FLUIDODINAMICA, AA 2012/2013

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

25 Gennaio 2013

1

Si consideri un film di spessore sottile che scorre lungo un piano inclinato (avente lunghezza L e larghezza W) costituito da materiale poroso. Il film viene alimentato per mezzo di una portata massica specifica $q(x) = k/\delta(x)$, con k tasso di assorbimento costante, espresso in $[kg/m\ s]$) che fluisce attraverso il piano poroso. Siano α l'angolo di inclinazione del piano rispetto all'orizzontale e $\delta(x)$ lo spessore del film. Si chiede di:

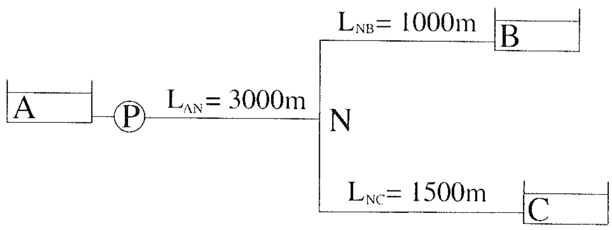
1. scrivere le equazioni di Continuità e di Navier-Stokes per il caso in esame, enunciando chiaramente le ipotesi semplificative; [5%]
2. calcolare il profilo di velocità del film e disegnarne l'andamento in forma grafica; [10%]
3. calcolare lo spessore del film alla fine del piano, $\delta(x = L)$; [15%]
4. calcolare la portata volumetrica del film alla fine del piano, $Q(x = L)$; [5%]
5. calcolare lo sforzo di taglio alla parete e la forza di attrito ivi generata. [15%]

2

Per trasportare una portata volumetrica $Q = 0.2\ m^3/s$ di acqua ($\rho = 1000\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa{\cdot}s$) dal serbatoio A ai due serbatoi B e C si utilizza l'acquedotto in figura (tubazione liscia: $f = 0.079 Re^{-0.25}$).

1. Calcolare il diametro ottimo dell'acquedotto sapendo che *(i)* l'impianto funzionerà per un periodo di esercizio pari ad $N_y = 10$ anni con $N_h = 6000$ ore di esercizio per anno e che *(ii)* i costi da sostenere per realizzarlo sono:
   - costo della tubazione per metro lineare: $K_T D = 310$ €$/m$,
   - costo della stazione di pompaggio: $K_P = 150$ €$/kW$,
   - costo di esercizio: $K_E = 0.01$ €$/kWh$. [30%]
2. Per il diametro determinato al punto precedente, calcolare la potenza della pompa e le portate volumetriche nei rami NB e NC. [10%]
3. Come cambia la distribuzione delle portate volumetriche nei rami NB e NC se, fissate la pressione disponibile al nodo N e la portata elaborata dalla pompa, la lunghezza della tubazione nel ramo NC raddoppia? [10%]

Figura 1: Circuito idraulico (esercizio 3).

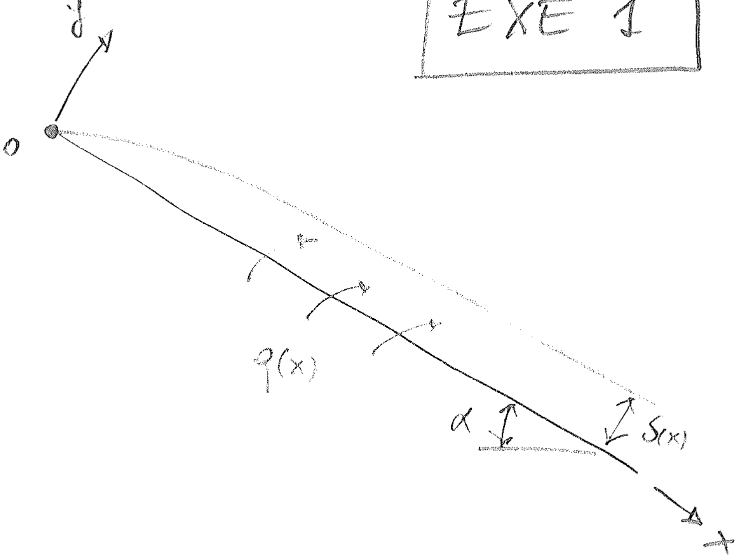


$$\textit{Continuità:}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\ ; \qquad \textit{Navier-Stokes:}\ \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$$

$$\textit{Sforzo di taglio:}\ \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\textit{Equazione di Bernoulli (forma integrale)}\quad B_{1\to 2}: \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + w_s - l_v = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

EXE 1



Eq. e Ipotesi:

