Fluidodinamica - AA 2006/2007

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

01 Dicembre 2006

1

Si consideri il campo di moto prodotto in un fluido da lastra piana in movimento con velocità uniforme U per $t < 0$ ed istantaneamente fermata all'istante $t = 0$.

1. Semplificare le equazioni di Navier-Stokes per il caso in esame. [10%]
2. Calcolare il profilo di velocità utilizzando la variabile di similitudine $\eta = y/\delta(t)$ con $\delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$. [20%]
3. Determinare l'espressione del taglio alla parete, τ_{xy}, in funzione del tempo, t. [10%]

2

Un film laminare di acqua scorre lungo un piano di lunghezza L inclinato di un angolo β rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è costituito da materiale poroso, il quale permette un deflusso rappresentabile dalla legge $q = K/(1+x)$, con q tasso di assorbimento espresso in m^3/m^2s, K costante espressa in m^3/ms e con x generica posizione lungo il piano inclinato.

1. Semplificare le equazioni di continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame. (Nota: indicare chiaramente le ipotesi semplificative adottate). [10%]
2. Calcolare il profilo di velocità del film (assumendo taglio nullo all'interfaccia aria-acqua). [10%]
3. Calcolare la portata specifica iniziale $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$, misurata in kg/ms, e lo spessore iniziale δ_0 del film affinchè questo risulti completamente assorbito dal materiale poroso alla fine del piano inclinato (ovvero a x=L). [10%]

3

Un getto piano di un fluido Newtoniano (avente densità ρ e viscosità μ) colpisce una lastra piana, inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione del getto, e si separa in due vene fluide. Il sistema getto+piastra è posizionato nel piano orizzontale $x - y$. Immediatamente prima dell'impatto, il getto ha spessore h, larghezza W e portata volumetrica Q. Ipotizzando che il getto sia stazionario e che le perdite per attrito siano trascurabili, si chiede di:

1. determinare la forza F esercitata dal getto sulla piastra; [15%]
2. determinare la portata associata alle due vene fluide che si generano successivamente all'impatto. [15%]

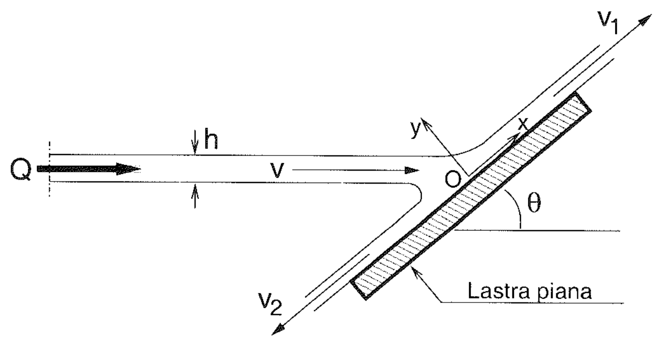


Fig. 2 Getto piano che incide su una lastra piana inclinata di un angolo θ (es. 3)

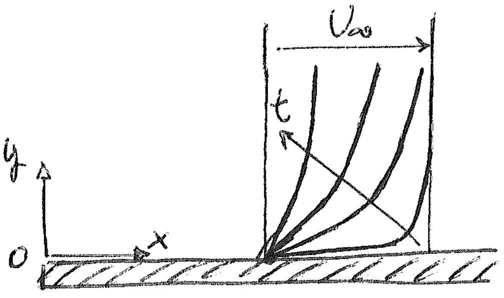
Continuità $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$ *Navier-Stokes* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Equazione di Bernoulli (forma differenziale) $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\alpha v^2) + g\mathrm{d}h + \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} = \delta w_s - \mathrm{d}l_v$

Conservazione della quantità di moto $\mathbf{0} = w(\beta_1\mathbf{v}_1 - \beta_2\mathbf{v}_2) + p_1\mathbf{A}_1 - p_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{F} + \left(\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\rho A\mathrm{d}z\right)\mathbf{g}$

