ ok!}$$

$$\boxed{G = \frac{\pi\mu\Omega}{H}\cdot R^4}$$ [10 %]

EXE 2

$$\vec{u}(x,y) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} \quad \text{con} \quad u_x = Ax \quad ; \quad u_y = -Ay$$

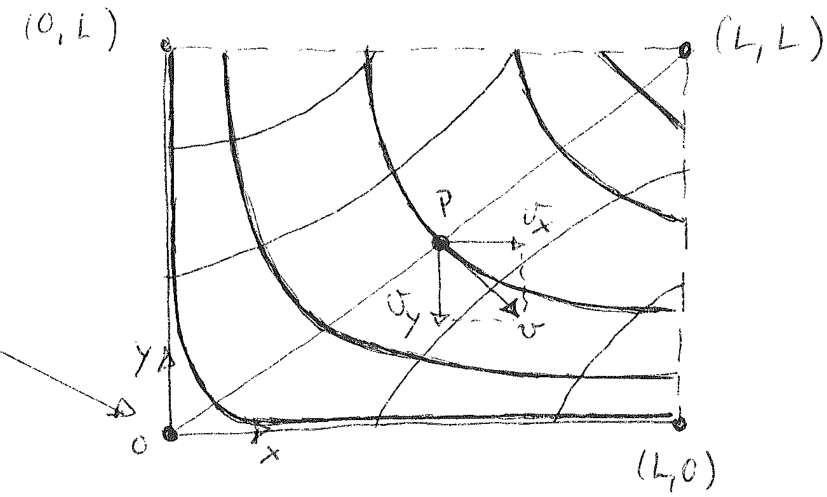
$$\left.\begin{aligned} \psi &= -\int u_x\,dy = -Axy + f(x) \\ \psi &= \int u_y\,dx = -Axy + f(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = f(y) = 0$$

$$\boxed{\psi(x,y) = -Axy} \qquad [10\%]$$

$$\left.\begin{aligned} \phi &= -\int u_x\,dx = -A\frac{x^2}{2} + f(y) \\ \phi &= -\int u_y\,dy = +\frac{Ay^2}{2} + f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = -\frac{Ax^2}{2} \; ; \; f(y) = +\frac{Ay^2}{2}$$

$$\boxed{\phi(x,y) = -\frac{Ax^2}{2} + \frac{Ay^2}{2}} \qquad [10\%]$$

Punto di stagnazione!



—— iso-ψ

—— iso-ϕ

[5%]

$$B_{M\to N} : \frac{1}{2}v_M^2 + \frac{p_M}{\rho} + g h_M = \frac{1}{2}v_N^2 + \frac{p_N}{\rho} + g h_N \qquad \begin{cases} w_s = l_{v\,M\to N} = 0 \\ h_M \neq h_N \;!!\; \text{se cella verticale} \end{cases}$$

$$\frac{P_M - P_N}{\rho} = \frac{1}{2}\left(v_N^2 - v_M^2\right) + g\left(h_N - h_M\right)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = A^2(x^2 + y^2) \longrightarrow v_N^2 = v^2(x=0,\ y=0.75L)$$

$$\longrightarrow v_M^2 = v^2(x=0,\ y=0.25L)$$

$$\Rightarrow v_N^2 = A^2 \cdot \frac{9}{16}L^2 \ ; \ v_M^2 = A^2 \frac{1}{16} L^2 \Rightarrow v_N^2 - v_M^2 = \frac{A^2L^2}{2}$$

Se il piano è verticale allora $h_N - h_M = \frac{3}{4}L - \frac{1}{4}L = \frac{L}{2}$

e risulta:

$$\boxed{P_M - P_N = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2L^2}{2} + gL\right)} \quad [10\%]$$