$Re \frac{\delta(x)}{L} \ll 1$

Th. Lubrificazione

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \qquad [5\%]$$

Calcolo profilo di velocità:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu}(-\rho g \sin\alpha)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu}(-\rho g \sin\alpha) y + C_1$$

$$v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \sin\alpha) y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1 $\quad v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

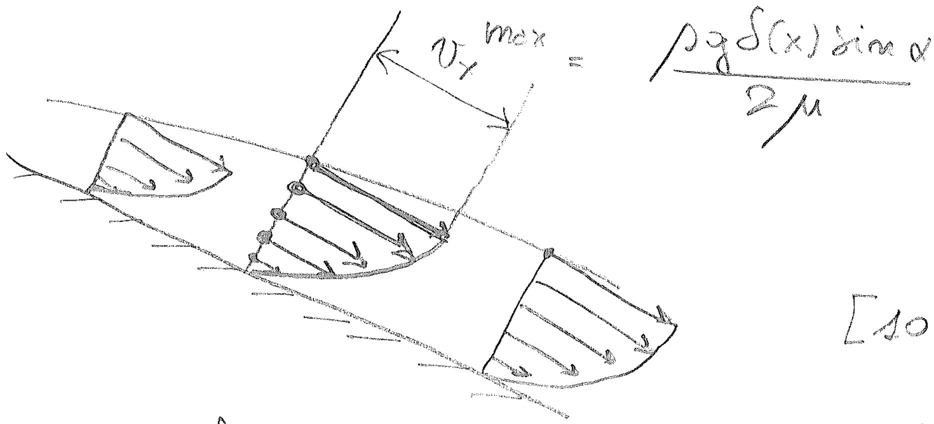
C.C. #2 $\quad \tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}}}_{\text{trasc}}\right)\Big|_{y=\delta(x)} = 0$

$$-\rho g \sin\alpha \cdot \delta(x) + \mu C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{\mu}(-\rho g \sin\alpha)\,\delta(x)$$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \sin\alpha)\left[y^2 - 2\delta(x)\, y\right]}$$

$\longrightarrow$

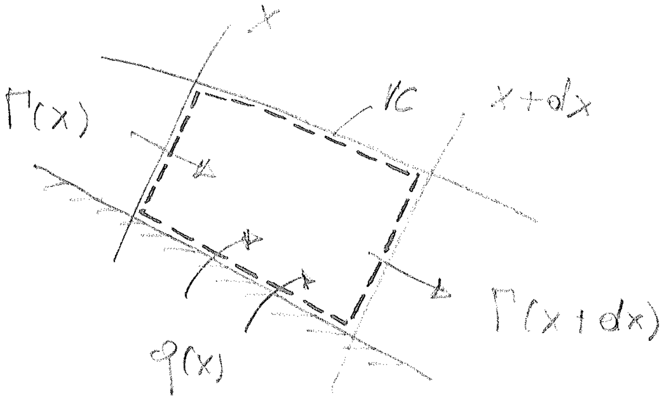


[10 %]

$$\boxed{\Gamma(x)} = \rho \frac{Q(x)}{W} = \rho \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = -\frac{\rho^2 g \sin\alpha}{2\mu} \underbrace{\int_0^{\delta(x)} [y^2 - 2\delta(x) y]\,dy}_{\frac{\delta^3(x)}{3} - 2\delta(x)\frac{\delta^2(x)}{2} = \frac{\delta^3(x)}{3} - \delta^3(x) = -\frac{2}{3}\delta^3(x)}$$

$$= \boxed{\frac{\rho^2 g \delta^3(x) \sin\alpha}{3\mu}} \quad (I^\circ)$$

Bilancio di massa



$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \dot m_{in} = \dot m_{out}$

$\Rightarrow Q_{in} = Q_{out} \Rightarrow \Gamma_{in} = \Gamma_{out}$

$\Gamma(x) + q(x) \cdot dx = \Gamma(x+dx)$

$\frac{\Gamma(x+dx) - \Gamma(x)}{dx} = q(x)$

$$(II^\circ) \; \boxed{\frac{d\Gamma}{dx} = q(x)} \Rightarrow \Gamma(x) = \Gamma_0 + \int_0^x q(x)\,dx$$

Non posso integrare a sx!

