FLUIDODINAMICA - AA 2011/2012

Primo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

01 Dicembre 2011

1

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 1 in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità ρ_o, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente chiuso, contenente olio e aria non miscelati.

1. Date le altezze h_1 ed h_2 del pelo libero nei due recipienti e l'altezza H della tubazione, si chiede di determinare l'espressione della pressione idrostatica nel punto A e della pressione dell'aria nel recipiente chiuso. [10%]
2. Sapendo che i due recipienti hanno uguale sezione S, determinare la nuova espressione per la pressione dell'aria nel recipiente chiuso nel caso in cui l'altezza del pelo libero h_1 aumenti del 20%. [Suggerimento: che trasformazione subisce l'aria contenuta nel recipiente chiuso?] [20%]

2

Il dip coating è un processo utilizzato per deporre film sottili su un substrato solido tramite immersione di tale substrato in una vasca contenente il materiale da deporre in forma liquida. Il substrato così *rivestito* viene successivamente estratto dalla vasca facendolo scorrere verticalmente con velocità costante e pari ad U, come schematizzato in Fig. 2. Lo spessore del film trascinato verticalmente assieme al substrato può essere modificato tramite un getto d'aria trasversale ad alta pressione (processo noto come *jet wiping*): il getto fa ricadere verso il basso la portata di film in eccesso riducendo così lo spessore al valore desiderato. Con riferimento alla regione di flusso evidenziata dal rettangolo tratteggiato in Fig. 2, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di continuità e di Navier-Stokes enunciando chiaramente le ipotesi semplificative; [5%]
2. sapendo che lo spessore δ del film è costante, ricavare il profilo di velocità nel film, $v_x(y)$, e rappresentarne graficamente l'andamento nell'ipotesi di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra film e aria; [10%]
3. ricavare il profilo di velocità nel film, $v_x(y)$, e rappresentarne graficamente l'andamento nel caso in cui il getto gassoso fluisca verso il basso esercitando all'interfaccia uno sforzo di taglio non nullo pari a τ_i. [20%]

3

Per realizzare un impianto di climatizzazione è necessario progettare un sistema di manutenzione dotato di ugelli nebulizzatori. Tali ugelli vengono utilizzati per generare microgocce sferiche di liquido igienizzante necessarie a garantire le periodiche operazioni di pulizia dell'impianto. Una volta generate, le microgocce vengono iniettate all'interno delle condutture da igienizzare con velocità iniziale v_o e con diametro d_p. Supponendo che il moto delle microgocce avvenga nella sola direzione orizzontale (ovvero supponenedo di trascurare l'effetto della gravità) ed in regime di Stokes ($C_D = 24/\mathrm{Re}_p$), si chiede di:

1. determinare l'espressione della *stopping distance* nell'ipotesi di massa delle gocce costante durante il moto; [10%]
2. determinare una espressione per la *stopping distance* nell'ipotesi che, in particolari condizioni di elevata umidità, vi possa essere condensazione di vapor acqueo sulle gocce e che la massa delle gocce possa quindi aumentare durante il moto con flusso di condensazione $c = k\pi d_p^2$ $[kg/s]$ e tasso di condensazione k costante. [25%]

Figure

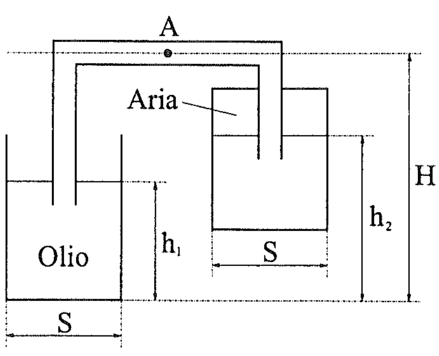


Fig. 1 Sistema acqua-olio.

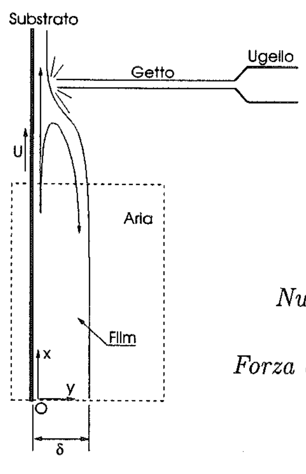


Fig. 2 Dip coating.