Funzione degli errori $\mathrm{erf}(\xi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\xi}\exp[-\eta^2]d\eta$

EXE 1



Lastra piana fermata istantaneamente

Continuità : $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

$\rightarrow$ flusso completamente sviluppato

$v_x = v_x(y,t)$

$v_y = v_z = 0$

$NS_x \; : \; \rho \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ ⊛

$NS_y \; : \; 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y}$

$NS_z \; : \; 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$

$$⊛ \quad \rho\left(\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + \cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}^{0} + \cancel{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}^{0} + \cancel{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}^{0}\right) = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{0} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}^{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}^{0}\right)$$

Ipotizzando la similitudine del profilo di velocità, deve valere la condizione:

$$\frac{v_x}{U_\infty} = f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = \frac{y}{\delta(t)} \quad e \quad \boxed{\delta(t) = 2\sqrt{\nu t}}$$

SPESSORE DELLO STRATO LIMITE

Sfruttando questa ipotesi, si può riscrivere la NS_x come:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = U_\infty \frac{\partial f(\eta)}{\partial t} = U_\infty \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = U_\infty f' \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) =$$

$$= U_\infty f' \frac{y}{2\sqrt{\nu}}\left(-\frac{1}{2} t^{-3/2}\right) = U_\infty f' \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\left(-\frac{1}{2t}\right)$$

- $$\frac{\partial v_x}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial f(\eta)}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f' \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = U_\infty f'\cdot\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$$

- $$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[U_\infty f' \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right] = \frac{U_\infty}{2\sqrt{\nu t}}\cdot\frac{\partial f'}{\partial y} = \frac{U_\infty}{2\sqrt{\nu t}} f''\cdot\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = U_\infty f''\cdot\frac{1}{4\nu t}$$

$$\Downarrow$$

$$-\rho \cancel{U_\infty} f'\cdot\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\frac{1}{2t} = \mu \cancel{U_\infty} f''\frac{1}{4\nu t}$$

$$-f'\cdot\eta = \cancel{\frac{\mu}{\rho}} f'' \frac{2\cancel{t}}{4\cancel{\nu t}}$$

$$\boxed{f'' + 2\eta f' = 0} \qquad (1)$$

L'eq. (1) si integra con le seguenti c.c.:

- $v_x(y=0,\ t<0) = U_\infty$
- $v_x(y=0,\ t\geq 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\eta=0)=0$
- $v_x(y\to\infty,\ t) = U_\infty \quad \Longrightarrow \quad f(\eta\to\infty) = 1$

La soluzione dell'eq. (1) è data dalla error function:

$$f(\eta) = C_1\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta + C_2$$

Dalle c.c. si ricavano le costanti di integrazione:

$$f(\eta=0)=0 \Rightarrow C_1\cancel{\int_0^{\eta=0} e^{-\eta^2}d\eta}^{\,0} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$f(\eta\to\infty)=1 \Rightarrow C_1\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta + \cancel{C_2}^{\,0} = 1 \Rightarrow C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

Si trova quindi $C_2=0$ e $C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Pertanto:

$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_x(y,t) = \frac{2U_\infty}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta} \qquad (2)$$

Calcolo del taglio alla parete, τ_{xy}:

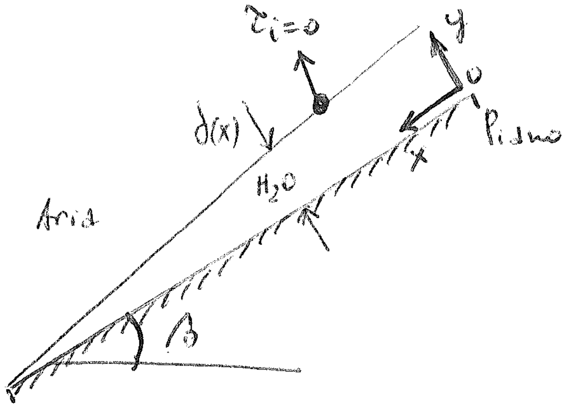
$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}}^{\,0}\right) = \frac{2\mu U_\infty}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right) =$$