$$\Downarrow$$

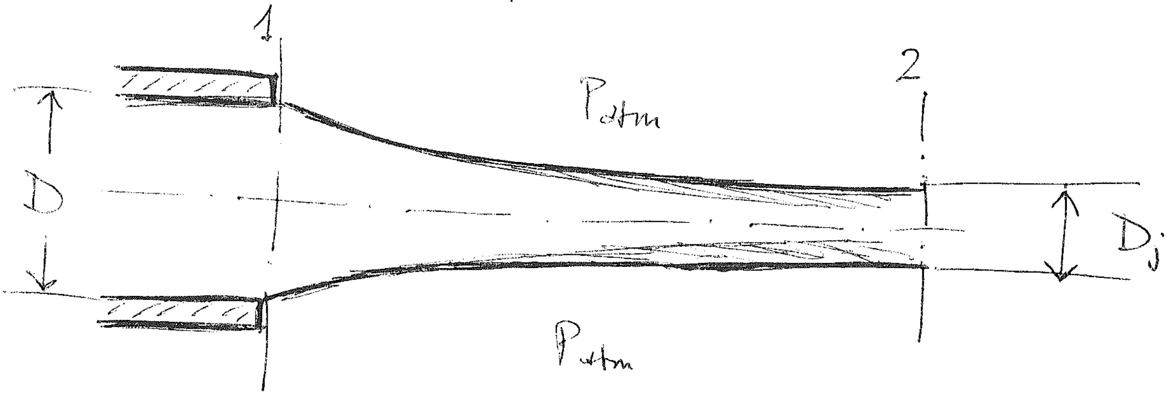
$$\boxed{P_M - P_N = \frac{1}{4}\rho L\left(A^2L + 2g\right)}$$

Se il piano è considerato orizzontale allora $h_N = h_M$

e risulta solo:

$$\boxed{P_M - P_N = \frac{1}{4}\rho A^2 L^2} \quad [10\%]$$

EXE 3



$\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 4/3$ $\qquad\qquad$ $\alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 1$

Applico le eq. di conservazione tra le sez. 1 e 2:

1. MASSA: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \langle v_1 \rangle A_1 = \langle v_2 \rangle A_2$ ✱

2. ENERGIA: $\frac{1}{2}\alpha_1 \langle v_1 \rangle^2 + \cancel{g h_1} + \cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \underset{0}{\cancel{W_s}} = \frac{1}{2}\alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 + \cancel{g h_2} + \cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \underset{0}{\cancel{l_v}}$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$

$h_1 = h_2 = h$

$$\frac{1}{2}\alpha \langle v_1 \rangle^2 = \frac{1}{2}\alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 \Rightarrow \langle v_1 \rangle^2 = \frac{1}{2}\langle v_2 \rangle^2$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \cancel{\langle v_2 \rangle^2}\frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{1}{2}\cancel{\langle v_2 \rangle^2} \Rightarrow A_2^2 = \frac{1}{2}A_1$$

$$\Rightarrow D_j^4 = \frac{1}{2}D^4 \Rightarrow \boxed{D_j = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\,D} \quad [10\%]$$

3. Q.d.M.$_x$: $0 = \dot{m}\left[\beta_1 \langle v_1 \rangle - \beta_2 \langle v_2 \rangle\right] + \underbrace{P_1 A_1 - P_2 A_2}_{P_1 = P_2 = P_{atm}} - \overset{0}{\cancel{F_x}} + \overset{0}{\cancel{\int_{z_1}^{z_2} \rho g_x A(z)}}$

$$0 = \frac{4}{3}\rho \langle v_1 \rangle^2 A_1 - \rho \langle v_2 \rangle^2 A_2 + P_{atm}(A_1 - A_2)$$

$$0 = \frac{4}{3}\rho \langle v_2 \rangle^2 \frac{A_2^2}{\cancel{A_1^2}} \cdot \cancel{A_1} - \rho \langle v_2 \rangle^2 A_2 + P_{atm}(A_1 - A_2)$$

$$= \rho \langle v_2 \rangle^2 \left(\frac{4}{3}\frac{A_2^2}{A_1} - A_2 \right) + P_{atm}(A_1 - A_2)$$

$$\langle v_2 \rangle^2 = \frac{P_{atm}}{\rho} \cdot \underbrace{\frac{A_1 - A_2}{A_2\left(1 - \frac{4}{3}\frac{A_2}{A_1}\right)}}$$

$$+ \frac{A_1 - A_2}{\frac{A_2}{3A_1}(3A_1 - 4A_2)} = + \frac{3A_1(A_1 - A_2)}{A_2(3A_1 - 4A_2)} = + \frac{3D^2}{D_j^2} \cdot \frac{(D^2 - D_j^2)}{(3D^2 - 4D_j^2)} =$$

$$= + \frac{3D^2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\, D^2} \cdot \left(\frac{D^2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\, D^2}{3D^2 - 4\sqrt{\frac{1}{2}}\, D^2} \right) = + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2} - 4}$$

$$\boxed{\langle v_2 \rangle = \sqrt{\frac{P_{atm}}{\rho} \cdot \left[\frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 - 2\sqrt{2}} \right]}}$$

[20%]