Equazioni

Continuità: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$

NS: $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$

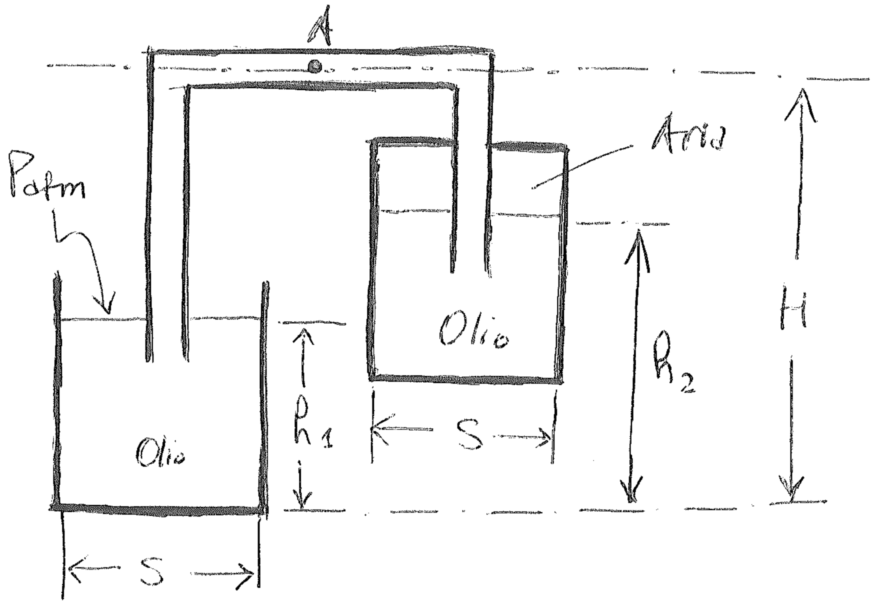
Taglio: $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Num. Reynolds particella: $Re_p = \dfrac{\rho|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|d_p}{\mu}$

Forza di attrito: $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|$

Legge di Stevino: $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

EXE 1



1.1) Dati h_1, h_2, H calcolare P_A e P_{aria}

Dalla statica:

$$P_A = P_{atm} + \rho_o g h_1 - \rho_o g H$$

$$\boxed{P_A = P_{atm} - \rho_o g (H - h_1)}$$

$$\boxed{P_{aria}} = P_A + \rho_o g H - \rho_o g h_2 = P_{atm} - \rho_o g(\cancel{H} - h_1) - \rho_o g(h_2 - \cancel{H})$$

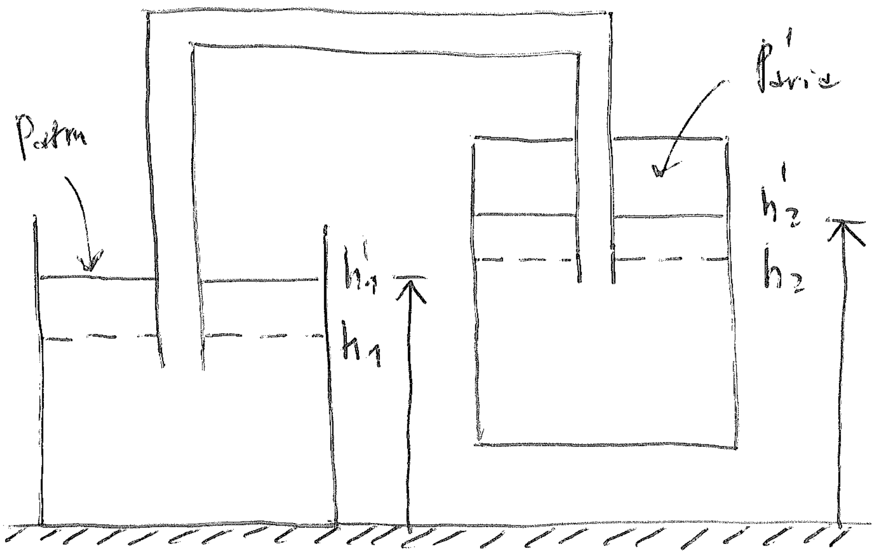
$$= \boxed{P_{atm} + \rho_o g (h_1 - h_2)} \Rightarrow P_{aria} < P_{atm}!$$