Derivando (I°): $\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{\mu} \delta^2(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = C_1 \delta^2(x) \frac{d\delta(x)}{dx}$

Uguagliando (I°) e (II°): $C_1 \delta^2(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{K}{\delta(x)} \Rightarrow \boxed{C_1 \delta^3(x)\, d\delta(x) = K\,dx}$

$$C_1 \int_{\delta_0=0}^{\delta(x)} \delta^3(x)\, d\delta(x) = K \int_0^x dx \Rightarrow C_1 \frac{\delta^4}{4}(x) \Big|_{\delta_0=0}^{\delta(x)} = K \cdot x$$ 3

$$\delta(x) = \left(\frac{4 \mu K \cdot x}{\rho^2 g \sin\alpha} \right)^{1/4}$$

Andamento dello spessore lungo il piano

$$\boxed{\delta(x=L) = \left(\frac{4\mu K \cdot L}{\rho^2 g \sin\alpha} \right)^{1/4}}$$

[15%]

$$\boxed{\frac{Q(x=L)}{W}} = \frac{\Gamma(x=L)}{\rho} = \frac{K}{\rho\,\delta(x)} \cdot L$$

$$= \frac{KL}{\rho} \left(\frac{\rho^2 g \sin\alpha}{4\mu K L} \right)^{1/4}$$

$$= \boxed{\left(\frac{K^3 L^3 g \sin\alpha}{4\mu \rho^2} \right)^{1/4}}$$

[5%]

$$\boxed{\tau_w = \tau_{xy}(x, y=0) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \cdot C_1 = \rho g \sin\alpha \cdot \delta(x)}$$

$$\hookrightarrow F_\tau = \int_A \tau_w\, dA = \int_0^W \int_0^L \tau_w\, dx\, dz$$

$$\hookrightarrow \frac{F_\tau}{W} = \int_0^L \rho g \sin\alpha \cdot \delta(x)\, dx = \rho g \sin\alpha \int_0^L C_1 \cdot x^{1/4}\, dx$$

$\longrightarrow$

com $G_1 = \left(\dfrac{4 \mu K}{\rho^2 g \sin \alpha} \right)^{1/4}$

$$\frac{F_\tau}{W} = G_2 \frac{4}{5} X^{5/4} \Big|_0^L = \frac{4}{5} G_2 \cdot L^{5/4}$$

com $G_2 = \rho g \sin \alpha \cdot G_1 = \left(\dfrac{4 \mu K \rho^4 g^4 \sin^4 \alpha}{\rho^2 g \sin \alpha} \right)^{1/4}$

$$\overset{!}{=} \left(4 \mu K \rho^2 g^3 \sin^3 \alpha \right)^{1/4}$$

$$\boxed{\frac{F_\tau}{W} = \frac{4}{5} \left(4 \mu K \rho^2 g^3 L^5 \sin^3 \alpha \right)^{1/4}} \qquad [15\%]$$

$$\frac{N}{m} = \frac{kg\, m}{s^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{kg}{s^2} \qquad \frac{kg}{ms} \cdot \frac{kg}{ms} \cdot \frac{kg^2}{m^6} \cdot \frac{m^3}{s^6} \cdot m^5 = \frac{kg^4}{s^8} \checkmark$$

EXE 2

(*) $Q = 0{,}2\ \frac{m^3}{s} \Rightarrow v_{AN} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{0.255}{D^2}$

▶ $C_{TOT} = K_T D L + \left(\frac{K_P + K_E N_g N_h}{10^3}\right) Pot$; ▷ $L = 5500$

$= 310 \cdot 5500 \cdot D + \left(\frac{150 + 0{,}01 \cdot 10 \cdot 6000}{10^3}\right) Pot$

$= 1{,}705 \cdot 10^6 D + \underbrace{(0.15 + 0{,}6)}_{0{,}75} Pot$

▶ $Pot = \delta W_s \cdot \rho Q$

▶ B_{AN} : $\frac{P_{atm}}{\rho} + dW_s - dl_v^{AN} = \frac{P_N}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2} v_{AN}^2}$ trasc.

$dW_s = \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} + dl_v^{AN}$ [1]

▶ B_{NB} : $\cancel{\frac{1}{2} v_{NB}^2}$ (trasc.) $+ \frac{P_N}{\rho} - dl_v^{NB} = \frac{P_{atm}}{\rho} \rightarrow \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} \simeq dl_v^{NB}$

▶ B_{NC} : $\cancel{\frac{1}{2} v_{NC}^2}$ (trasc.) $+ \frac{P_N}{\rho} - dl_v^{NC} = \frac{P_{atm}}{\rho} \rightarrow \frac{P_N - P_{atm}}{\rho} \simeq dl_v^{NC}$

$\Rightarrow \boxed{dl_v^{NB} = dl_v^{NC}}$

Ora $Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 10^6 \cdot v \cdot D \overset{(*)}{=} 10^6 \cdot \frac{4Q}{\pi D^2} \cdot D = 2{,}55 \cdot 10^5 / D$

Il flusso è turbolento se: $Re > 4000$ ovvero $\boxed{D < 63{,}66\ m}$

Probabile!