$$= \frac{2\mu U_\infty}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\cancel{2}\mu U_\infty}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\eta^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\nu t}}$$

$$= \frac{\mu U_\infty}{\sqrt{\pi\nu t}}\, e^{-\eta^2}$$

Alla parete: $y=0 \Rightarrow \eta=0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy}\big|_{y=0} = \frac{\mu U_\infty}{\sqrt{\pi\nu t}}}$

EXE 2



Piano inclinato : L, β

Tasso di assorbimento : $q = \dfrac{K}{1+x}$

$[q] = \left[\dfrac{m^3}{m^2 s}\right]$, $K = \left[\dfrac{m^3}{m s}\right]$

2.1) Ipotesi :

flusso stazionario $\rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

flusso 2D $\rightarrow \dfrac{\partial}{\partial z} = 0$

flusso "bidirezionale" $\rightarrow v_x(x,y) \neq 0$

$v_y(x,y) \neq 0$

$v_z = 0$

Vale anche $\boxed{Re \cdot \dfrac{\delta(x)}{L} \ll 1}$ per cui si può sfruttare la teoria della lubrificazione per scrivere le eq. di NS in forma approssimata (sapendo che $\tilde{v}_j \dfrac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} \ll \dfrac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}$ e che $\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} \ll \dfrac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}$)

Continuità : $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ con $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{dP}{dx} = -\rho g \sin\beta$

NS_y : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$ con $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\beta$

2.2) Calcolo del profilo di velocità assumendo $\tau_i = 0$:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\frac{\rho g \sin\beta}{\mu} \xrightarrow{\int \#1} \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g \sin\beta}{\mu} y + C_1$$

$$v_x(x,y) = -\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1 : $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

C.C. #2 : $\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho g \sin\beta}{\mu}\delta(x)}$

$\Downarrow$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}\left[2\delta(x) y - y^2\right]}$$

PROFILO DI VELOCITÀ NEL FILM

2.3) Calcolo di Γ_0 e δ_0

Innanzitutto ricaviamo Γ integrando il profilo di velocità

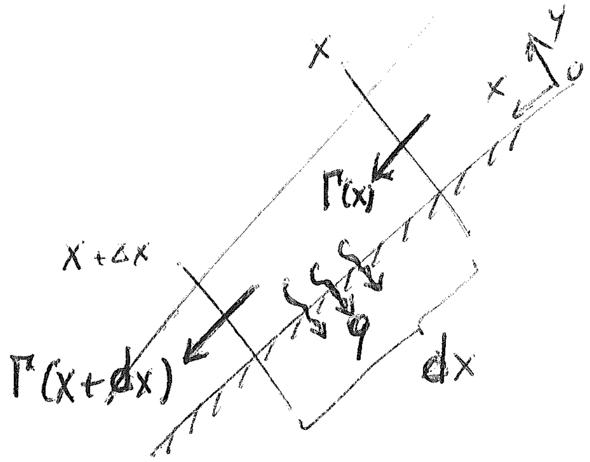
$$\Gamma(x) \triangleq \rho \frac{Q(x)}{W} = \rho \cdot \underbrace{\langle v_x(x,y)\rangle}_{\text{vel. media}} \frac{A}{W} = \rho\left[\frac{1}{\cancel{\delta(x)}}\int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy\right]\cdot\frac{\cancel{\delta(x)}\cancel{W}}{\cancel{W}}$$

$$= \rho \cdot \frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}\underbrace{\int_0^{\delta(x)}\left[2\delta(x) y - y^2\right]dy}_{2\delta(x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\delta(x)} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\delta(x)} = \delta^3(x) - \frac{\delta^3(x)}{3} = \frac{2\delta^3(x)}{3}} = \frac{\rho^2 g \sin\beta}{3\mu}\delta^3(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(x) = \frac{\rho^2 g \sin\beta}{3\mu}\delta^3(x)} \quad (1)$$