1.2) Se h_1 aumenta del 20%, l'aria nel serbatoio subisce un'espansione, che ipotizziamo isoterma: $p \cdot V = \text{cost.}$ (questo nell'hp di volume d'olio costante).

Poiché i due serbatoi hanno la stessa sezione, h_2 deve ridursi del 20% ovvero il volume d'aria aumenta del 20%. Pertanto:

$$P'_{aria} \cdot V'_{aria} = P_{aria} \cdot V_{aria} \Rightarrow \boxed{P'_{aria} = P_{aria} \cdot \frac{V_{aria}}{V'_{aria}} = \frac{P_{aria}}{1.2}}$$

Il problema poteva essere risolto anche nel seguente modo: l'aria nel serbatoio chiuso può comprimersi se si ipotizza che venga aggiunto dell'olio nel serbatoio aperto (<u>volume d'olio variabile</u>) per raggiungere la quota $h_1' = 1.2\, h_1$.



Nell'hp di compressione isoterma:

$$P'_{aria} = P_{aria} \frac{V_{aria}}{V'_{aria}} = P_{aria} \frac{h - h_2}{h - h_2'} \qquad (1)$$

con h = altezza del serbatoio rispetto al livello 0

Possiamo calcolare P'_{aria} anche sfruttando l'eq. della statica:

$$P'_{aria} = P_{atm} + \rho_o g (h_1' - h_2') \qquad (2)$$

Combinando le eq. (1) e (2) si ottiene:

$$P_{atm} + \rho_o g (1.2\, h_1 - h_2') = \left[P_{atm} + \rho_o g (h_1 - h_2) \right] \frac{h - h_2}{h - h_2'}$$

$\Longrightarrow$

Indicando $h_2' = x$ si ha:

$$\left[P_{atm} + \rho_0 g(1.2\, h_1 - x)\right]\cdot(h - x) = \underbrace{\left[P_{atm} + \rho_0 g(h_1 - h_2)\right](h - h_2)}_{cost = K_1}$$

$$(P_{atm} + \rho_0 g\, 1.2\, h_1)h - (P_{atm} + \rho_0 g\, 1.2\, h_1)x - hx + x^2 = K_1$$

$$x^2 - \Big[\underbrace{(P_{atm} + 1.2\rho_0 g h_1) + h}_{cost = K_2}\Big]x = \underbrace{K_1 - (P_{atm} + \rho_0 g\, 1.2\, h_1)h}_{cost = K_3}$$