Posso pertanto calcolare le perdite usando l'eq. di Blasius per f :

$$\boxed{\Delta p_v = 2 f v^2 \frac{L}{D}} \qquad \Delta p_v^{NB} = \Delta p_v^{NC}$$

$$\Rightarrow \cancel{0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} v_{NB}^{1{,}75} \frac{L_{NB}}{\cancel{D^{1{,}25}}} = \cancel{0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25}} v_{NC}^{1{,}75} \frac{L_{NC}}{\cancel{D^{1{,}25}}}$$

$$v_{NB}^{1{,}75} L_{NB} = v_{NC}^{1{,}75} L_{NC}$$

$$\boxed{v_{NB} = v_{NC} \left(\frac{L_{NC}}{L_{NB}}\right)^{\frac{1}{1.75}}} \cong \boxed{1{,}26\, v_{NC}}$$

Cons. massa nodo N: $\boxed{v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} \cong 2{,}26\, v_{NC}}$

Tornando alla [1]:

$$\boxed{\Delta W_s} = \Delta p_v^{NC} + \Delta p_v^{AN} = 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \left(v_{NC}^{1{,}75} L_{NC} + v_{AN}^{1{,}75} L_{AN}\right) D^{-1{,}25}$$

$$= 0{,}158 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0{,}25} \left(\frac{L_{NC}}{2{,}26^{1{,}75}} + L_{AN}\right) v_{AN}^{1{,}75} \cdot D^{-1{,}25}$$

$$= 0{,}158 \left(10^6\right)^{-0{,}25} \cdot \left(\frac{1500}{2{,}26^{1{,}75}} + 3000\right) v_{AN}^{1{,}75} \cdot D^{-1{,}25}$$

$$v_{AN} = \frac{4 Q}{\pi D^2} \longrightarrow \cong 16{,}788 \cdot (0{,}255)^{1{,}75} \cdot D^{-4{,}75}$$

$$\cong \boxed{1{,}536 \cdot D^{-4{,}75}}$$

$$\text{Pot} = 1{,}536 \cdot D^{-4{,}75} \cdot \rho Q \cong 307{,}24 \cdot D^{-4{,}75}$$

$$C_{TOT} = 1{,}705 \cdot 10^6 D + \underbrace{0{,}75 \cdot 307{,}24}_{230{,}4324} \cdot D^{-4{,}75}$$

$$\frac{d\,C_{TOT}}{dD} = 1{,}705 \cdot 10^6 - \underbrace{4{,}75 \cdot 230{,}4324}_{1094{,}554} \cdot D^{-5{,}75} = 0$$

$$\boxed{D_{ottimo}} = \left(\underbrace{\frac{1{,}705 \cdot 10^6}{1{,}094 \cdot 10^3}}_{1557{,}122} \right)^{-\frac{1}{5{,}75}}$$

$$\boxed{\cong 0{,}278 \ m}$$

$$\boxed{Pot = 307{,}24 \cdot D_{ott}^{-4{,}75} \cong 133{,}28 \ KW}$$

$$v_{AN} = \frac{0{,}255}{(D_{ott})^2} \cong 3{,}3 \ m/s \rightarrow v_{NC} \cong 1{,}46 \ m/s$$

$$\rightarrow v_{NB} \cong 1{,}84 \ m/s$$

$$\boxed{Q_{NC} = v_{NC} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} = 0{,}0886 \ m^3/s}$$

$$\boxed{Q_{NB} = v_{NB} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} = 0{,}1117 \ m^3/s}$$

Ridistribuzione delle portate:

$$J_v^{NC} = J_v^{NB} \Rightarrow \cancel{0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25}} v_{NC}^{1,75} \frac{L_{NC}^*}{\cancel{D^{1,25}}} = \cancel{0,158\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-0,25}} v_{NB}^{1,75} \frac{L_{NB}}{\cancel{D^{1,25}}}$$

$$v_{NB} = v_{NC}\left(\frac{L_{NC}^*}{L_{NB}}\right)^{\frac{1}{1,75}} = v_{NC} \cdot 3^{1/1,75} \simeq 1,87\, v_{NC}$$

$$v_{AN} = v_{NB} + v_{NC} \simeq 2,87\, v_{NC} \Rightarrow \boxed{v_{NC} = \frac{v_{AN}}{2,87} \simeq 1,15 \,\frac{m}{s}}$$

$$\boxed{v_{NB} = 1,87\, v_{NC} = 2,15 \,\frac{m}{s}}$$

$$\boxed{Q_{NC} = v_{NC} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} \simeq 0,07 \,\frac{m^3}{s}} \quad (-21,2\,\%)$$

$$\boxed{Q_{NB} = v_{NB} \frac{\pi D_{ott}^2}{4} \simeq 0,13 \,\frac{m^3}{s}} \quad (+21,2\,\%)$$