Possiamo ricavare un'espressione per Γ anche scrivendo il bilancio di massa su un volumetto di fluido nel film (tenendo conto che $q \triangleq \frac{K}{1+x}$):

GIRA →



$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \Rightarrow \Gamma_{in} = \Gamma_{out}$$

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+dx) + q \cdot \rho \cdot dx$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{kg}{m\,s} \qquad \frac{kg}{m\,s} \qquad \underbrace{\frac{m^3}{m^2 s}}_{\frac{\cancel{m^3}}{m^2 s}\cdot\frac{kg}{\cancel{m^3}}\cdot \cancel{m}}$$

ok!

Si ha: $\dfrac{\Gamma(x+dx) - \Gamma(x)}{dx} = -\rho q \xRightarrow{\lim dx\to 0} \boxed{\dfrac{d\Gamma}{dx} = -\rho q}$

Integrando: $\displaystyle\int_{\Gamma(x=0)}^{\Gamma(x)} d\Gamma = -\rho K \int_{x=0}^{x} \frac{dx}{1+x} \rightarrow \Gamma(x) = \Gamma(x=0) - \rho \ln(1+x)$

Essendo $\Gamma(x=0) = \Gamma_0$ si ha:

$$\boxed{\Gamma(x) = \Gamma_0 - \rho \ln(1+x)} \quad (2)$$

Per calcolare Γ_0 sfrutto il fatto che tutto il film viene assorbito a fine piano inclinato ovvero a $x=L$:

$$x = L \overset{(2)}{\Rightarrow} \cancel{\Gamma(x=L)}^{0} = \Gamma_0 - \rho \ln(1+L) \Rightarrow \boxed{\Gamma_0 = \rho \ln(1+L)}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \Gamma(x=0) = \Gamma_0 = \frac{\rho^2 g \sin\beta}{3\mu} \underbrace{\delta^3(x=0)}_{\delta_0}$$

SPESSORE INIZIALE DEL FILM

$$\boxed{\delta_0 = \left(\frac{3\mu\Gamma_0}{\rho^2 g \sin\beta}\right)^{1/3} = \left[\frac{3\mu K}{\rho g \sin\beta} \ln(1+L)\right]^{1/3}}$$