$$x^2 - K_2 x - K_3 = 0$$

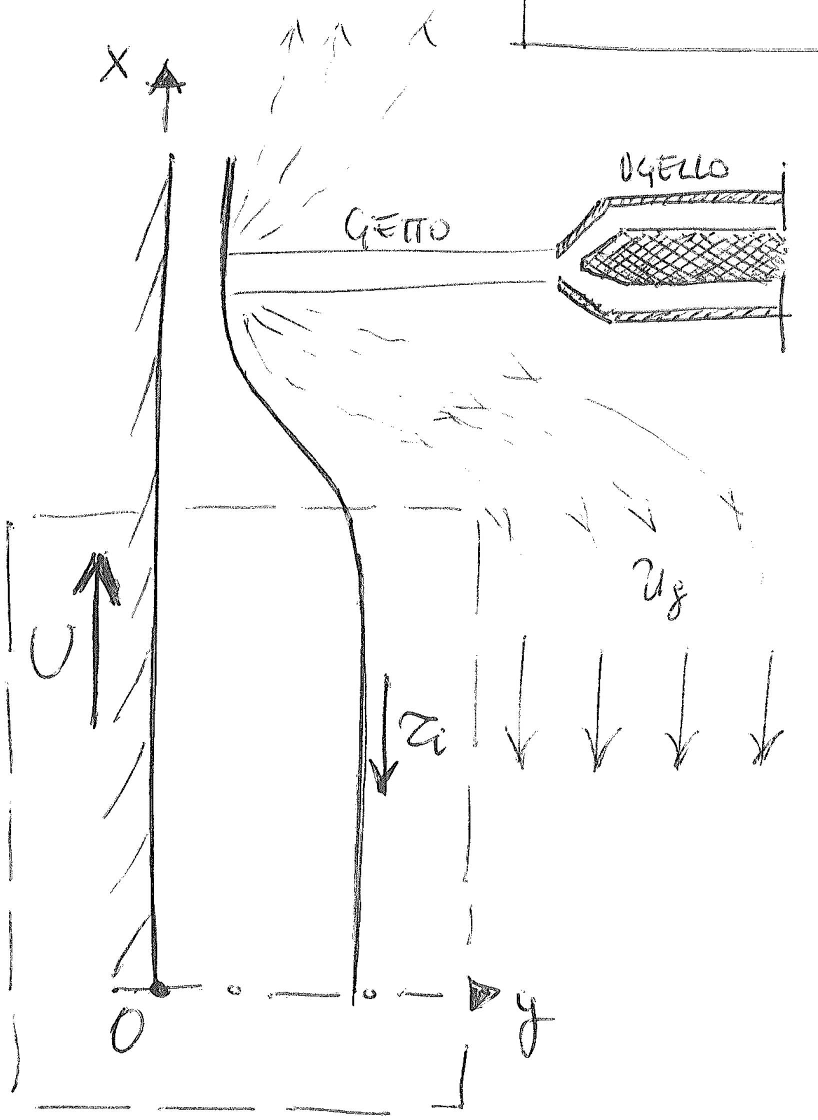
$$x_{1,2} = \frac{K_2 \pm \sqrt{4K_3 + K_2^2}}{2}$$

$$\frac{K_2 + \sqrt{4K_3 + K_2^2}}{2} > 0$$

$$\frac{K_2 - \sqrt{4K_3 + K_2^2}}{2} < 0 \quad NA$$

Scartando la soluzione negativa (h_2' non può essere <0), rimane un'unica soluzione accettabile.

EXE 2



2.1 IPOTESI:

$\frac{\partial \cdot}{\partial z}=0$ FLUSSO 2D

$\frac{\partial \cdot}{\partial t}=0$ FLUSSO STAZ.

$\left.\begin{array}{l} v_x(y)\neq 0 \\ v_y=v_z=0 \end{array}\right\}$ FLUSSO UNIDIR.

EQ. SEMPLIFICATE:

- $\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$ CONT.
- $0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ NS_x
- $0=-\frac{\partial P}{\partial y}$ NS_y
- $0=0$ NS_z

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{=0}+\rho g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$=+\rho g$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}=-1\right]$$

N.B.: $\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}=+\rho g}$!!

2.2

Dalla NS_x:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(+\rho g)\, y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1: $v_x(y=0) = U \Rightarrow \boxed{U = C_2}$

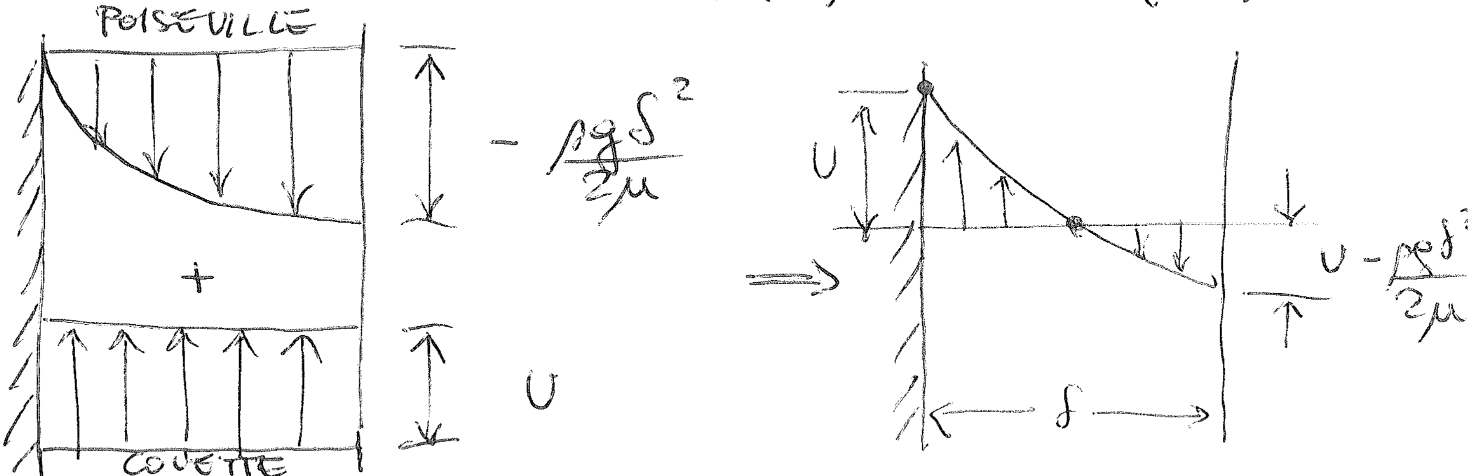
C.C. #2: $\tau_{xy}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$

$$\mu\left[+\frac{\rho g}{\mu}\delta + C_1\right] = 0$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{\rho g}{\mu}\delta}$$

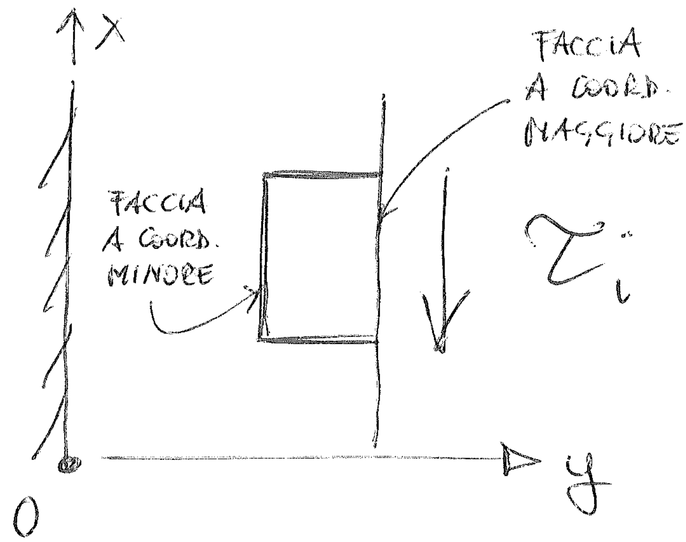
Quindi:

$$\boxed{v_x(y) = \underbrace{\frac{1}{2\mu}(+\rho g)(y^2 - 2\delta y)}_{\text{POISEUILLE } (\leq 0)} + \underbrace{U}_{\text{COUETTE } (>0)}}$$



2.3

Se agisce uno sforzo di taglio τ_i all'interfaccia:



C.C. #2:

$$\tau_{xy}(y=\delta) = -\tau_i$$

$$\mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = -\tau_i$$

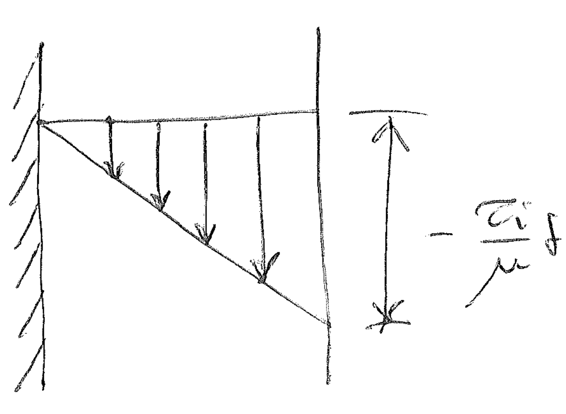
$$\mu\left[\frac{\rho g}{\mu}\delta + C_1\right] = -\tau_i$$