EXE 3

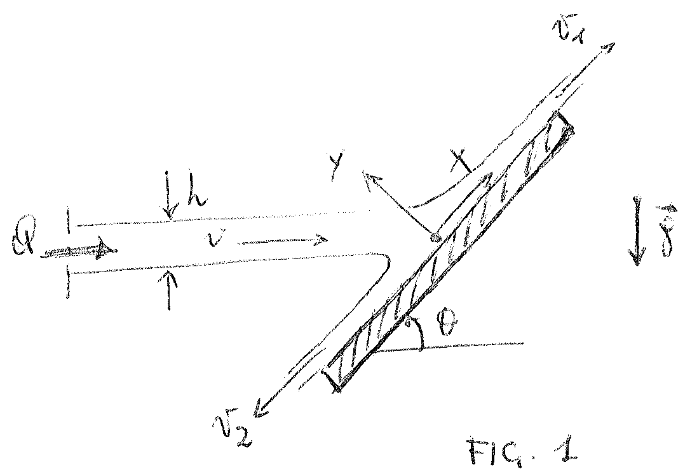


FIG. 1

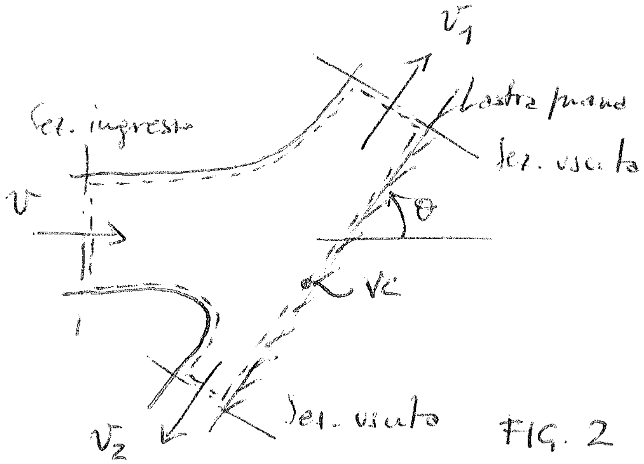


FIG. 2

Consideriamo un volume di controllo come quello indicato in figura 2. La conservazione della massa applicata a tale V.C. fornisce:

$$\cancel{\rho} A v = \cancel{\rho} A_1 v_1 + \cancel{\rho} A_2 v_2$$

con $A = W \cdot h$, $A_1 = W \cdot h_1$, $A_2 = W \cdot h_2$. Pertanto:

$$h \cdot v = h_1 v_1 + h_2 v_2 \quad (1)$$

La conservazione dell'energia (eq. di Bernoulli) applicata al VC fornisce:

$$\frac{1}{2} v^2 + gh + \frac{P}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 + \frac{P_2}{\rho} \quad (2)$$

con $h = h_1 = h_2$ = quota alla quale si trovano le sezioni del tubo di flusso e $P = P_1 = P_2 = P_{atm}$. In altri termini, poiché il getto avviene nel piano orizzontale ed è un getto libero in atmosfera risulta che i termini di en. potenziale (gh_i) e di en. piezometrica (P_i/ρ) che compaiono nell'eq. (2) rimangono invariati sulle varie sezioni del tubo di flusso. Da ciò segue che anche il termine di en. cinetica ($\frac{1}{2} v_i^2$) deve rimanere invariato to tra le varie sezioni del tubo di flusso, fornendo pertanto:

$$v = v_1 = v_2 \qquad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene: $\boxed{h = h_1 + h_2}$ (*)

Per il calcolo della forza $\vec{F}$ esercitata dal getto, si può utilizzare l'eq. di conservazione della p.d.m., scritta nelle sue componenti in direz. x e y:

dir. x

$$0 = w(\beta_1 v_{x,1} - \beta_2 v_{x,2}) + \cancel{p_1 A_{1,x} - p_2 A_{2,x}} - \cancel{F_x}^{\,0} + \cancel{\int_{z_1}^{z_2} \rho A dz\, g_x}^{\,0}$$

$\hookrightarrow p_1 = p_2$, $A_{1,x} = A_{2,x}$

$$0 = w v_{x,1} - w v_{x,2}$$

$$0 = \underbrace{\cancel{\rho} Q}_{w} \cdot \underbrace{v \cos\theta}_{v_{x,1}} - \underbrace{(\cancel{\rho} Q_1 v_1 - \cancel{\rho} Q_2 v_2)}_{w v_{x,2}}$$

$$\vec{g} = (0, 0, -g)$$

dir. y

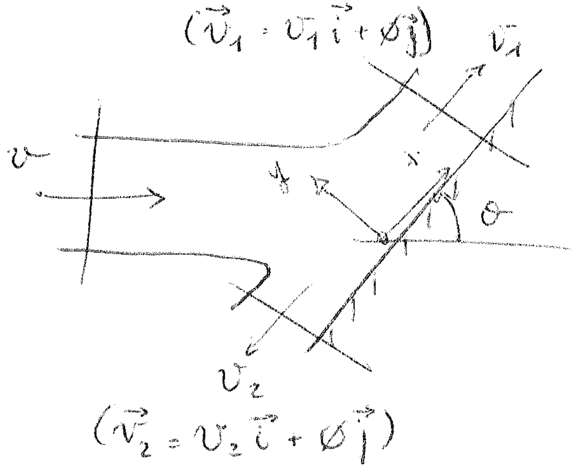
$$0 = w(\beta_1 v_{y,1} - \beta_2 v_{y,2}) + \cancel{p_1 A_{1,y} - p_2 A_{2,y}} - F_y + \cancel{\int_{z_1}^{z_2} \rho A dz\, g_y}^{\,0}$$