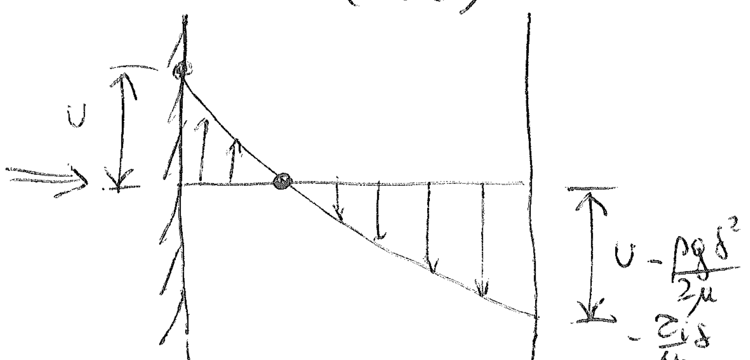
$$\boxed{C_1 = -\frac{\rho g}{\mu}\delta - \frac{\tau_i}{\mu}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(+\rho g)(y^2 - 2\delta y) - \frac{\tau_i}{\mu} y + U}$$

TAGLIO (≤ 0)





Cambiando riferimento (origine sull'interfaccia):

2.2) C.C. #1 : $v_x(y=\delta)=U$

$$v_x(y=\delta)=U=\frac{1}{2\mu}(\rho g)\delta^2+C_1\delta+C_2$$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(y=0)=0$

$$\mu\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \Rightarrow \mu\left[\frac{1}{\mu}(\rho g)y+C_1\right]_{y=0}=0$$

$$\boxed{C_1=0} \Rightarrow \boxed{C_2=U-\frac{1}{2\mu}(\rho g)\delta^2}$$

$$\boxed{v_x(y)=\frac{1}{2\mu}(+\rho g)(y^2-\delta^2)+U}$$

2.3) C.C. #2 : $\tau_{xy}(y=0)=+\tau_i$

$$\mu\left[\frac{1}{\mu}(\rho g)y+C_1\right]_{y=0}=\tau_i \rightarrow \boxed{C_1=\frac{\tau_i}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2=U-\frac{1}{2\mu}(\rho g)\delta^2-\frac{\tau_i}{\mu}\delta}$$

$$\boxed{v_x(y)=\frac{1}{2\mu}(+\rho g)(y^2-\delta^2)+\frac{\tau_i}{\mu}(y-\delta)+U}$$

EXE 3

3.1) Massa delle gocce costante:

$$\vec{F}_I = \vec{F}_D + \cancel{\vec{F}_P}^{\,0} + \cancel{\vec{F}_{grav}}^{\,0} \Rightarrow \text{Lungo } x: \quad m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{2}\rho C_D A_p v_r |v_r|$$

con $v_r = u_{f,x} - v_{p,x}$

Poiché $u_{f,x} = 0$, semplificando si ottiene:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p} \quad \text{con } \tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu} \Rightarrow \int_{v_0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -\frac{1}{\tau_p}\int_0^t dt$$

$$\boxed{v_{p,x} = v_0 e^{-t/\tau_p}} \Rightarrow \int_{x_0=0}^{x_p(t)} dx_p = \int_0^t v_{p,x}\, dt = \int_0^t v_0 e^{-t/\tau_p} dt$$

$$\boxed{x_p = v_0 \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)}$$

Calcolo stopping distance:

$$v_{p,x} \to 0 \quad \text{sse} \quad t \to \infty \quad \Rightarrow \boxed{x_p^{max} = x_p(t\to\infty) = v_0 \tau_p} \; [10\%]$$

3.2) Massa delle gocce variabile:

$$\vec{F}_I = \vec{F}_D \Rightarrow m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x}\frac{dm_p}{dt} = \frac{1}{2}\rho C_D A_p v_r |v_r|$$

$$\cancel{m_p}\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p(t)} + v_{p,x}\frac{dm_p}{dt}\cdot\frac{1}{m_p}$$

semplifica?