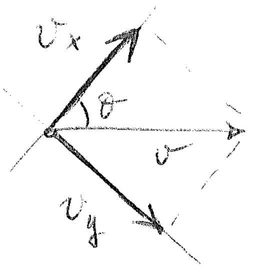
$$0 = w v_{y,1} - w \cancel{v_{y,2}}^{\,0} - F_y$$

$\hookrightarrow p_1 = p_2$, $A_{1,y} = A_{2,y}$

$$0 = \rho Q(-v \sin\theta) - F_y$$

avendo assunto, per ipotesi, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ essendo il profilo di velocità (all'interno del getto) piatto: in tale situazione, vale $\langle v^n \rangle = \langle v \rangle^n$. Vale inoltre:





- $v_x = v \cos\theta = v_{x1}$
- $v_y = -v \sin\theta = v_{y,1}$

Nota: il termine F_x risulta essere nullo in base alle ipotesi di perdite per attrito trascurabili. F_x rappresenta infatti la forza esercitata dal fluido sulle pareti laterali del tubo di flusso che lo contiene: nel caso del getto su lastra piana, tale forza corrisponde esattamente alla forza d'attrito prodotta dalla viscosità del fluido quando a contatto con la piastra. Per ipotesi del problema, tale forza può essere trascurata!

Le componenti dell'eq. di conservazione della q.d.m. si possono quindi scrivere nella seguente forma:

$$\text{dir. } x: \quad 0 = Q v \cos\theta - Q_1 v_1 + Q_2 v_2 \qquad (4)$$

$$\text{dir } y: \quad 0 = -\rho Q v \sin\theta - F_y \qquad (5)$$

Dalla (5) si ricava: $F_y = -\rho Q v \sin\theta = -\rho Q \sin\theta \cdot \dfrac{Q}{Wh}$

$$\overset{!}{=} -\frac{\rho Q^2}{Wh}\sin\theta$$ (diretta con verso opposto all'asse y)

Pertanto $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = -\dfrac{\rho Q^2}{Wh}\sin\theta\, \vec{j} \Rightarrow \boxed{|\vec{F}| = \dfrac{\rho Q^2}{Wh}\sin\theta}$

Dalla (4) si ricava: $Q \cancel{v} \cos\theta = Q_1 \cancel{v_1} - Q_2 \cancel{v_2}$

$$\rightarrow \cancel{v} \cdot \cancel{W} h \cos\theta = \cancel{v_1} \cancel{W} h_1 - \cancel{v_2} \cancel{W} h_2$$

Ricorda: $v = v_1 = v_2$!!

$$h\cos\theta = h_1 - h_2 \Rightarrow h_1 = h\cos\theta + h_2$$

Sostituendo nella (*): $h = (h\cos\theta + h_2) + h_2 \Rightarrow h_2 = \dfrac{h}{2}(1 - \cos\theta)$

$$\boxed{h_2 = \frac{h}{2}(1-\cos\theta)} \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{h}{2}(1+\cos\theta)}$$

$$Q_2 = v_2 \cdot W h_2 \qquad Q_1 = v_1 \cdot W h_1$$

$$\overset{!}{=} v \cdot W \frac{h}{2}(1-\cos\theta) \qquad \overset{!}{=} v \cdot W \frac{h}{2}(1+\cos\theta)$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{vWh}{2}(1-\cos\theta)} \qquad \boxed{Q_1 = \frac{vWh}{2}(1+\cos\theta)}$$

Portata volumetrica nelle due vene fluide!