$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2(t)}{18\mu}$ è funzione del tempo

$$m_p = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \Rightarrow \frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{2} d_p^2 \frac{d\,d_p}{dt}$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \dot{m}_{in} - \cancel{\dot{m}_{out}}^{\,0} = C = K\pi d_p^2$$

$$\rho_p \frac{\pi}{2} \cancel{d_p^2} \frac{d\,d_p}{dt} = \pi K \cancel{d_p^2}$$

$$\frac{d\,d_p}{dt} = \frac{2K}{\rho_p} \Longrightarrow \boxed{d_p(t) = d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t}$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \left[-\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{d_p^2(t)} - K\cancel{\pi}\cancel{d_p^2(t)} \cdot \frac{1}{\rho_p \frac{\pi d_p^3(t)}{6}} \right] v_{p,x}$$

$$= -\left[K_1 \frac{1}{d_p^2(t)} + K_2 \frac{1}{d_p(t)} \right] v_{p,x} \quad \text{con} \quad K_1 = \frac{18\mu}{\rho_p} \left[\frac{Pa \cdot s}{kg/m^3} = \frac{m^2}{s} \right]$$

$$K_2 = \frac{6K}{\rho_p} \left[\frac{\cancel{kg}}{m^2 s} \cdot \frac{m^3}{\cancel{kg}} = \frac{m}{s} \right]$$

$$\int_{v_0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = -K_1 \underbrace{\int_0^t \frac{1}{\left(d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t\right)^2} dt}_{A} - K_2 \underbrace{\int_0^t \frac{1}{\left(d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t\right)} dt}_{B} \qquad (1)$$

Risolvendo per sostituzione:

$$d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t = z \Rightarrow dt = \frac{\rho_p}{2K} dz$$

Integrale A:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\rho_p}{2K} dz = \frac{\rho_p}{2K} \left(-z^{-1} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} =$$

$$= \frac{\rho_p}{2K} \left(-\frac{1}{d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t} + \frac{1}{d_{p,0}} \right) = \frac{\cancel{\rho_p}}{\cancel{2K}} \cdot \frac{+\frac{\cancel{2K}}{\cancel{\rho_p}} t}{d_{p,0} \left(d_{p,0} + \frac{2K}{\rho_p} t \right)}$$

Integrale B: $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} \cdot \frac{\rho_p}{2k}\, dz = \frac{\rho_p}{2k} \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} =$

$$= \frac{\rho_p}{2k} \ln\left(\frac{d_{p,0} + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_{p,0}} \right)$$

L'eq. (1) diventa pertanto:

$$\ln\left(\frac{v_{p,x}}{v_{p,0}}\right) = -K_1 \frac{t}{d_{p,0}\left(d_{p,0} + \frac{2k}{\rho_p} t\right)} - K_2 \frac{\rho_p}{2k} \ln\left(\frac{d_{p,0} + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_{p,0}} \right)$$

$$v_{p,x} = v_{p,0} \cdot \exp\left[-K_1 \frac{t}{d_{p,0}\left(d_{p,0} + \frac{2k}{\rho_p} t\right)} \right] \cdot \left(\frac{d_{p,0}}{d_{p,0} + \frac{2k}{\rho_p} t} \right)^{K_2 \frac{\rho_p}{2k}}$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_0 \left(\frac{d_{p,0}}{d_p(t)}\right)^{K_2 \frac{\rho_p}{2k}} \exp\left[- \frac{K_1 \cdot t}{\cdot\, d_p(t)} \right]} \quad \text{con } K_2 \frac{\rho_p}{2k} = 3!$$

$$X_p(t) = \int_0^t v_{p,x}(t)\, dt = v_0 (d_{p,0})^{K_2 \frac{\rho_p}{2k}} \cdot \int_0^{t'} d_p(t)^{-K_2 \frac{\rho_p}{2k}} \cdot \exp\left[- \frac{K_1 \cdot t}{d_p(t)} \right] dt$$

$= \ldots$

$d_{p,0} \cdot d_p(t)$